

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 28 (1929)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES TRANSFORMATIONS LINÉAIRES  
**Autor:** Teodoriu, Luca  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-22603>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 30.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Il est possible d'ailleurs que beaucoup de ces relations soient connues depuis longtemps, mais, à notre connaissance celle-ci est la manière la plus simple et à la fois la plus générale de les obtenir toutes de proche en proche et nous croyons qu'elle constitue un excellent exercice pour les débutants de l'Analyse. C'est à eux que nous avons pensé en écrivant ces lignes.

Bucarest, 13 septembre 1929.

---

## SUR LES TRANSFORMATIONS LINÉAIRES

PAR

Luca TEODORIU (Bucarest).

---

1. — Lorsqu'un milieu continu se déplace et se déforme d'une manière continue, on sait que ses éléments obéissent à certaines lois géométriques qui résultent de la continuité et de l'existence des dérivées<sup>1</sup>. Mais l'hypothèse d'existence des dérivées est quelquefois superflue dans beaucoup de problèmes relatifs à la question citée. Le but de cette note est de donner seulement quelques exemples simples à l'appui de cette affirmation.

2. — Soient

$$X_i = f_i(x_1, x_2, x_3) \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

les formules de transformation qui donnent à l'instant  $t$  les coordonnées d'un point  $X$ , l'homologue dans le milieu transformé d'un point  $x$ , du milieu primitif.

Les fonctions  $X_i$  sont uniformes et continues dans l'intérieur du milieu primitif et inversement  $x_i$  sont des fonctions uniformes et continues des  $X_i$  dans le milieu transformé.

---

<sup>1</sup> Voir le mémoire de M. COSSERAT dans les *Annales de la Faculté de Toulouse*, tome X.

Supposons qu'il s'agit de trouver les fonctions  $f_i$  qui permettent d'amener le milieu de l'état primitif à l'état transformé par un déplacement d'ensemble, ce qui revient d'avoir une déformation nulle.

Ce problème se réduit à l'intégration de l'équation fonctionnelle (qui exprime la rigidité):

$$(X_1 - Y_1)^2 + (X_2 - Y_2)^2 + (X_3 - Y_3)^2 = \\ (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 \quad (2)$$

où

$$X_1, X_2, X_3 \quad \text{et} \quad Y_1 Y_2 Y_3$$

sont les homologues des deux points arbitraires

$$x_1, x_2, x_3 \quad \text{et} \quad y_1, y_2, y_3 .$$

La solution est connue.

Les  $X_i$  sont des fonctions linéaires et orthogonales des  $x_i$ ; mais pour intégrer l'équation (2) on introduit dans toutes les démonstrations que je connais, une nouvelle restriction:

Les fonctions  $f_i$  admettent des dérivées partielles de premier et de second ordre <sup>1</sup>.

Je dis que cette restriction est inutile.

Traitons la question directement dans l'espace à  $n$  dimensions.

L'équation (2) devient:

$$\Sigma (X_e - Y_e)^2 = \Sigma (x_i - y_i)^2 \quad i, e = 1, 2 \dots n \quad (3)$$

Je maintiens seulement l'hypothèse de la continuité et de la biunivocité. Au point:

$$y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0 \quad (4)$$

correspondra après la transformation

$$X_i = f_i(x_1, x_2 \dots, x_n) \quad i = 1, 2 \dots n \quad (5)$$

le point:

$$Y_1 = a_1 \quad Y_2 = a_2 \dots \quad Y_n = a_n \quad (6)$$

<sup>1</sup> E. BOREL, *Introduction géométrique à quelques théories physiques*, 1914, chapitre 1.

et l'équation (3) devient:

$$(X_1 - a_1)^2 + \dots + (X_n - a_n)^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 . \quad (7)$$

Soit le point:

$$y_1 = a_1 \quad y_2 = a_2 \dots y_n = a_n \quad (8)$$

qui devient après la transformation (5):

$$Y_1 = Y_2 = \dots Y_n = 0 . \quad (9)$$

La relation (3) devient:

$$X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 = (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 . \quad (10)$$

Par soustraction on obtient de (7) et (10)

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 - 2(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n) = \\ 2(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n) - \\ (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) . \end{aligned} \quad (11)$$

Mais on déduit de (3)

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = r^2 \quad (12)$$

égalité qui exprime que la distance  $r$  du point

$$a_1 \quad a_2 , \dots , a_n$$

à l'origine se conserve après la transformation (5).

