

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 28 (1929)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UN THÉORÈME DE WILSON
Autor: Toscano, Letterio
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-22604>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 22.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR UN THÉORÈME DE WILSON

PAR

Letterio TOSCANO (à Messine).

1. — Sur le développement de $n! = 1.2\dots n$ on connaît la relation fondamentale de LEGENDRE

$$\begin{aligned} n! &= n^n - \binom{n}{1}(n-1)^n + \binom{n}{2}(n-2)^n - \dots \\ &\quad + (-1)^{n-2} \binom{n}{2} 2^n + (-1)^{n-1} \binom{n}{1}, \end{aligned} \quad (1)$$

avec $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$, amplement étudiée dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*¹, dans le *Giornale di Matematiche di Battaglini*², dans *La Matematica Elementare*³, dans le *Bollettino dell' Unione Matematica Italiana*⁴. Une démonstration de la (1) peut être lue dans les *Lezioni di Calcolo Infinitesimale*, par E. PASCAL (Part. III, Calcolo delle variazioni e delle differenze finite, p. 231; 2^{me} édition, Hoepli, Milano, 1918), fondée sur les différences finies de O^n . Mais on peut faire déduire (1) de relations plus générales.

Ainsi, si

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

est un polynôme entier par rapport à x , on a

$$\begin{aligned} f(x) - \binom{n}{1} f(x + h) + \binom{n}{2} f(x + 2h) - \dots \\ + (-1)^n f(x + nh) = (-1)^n a_0 n! h^n. \end{aligned} \quad (2)$$

¹ Années 1895, p. 165; 1896, pp. 26 et 299; 1897, p. 59; 1899, pp. 51 et 284; 1900, pp. 22 et 280; 1901, p. 164.

² T. 31, 1894; T. 40, 1902.

³ Année 3, 1924, p. 123.

⁴ Année 6, 1927, p. 187.

Et avec $h = -1$, $f(x) = x^n$, $x = n$ on retrouve la (1).
De plus, si

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

sont n nombres arbitrairement choisis et si nous posons

on a les formules

$$\begin{cases} z_n^p - z_{n-1}^p + z_{n-2}^p - \dots + (-1)^{n-1} z_1^p = 0 & p < n \\ z_n^n - z_{n-1}^n + z_{n-2}^n - \dots + (-1)^{n-1} z_1^n = n! x_1 x_2 \dots x_n \end{cases} \quad (3)$$

et avec

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = a \text{ ,}$$

on trouve par conséquent

$$n^p - \binom{n}{1}(n-1)^p + \binom{n}{2}(n-2)^p - \dots = 0 \quad \quad p < n$$

$$n^n - \binom{n}{1}(n-1)^n + \binom{n}{2}(n-2)^n - \dots = n! \quad .$$

Les expressions (3) ont été établies par N. AGRONOMOF (de Vladivostok) dans la Note sur quelques formules concernant la formule

$$\sum \binom{n}{k} (n-k)^n = n!^{1-1}$$

2. — Nous démontrons ici (2) et après un théorème de *Wilson* par un théorème de *Fermat* et par la relation (1) de *Legendre*.

Considérons la différence première $f(x + h) - f(x)$ de la fonction $f(x)$, et représentons la par $\Delta^{(1)} f(x)$.

¹ *Bollettino dell' Unione Matematica Italiana*, Année 6, 1927, p. 187. Cette note fut publiée en réponse à la demande proposée du *Bollettino dell' Unione Matematica Italiana* (Année 6, 1927, p. 36) de trouver des relations générales d'où on peut déduire (1).

On a

$$\Delta^{(1)} f(x) = f(x + h) - f(x)$$

$$\Delta^{(2)} f(x) = f(x) - 2f(x + h) + f(x + 2h)$$

$$(-1) \Delta^{(3)} f(x) = f(x) - 3f(x + h) + 3f(x + 2h) - f(x + 3h)$$

$$\Delta^{(4)} f(x) = f(x) - 4f(x + h) + 6f(x + 2h) - 4f(x + 3h) + f(x + 4h)$$

et par la méthode d'induction

$$(-1)^n \Delta^{(n)} f(x) = f(x) - \binom{n}{1} f(x + h) + \binom{n}{2} f(x + 2h) - \dots + (-1)^n f(x + nh).$$

Si

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

on a

$$\Delta^{(n)} f(x) = a_0 n! h^n$$

et de là la (2)

Autrement par le théorème de LAGRANGE sur les dérivées on a

$$\Delta^{(1)} f(x) = h f'(x + \theta' h)$$

avec $0 < \theta' < 1$;

$$\begin{aligned}\Delta^{(2)} f(x) &= h \{ f'(x + h + \theta' h) - f'(x + \theta' h) \} \\ &= h^2 f''(x + \theta'' h) ;\end{aligned}$$

et enfin

$$\Delta^{(n)} f(x) = h^n f^{(n)}(x + \theta^{(n)} h) .$$

Mais

$$f^{(n)}(x + \theta^{(n)} h) = a_0 n !$$

et de là suit la formule (2).

