Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 28 (1929)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Kapitel: Calcul Différentiel et Intégral.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (1928)

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Calcul différentiel et intégral (7 heures). — *I. Soient* $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ *les coordonnées rectangulaires d'un point d'une surface* S *exprimées à l'aide de deux paramètres indépendants*, u *et* v, *et*

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

l'élément linéaire de S. *Ecrire que les courbes* $u = C^{te}$ *sont des lignes géodésiques de* S. *On vérifiera que la condition obtenue peut être exprimée uniquement au moyen de* F, G *et de leurs dérivées premières.*

II. Pour que la surface S_1 *représentée par les équations*

$$x = u\cos v\,, \qquad y = u\sin v\,, \qquad z = z(u, v)$$

soit coupée par les cylindres $u = C^{te}$ *suivant des géodésiques, il faut et il suffit que* z *satisfasse à une équation aux dérivées partielles du second ordre* (A_1).

Posant

$$\frac{\partial z}{\partial v} = u^n f(t)\,,$$

former l'équation (A_2) *vérifiée par la fonction* $t(u, v)$; *déterminer l'exposant* n *et la fonction* $f(t)$ *de manière que les coefficients de* (A_2) *soient indépendants de* t; *soit* (A_3) *l'équation ainsi obtenue.*

Soit (A_4) *l'équation que l'on déduit de* (A_3) *en prenant* v *comme fonction,* t *et* u *comme variables indépendantes; chercher les solutions de* (A_4), *qui sont de la forme*

$$v = T(t) + U(u) \qquad \text{et} \qquad v = T(t)\,U(u)\,.$$

Indiquer les différentes formes qu'elles revêtent lorsqu'on n'emploie que des fonctions et des paramètres réels, et signaler leurs dégénérescences. Déterminer les fonctions $z(u, v)$ *correspondantes.*

III. Pour que la surface S représentée par les équations

$$x = u \cos v \cos \varphi \ , \qquad y = u \cos v \sin \varphi \ , \qquad z = u \sin v \ ,$$

où φ *est une fonction de* u *et de* v, *soit coupée par les sphères* u $=$ C^{te} *suivant des géodésiques* Γ, *il faut et il suffit que* φ(u, v) *satisfasse à une équation aux dérivées partielles du second ordre* (E). *Chercher les solutions de* (E) *de la forme* $\varphi = \mathrm{U}(\mathrm{u}) + \mathrm{V}(\mathrm{v})$; *soient* Σ *les surfaces correspondant à ces solutions: dorénavant on se limitera à l'étude des surfaces* Σ.

Posant

$$\log u = t \ , \qquad \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{v}{2}\right) = \tau \ , \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \operatorname{tg} \omega \ ,$$

on montrera que la détermination des surfaces Σ *revient à l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre, aux variables* τ *et* ω, *soit:*

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \mathrm{F}(\omega, \tau) \qquad \text{(F)}$$

suivie d'une quadrature. [*On posera* F (o, o) $=$ a.]

a. *Construire les courbes intégrales* C *de* (F) *en s'aidant d'une représentation graphique préliminaire*[1]; *en déduire la représentation* γ *d'une géodésique* Γ *sur le plan* (τ, φ). *Les courbes* γ *sont de deux espèces différentes, celles de* 1re *espèce,* γ_1, *ayant une infinité de points singuliers* M_n, *et celles de* 2^{me} *espèce,* γ_2, *en ayant seulement un nombre fini.*

Vers quelles limites l *et* λ *tendent les différences*

$$l_n = \tau_n - \tau_{n-1} \ , \qquad \lambda_n = \varphi_n - \varphi_{n-1}$$

entre les coordonnées homologues de deux points consécutifs M_{n-1}, M_n *d'une courbe* γ_1 *quand* n *croit indéfiniment ?*

Caractériser, sur une surface Σ, *les courbes* v $=$ C^{te} *et montrer que, sur une même surface* Σ, *les courbes* Γ *sont semblables.*

Soient Δ *les trajectoires orthogonales des courbes* Γ *appartenant à une même surface* Σ; *construire les images* δ *des courbes* Δ *dans le plan* (τ, φ).

b. *Soient* Δ_1 *et* Δ_2 *deux courbes* Δ *rencontrant la géodésique fixe* Γ° *en* m° *et* m_2°, *et la géodésique variable* Γ *en* m_1 *et* m_2 *respectivement. En s'appuyant sur les expressions des arcs de géodésiques par des intégrales définies portant sur des fonctions bien déterminées de* ω *et* τ,

[1] Pour l'étude des branches infinies on ne demande qu'une discussion basée sur le graphique; mais il sera tenu compte des précisions que l'on pourra fournir en s'appuyant sur la théorie des équations différentielles.

prises entre des limites τ_1^0, τ_2^0 *(et* τ_1, τ_2*), et en utilisant* (F), *établir que la variation de l'arc* $\widehat{\mathrm{m}_1\mathrm{m}_2}$ *de* Γ *est nulle; on a ainsi:*

$$\widehat{m_1 m_2} = \widehat{m_1^0 m_2^0} \ . \qquad (e)$$

Ne pourrait-on retrouver l'équation (e) *en mettant l'élément linéaire de* Σ *sous la forme*

$$ds^2 = d\sigma^2 + \mathcal{G} dt^2 \ ?$$

Calculer l'expression explicite de σ *en fonction de* t, ω *et* τ.

Déterminer la courbure totale de Σ *et rechercher si elle tend vers une limite au voisinage de* oz.

N. B. — *On pourrait traiter* b *avant* a.

SOLUTION

PAR

M. Bertrand GAMBIER.

N. B. — Certaines parties, aisées, du problème sont traitées succinctement.

1. — On annule le produit symbolique

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \mathrm{F} & \mathrm{G} \\ \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

$$\mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v} - 2\mathrm{G}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} + \mathrm{G}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u} = 0 \qquad (2)$$

$$ds^2 = \left(\sqrt{\mathrm{G}}\, dv + \frac{\mathrm{F}}{\sqrt{\mathrm{G}}}\, du\right)^2 + \left(\mathrm{E} - \frac{\mathrm{F}^2}{\mathrm{G}}\right) du^2 \ . \qquad (3)$$

L'expression $d\sigma = \sqrt{\mathrm{G}} dv + \frac{\mathrm{F}}{\sqrt{\mathrm{G}}} du$ est différentielle exacte ; $\sigma =$ const est l'équation des trajectoires orthogonales des géodésiques $u =$ const.