Simplifiant avec (2) et ayant en vue (12)

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n = r^2 - a_1 x_1 - a_2 x_2 - \dots - a_n x_n . \quad (13)$$

Maintenant il suffit de supposer que je choisisse dans le milieu transformé pour axe  $OX_i$  la droite qui joint les points

$$(O , O , \dots O) \quad \text{et} \quad (a_1 , a_2 , \dots a_n)$$

ce qui revient à considérer

$$a_1 = 0 \quad a_2 = 0 \dots a_n = 0 \quad a_i \neq 0$$

et (13) devient:

$$\bar{X}_i = \bar{K}_i + \bar{A}_{i,1}x_1 + \bar{A}_{i,2}x_2 + \dots + \bar{A}_{in}x_n \quad (14)$$

où j'ai mis:

$$\bar{K}_i = \frac{r^2}{a_i}; \quad \bar{A}_{i,1} = -\frac{\alpha_1}{a_i}; \quad \bar{A}_{i,2} = -\frac{\alpha_2}{a_i}; \dots; \quad \bar{A}_{in} = -\frac{\alpha_n}{a_i}.$$

Comme les  $X_i$  sont des fonctions linéaires des  $\bar{X}_i$  (ayant en vue les formules de changement d'axes) on obtient de (14) pour les  $X_i$ :

$$X_i = K_i + A_{i,1}x_1 + A_{i,2}x_2 + \dots + A_{in}x_n \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (15)$$

Enfin, en remplaçant les valeurs des  $X_i$  dans l'égalité (7) et en identifiant on obtient:

$$\sum A_{ik}^2 = 1 \quad \sum A_{ik}A_{ij} = 0.$$

3. — Un autre exemple où l'on peut appliquer une méthode analogue. Trouvons dans le plan les transformations

$$X_1 = f_1(x_1, x_2) \quad X_2 = f_2(x_1, x_2) \quad (1)$$

qui conservent l'aire de tous les triangles, soit infinitésimaux ou *même finis*.

L'équation fonctionnelle qu'il faut intégrer est:

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & 1 \\ Y_1 & Y_2 & 1 \\ Z_1 & Z_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{vmatrix} \quad (2)$$

où

$$X_1, X_2; \quad Y_1, Y_2; \quad Z_1, Z_2$$

sont les homologues des points

$$x_1, x_2; \quad y_1, y_2; \quad z_1, z_2.$$

En vertu de la continuité et de la biunivocité, au point

$$z_1 = z_2 = 0$$

lui correspondra un point unique

$$Z_1 = a \quad Z_2 = b .$$

Soit maintenant le point

$$z_1 = \alpha ; \quad z_2 = \beta$$

qui après la transformation (1) devient

$$Z_1 = Z_2 = 0 .$$

L'équation (2) prend successivement les formes suivantes:

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & 1 \\ Y_1 & Y_2 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (3)$$

et

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & 1 \\ Y_1 & Y_2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \end{vmatrix} . \quad (4)$$

Développant les déterminants (3) et (4) on obtiendra:

$$\begin{aligned} (X_1 - a)(Y_1 - b) - (X_2 - b)(Y_1 - a) &= x_1y_2 - x_2y_1 \\ X_1Y_2 - Y_1X_2 &= (x_1 - \alpha)(y_2 - \beta) - (x_2 - \beta)(y_1 - \alpha) \end{aligned} \quad (5)$$

et par soustraction

$$-b(X_1 - Y_1) + a(X_2 - Y_2) = \beta(x_1 - y_1) - \alpha(x_2 - y_2) . \quad (6)$$

Si les points du milieu primitif

$$0, 0 ; \quad \alpha, \beta , \quad y_1, y_2$$

sont colinéaires, alors leurs transformés le sont aussi. Donc l'égalité

$$\alpha y_2 - \beta y_1 = 0$$

entraîne

$$aY_2 - bY_1 = 0$$

et la relation (6) devient

$$-bX_1 + aX_2 = \beta x_1 - \alpha x_2 . \quad (7)$$

Considérant dans le milieu transformé la droite qui joint les points

$$(0 \ 0) \quad (a, b)$$

comme axe  $OX_2$ ; (7) devient

$$\bar{X}_1 = \bar{A}_1 x_1 + \bar{B}_1 x_2 \quad (8)$$

où

$$\bar{A}_1 = -\frac{\beta}{b} \quad \bar{B}_1 = +\frac{\alpha}{b},$$

et de même

$$\bar{X}_2 = \bar{A}_2 x_1 + \bar{B}_2 x_2. \quad (9)$$

Comme le passage du système  $X_1, X_2$  au système  $\bar{X}_1, \bar{X}_2$  se fait par des formules linéaires, les expressions des  $X_1$  et  $X_2$  seront de la forme suivante:

$$X_1 = k_1 + A_1 x_1 + B_1 x_2; \quad X_2 = k_2 + A_2 x_1 + B_2 x_2. \quad (10)$$

En remplaçant dans l'équation (2) les points

$$X_1 X_2, \quad Y_1 Y_2, \quad Z_1 Z_2$$

par les valeurs (10), on obtient facilement

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 1.$$

4. — Si au lieu de la conservation de l'aire on avait imposé à la transformation (1) la conservation des angles (similitude), on serait arrivé par une méthode analogue aux mêmes formules de transformation (10) mais dans lesquelles

$$A_1 = B_2 \quad A_2 + B_1 = 0.$$

Bucarest, décembre 1928.