Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 28 (1929)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES TRANSFORMATIONS LINÉAIRES

Autor: Teodoriu, Luca

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-22603

Il est possible d'ailleurs que beaucoup de ces relations soient connues depuis longtemps, mais, à notre connaissance celle-ci est la manière la plus simple et à la fois la plus générale de les obtenir toutes de proche en proche et nous croyons qu'elle constitue un excellent exercice pour les débutants de l'Analyse. C'est à eux que nous avons pensé en écrivant ces lignes.

Bucarest, 13 septembre 1929.

SUR LES TRANSFORMATIONS LINÉAIRES

PAR

Luca TEODORIU (Bucarest).

---

1. — Lorsqu'un milieu continu se déplace et se déforme d'une manière continue, on sait que ses éléments obéissent à certaines lois géométriques qui résultent de la continuité et de l'existence des dérivées [1]. Mais l'hypothèse d'existence des dérivées est quelquefois superflue dans beaucoup de problèmes relatifs à la question citée. Le but de cette note est de donner seulement quelques exemples simples à l'appui de cette affirmation.

2. — Soient

$$X_i = f_i(x_1, x_2, x_3) \qquad i = 1, 2, 3 \tag{1}$$

les formules de transformation qui donnent à l'instant t les coordonnées d'un point X, l'homologue dans le milieu transformé d'un point x, du milieu primitif.

Les fonctions X_i sont uniformes et continues dans l'intérieur du milieu primitif et inversement x_i sont des fonctions uniformes et continues des X_i dans le milieu transformé.

---

[1] Voir le mémoire de M. COSSERAT dans les *Annales de la Faculté de Toulouse*, tome X.

Supposons qu'il s'agit de trouver les fonctions f_i qui permettent d'amener le milieu de l'état primitif à l'état transformé par un déplacement d'ensemble, ce qui revient d'avoir une déformation nulle.

Ce problème se réduit à l'intégration de l'équation fonctionnelle (qui exprime la rigidité):

$$(X_1 - Y_1)^2 + (X_2 - Y_2)^2 + (X_3 - Y_3)^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 \qquad (2)$$

où

$$X_1 , X_2 , X_3 \qquad \text{et} \qquad Y_1 Y_2 Y_3$$

sont les homologues des deux points arbitraires

$$x_1 , x_2 , x_3 \qquad \text{et} \qquad y_1 , y_2 , y_3 .$$

La solution est connue.

Les X_i sont des fonctions linéaires et orthogonales des x_i; mais pour intégrer l'équation (2) on introduit dans toutes les démonstrations que je connais, une nouvelle restriction:

Les fonctions f_i admettent des dérivées partielles de premier et de second ordre [1].

Je dis que cette restriction est inutile.

Traitons la question directement dans l'espace à n dimensions.

L'équation (2) devient:

$$\Sigma (X_e - Y_e)^2 = \Sigma (x_i - y_i)^2 \qquad i, e = 1, 2 \dots n \qquad (3)$$

Je maintiens seulement l'hypothèse de la continuité et de la biunivocité. Au point:

$$y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0 \qquad (4)$$

correspondra après la transformation

$$X_i = f_i(x_1 . x_2 \dots , x_n) \qquad i = 1, 2 \dots n \qquad (5)$$

le point:

$$Y_1 = a_1 \quad Y_2 = a_2 \dots Y_n = a_n \qquad (6)$$

[1] E. Borel, *Introduction géométrique à quelques théories physiques*, 1914, chapitre 1.

et l'équation (3) devient:

$$(X_1 - a_1)^2 + \dots + (X_n - a_n)^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \,. \tag{7}$$

Soit le point:

$$y_1 = \alpha_1 \qquad y_2 = \alpha_2 \dots y_n = \alpha_n \tag{8}$$

qui devient après la transformation (5):

$$Y_1 = Y_2 = \dots Y_n = 0 \,. \tag{9}$$

La relation (3) devient:

$$X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 = (x_1 - \alpha_1)^2 + (x_2 - \alpha_2)^2 + \dots + (x_n - \alpha_n)^2 \,. \tag{10}$$

Par soustraction on obtient de (7) et (10)

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 - 2(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n) = \\ 2(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) - \\ (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2) \,. \end{aligned} \tag{11}$$

Mais on déduit de (3)

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 = r^2 \tag{12}$$

égalité qui exprime que la distance r du point

$$a_1 \quad a_2 \,, \dots , \, a_n$$

à l'origine se conserve après la transformation (5).