3. — Nous supposons $n > 2$ nombre premier et si a n'est pas multiple de n , le nombre $a^{n-1} - 1$ est divisible par n (FERMAT).

Ainsi

$$2^{n-1} \equiv 1 + nB' \quad (n-2)^{n-1} \equiv 1 + nB$$

$$3^{n-1} \equiv 1 + nC' \quad (n-3)^{n-1} \equiv 1 + nC$$

étant $B, B', \dots, C, C', \dots$ nombres entiers.

En outre $(n-1)^n = (-1)^n + nA$ avec A entier.

Alors la relation de LEGENDRE, divisée par n , nous donne

$$(n-1)! = n^{n-1} + (-1)^{n+1} - nA + \binom{n-1}{2}(1+nB) - \binom{n-1}{3}(1+nC) + \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-3} \binom{n-1}{2}(1+nC') + (-1)^{n-2} \binom{n-1}{1}(1+nB') + (-1)^{n-1}$$

et de là

$$\begin{aligned} (n-1)! &= \left\{ n^{n-1} - nA + \binom{n-1}{2}nB - \binom{n-1}{3}nC + \dots \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{n-3} \binom{n-1}{2}nC' + \right. \\ &+ (-1)^{n-2} \binom{n-1}{1}nB' \left. \right\} + \left\{ (-1)^{n-1} + \binom{n-1}{2} - \binom{n-1}{3} + \dots \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{n-3} \binom{n-1}{2} + (-1)^{n-2} \binom{n-1}{1} + (-1)^{n-1} \right\}. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} &(-1)^{n-1} + \binom{n-1}{2} - \binom{n-1}{3} + \dots \\ &\quad + (-1)^{n-3} \binom{n-1}{2} + (-1)^{n-2} \binom{n-1}{1} + (-1)^{n-1} = \\ &= \left\{ \binom{n-1}{0} - \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} - \binom{n-1}{3} + \dots \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{n-3} \binom{n-1}{2} + (-1)^{n-2} \binom{n-1}{1} + (-1)^{n-1} \right\} + \\ &+ n-1-1+(-1)^{n-1} = n-2+(-1)^{n-1}, \end{aligned}$$

puisque

$$\binom{n-1}{0} - \binom{n-1}{1} + \dots + (-1)^{n-2} \binom{n-1}{1} + (-1)^{n-1} = (1-1)^n = 0;$$

et aussi

$$(n-1)! + 2 - (-1)^{n-1} = nP$$

avec P entier.

Pour $n > 2$ premier on a enfin la relation

$$(n-1)! + 1 = nP.$$

Réiproquement si

$$(n - 1)! + 1 = nP ,$$

le nombre n est premier et l'on a aussi démontré le *théorème de Wilson*.

Ce théorème fut attribué à WILSON par WARING, mais on le doit à LAGRANGE.

Messine, 24 décembre 1928.

MOUVEMENT D'UN POINT DONT L'ACCÉLÉRATION
EST PARALLÈLE A UNE DROITE OU A UN PLAN
CONSTANTS

PAR

Letterio TOSCANO (à Messine).

Dans mon travail *Moto di un punto sollecitato da una forza la cui linea d'azione incontra una retta fissa*, sous presse dans le *Giornale di Matematiche*, nous traitons de manière complète et en appliquant la méthode vectorielle, un problème traité déjà par CERRUTI, DAINELLI, CESARO, GEBBIA, avec méthodes diverses qui conduisent à des calculs compliqués.

M. U. DAINELLI, dans un autre travail, *Sul movimento per una linea qualunque* (*Giornale di Matematiche*, vol. 18, 1880, pp. 271, 300), considère le mouvement d'un point dont l'accélération est parallèle à une droite ou à un plan constants; et ici nous reprenons le même problème pour le traiter par la méthode vectorielle.

1. — Mouvement d'un point dont l'accélération a une direction constante.

Soit P le point mobile et a un vecteur unitaire suivant la direction constante