Simplifiant avec (2) et ayant en vue (12)

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n = r^2 - \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 - \dots - \alpha_n x_n \,. \tag{13}$$

Maintenant il suffit de supposer que je choisisse dans le milieu transformé pour axe OX_i la droite qui joint les points

$$(O \,, O \,, \dots O) \qquad \text{et} \qquad (a_1 \,, a_2 \,, \dots a_n)$$

ce qui revient à considérer

$$a_1 = 0 \qquad a_2 = 0 \dots a_n = 0 \qquad a_i \neq 0$$

et (13) devient:

$$\overline{X}_i = \overline{K}_i + \overline{A}_{i.1} x_1 + \overline{A}_{i.2} x_2 + \ldots + \overline{A}_{in} x_n \tag{14}$$

où j'ai mis:

$$\overline{K}_i = \frac{r^2}{a_i} ; \quad \overline{A}_{i,1} = -\frac{\alpha_1}{a_i} ; \quad \overline{A}_{i,2} = -\frac{\alpha_2}{a_i} ; \ldots ; \quad \overline{A}_{in} = -\frac{\alpha_n}{a_i} .$$

Comme les X_i sont des fonctions linéaires des $\overline{X}_i$ (ayant en vue les formules de changement d'axes) on obtient de (14) pour les X_i:

$$X_i = K_i + A_{i.1} x_1 + A_{i.2} x_2 + \ldots + A_{in} x_n \qquad i = 1 . 2 , \ldots n . \tag{15}$$

Enfin, en remplaçant les valeurs des X_i dans l'égalité (7) et en identifiant on obtient:

$$\sum A_{ik}^2 = 1 \qquad \sum A_{ik} A_{ij} = 0 .$$

3. — Un autre exemple où l'on peut appliquer une méthode analogue. Trouvons dans le plan les transformations

$$X_1 = f_1(x_1 , x_2) \qquad X_2 = f_2(x_1 , x_2) \tag{1}$$

qui conservent l'aire de tous les triangles, soit infinitésimaux ou *même finis*.

L'équation fonctionnelle qu'il faut intégrer est:

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & 1 \\ Y_1 & Y_2 & 1 \\ Z_1 & Z_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{vmatrix} \tag{2}$$

où

$$X_1 , X_2 ; \qquad Y_1 , Y_2 ; \qquad Z_1 , Z_2$$

sont les homologues des points

$$x_1 , x_2 ; \qquad y_1 , y_2 ; \qquad z_1 , z_2 .$$

En vertu de la continuité et de la biunivocité, au point

$$z_1 = z_2 = 0$$

lui correspondra un point unique

$$Z_1 = a \qquad Z_2 = b \ .$$

Soit maintenant le point

$$z_1 = \alpha \ ; \qquad z_2 = \beta$$

qui après la transformation (1) devient

$$Z_1 = Z_2 = 0 \ .$$

L'équation (2) prend successivement les formes suivantes:

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & 1 \\ Y_1 & Y_2 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad (3)$$

et

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & 1 \\ Y_1 & Y_2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \end{vmatrix} \ . \qquad (4)$$

Développant les déterminants (3) et (4) on obtiendra:

$$\begin{aligned} (X_1 - a)(Y_1 - b) - (X_2 - b)(Y_1 - a) &= x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ X_1 Y_2 - Y_1 X_2 &= (x_1 - \alpha)(y_2 - \beta) - (x_2 - \beta)(y_1 - \alpha) \end{aligned} \qquad (5)$$

et par soustraction

$$- b(X_1 - Y_1) + a(X_2 - Y_2) = \beta(x_1 - y_1) - \alpha(x_2 - y_2) \ . \qquad (6)$$

Si les points du milieu primitif

$$0\ ,\ 0\ ; \qquad \alpha\ ,\ \beta\ , \qquad y_1\ ,\ y_2$$

sont colinéaires, alors leurs transformés le sont aussi. Donc l'égalité

$$\alpha y_2 - \beta y_1 = 0$$

entraîne

$$a Y_2 - b Y_1 = 0$$

et la relation (6) devient

$$- b X_1 + a X_2 = \beta x_1 - \alpha x_2 \ . \qquad (7)$$

Considérant dans le milieu transformé la droite qui joint les points

$$(0 \quad 0) \qquad (a\,,\ b)$$

comme axe OX_2; (7) devient

$$\overline{X}_1 = \overline{A}_1 x_1 + \overline{B}_1 x_2 \tag{8}$$

où

$$\overline{A}_1 = -\frac{\beta}{b} \qquad \overline{B}_1 = +\frac{\alpha}{b}\,,$$

et de même

$$\overline{X}_2 = \overline{A}_2 x_1 + \overline{B}_2 x_2\,. \tag{9}$$

Comme le passage du système X_1, X_2 au système $\overline{X_1}$, $\overline{X}_2$ se fait par des formules linéaires, les expressions des X_1 et X_2 seront de la forme suivante:

$$X_1 = k_1 + A_1 x_1 + B_1 x_2\ ; \qquad X_2 = k_2 + A_2 x_1 + B_2 x_2\,. \tag{10}$$

En remplaçant dans l'équation (2) les points

$$X_1 X_2\,, \qquad Y_1 Y_2\,, \qquad Z_1 Z_2$$

par les valeurs (10), on obtient facilement

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 1\,.$$

4. — Si au lieu de la conservation de l'aire on avait imposé à la transformation (1) la conservation des angles (similitude), on serait arrivé par une méthode analogue aux mêmes formules de transformation (10) mais dans lesquelles

$$A_1 = B_2 \qquad A_2 + B_1 = 0\,.$$

Bucarest, décembre 1928.