Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 28 (1929)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR L'EMPLOI D'UNE TROISIÈME COORDONNÉE EN THÉORIE

DES SURFACES

Autor: Becqué, J.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-22599

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR L'EMPLOI D'UNE TROISIÈME COORDONNÉE EN THÉORIE DES SURFACES

PAR

J. Becqué (Carcassonne).

Aux coordonnées curvilignes u_1 , u_2 , sur une surface S, on est conduit à adjoindre une troisième, u_3 , par suite de l'emploi du trièdre tangent en un point M, défini par

$$M_1 = \frac{\delta M}{\delta u_1}$$
, $M_2 = \frac{\delta M}{\delta u_2}$, $M_3 = \frac{\delta M}{\delta u_1} \wedge \frac{\delta M}{\delta u_2}$;

S étant considérée comme surface coordonnée des u_1 , u_2 , on a $u_3=\cos^{te}$ sur S, mais ne nous occupant que de S et non de la famille des surfaces coordonnées nous pouvons définir u_3 par

$$\frac{\partial M}{\partial u_3} = M_3 = \frac{\partial M}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial M}{\partial u_2}.$$

On est alors amené à chercher la signification des dérivées partielles en u_3 des éléments les plus simples; on trouve ainsi que les coefficients de la deuxième forme fondamentale sont, au facteur $-\frac{1}{2}$ près, les dérivées partielles, en u_3 , des coefficients correspondants du ds², que la courbure moyenne est, au facteur $\frac{1}{2}$ près, la dérivée partielle en u_3 de $\frac{1}{H}$. L'emploi des trois coordonnées donne aussi une interprétation remarquable des symboles de Christoffel.

I. — On sait que

$$E = \left(\frac{\delta M}{\delta u_{1}}\right)^{2}, \quad F = \frac{\delta M}{\delta u_{1}} \times \frac{\delta M}{\delta u_{2}}, \quad G = \left(\frac{\delta M}{\delta u_{2}}\right)^{2};$$

$$D = \frac{\delta^{2} M}{\delta u_{1}^{2}} \times \left(\frac{\delta M}{\delta u_{1}} \wedge \frac{\delta M}{\delta u_{2}}\right), \quad D' = \frac{\delta^{2} M}{\delta u_{1} \delta u_{2}} \times \left(\frac{\delta M}{\delta u_{1}} \wedge \frac{\delta M}{\delta u_{2}}\right),$$

$$D'' = \frac{\delta^{2} M}{\delta u_{2}^{2}} \times \left(\frac{\delta M}{\delta u_{1}} \wedge \frac{\delta M}{\delta u_{2}}\right).$$

Posons, pour abréger

$$\mathbf{M}_i = \frac{\eth\,\mathbf{M}}{\eth\,u_i}\;, \qquad \mathbf{M}_{ij} = \frac{\eth^2\,\mathbf{M}}{\eth\,u_i\;\eth\,u_j}\;, \qquad g_{\mu\nu} = \,\mathbf{M}_{\mu} \times \,\mathbf{M}_{\nu}\;, \qquad (g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu})\;\;.$$

En vertu de la commutativité des dérivations partielles

$$\mathbf{M}_{ij} = \frac{\delta \mathbf{M}_i}{\delta u_i} = \frac{\delta \mathbf{M}_j}{\delta u_i} = \mathbf{M}_{ji} ; \qquad (1)$$

donc

$$\begin{split} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial u_3} &= \left(\frac{\partial}{\partial u_3} M_{\mu}\right) \times M_{\nu} + M_{\mu} \times \frac{\partial}{\partial u_3} M_{\nu} = M_{\nu} \times \frac{\partial}{\partial u_{\mu}} M_3 + M_{\mu} \times \frac{\partial}{\partial u_{\nu}} M_3 , \\ &= M_{\nu} \times \frac{\partial}{\partial u_{\mu}} \left(M_1 \wedge M_2\right) + M_{\mu} \times \frac{\partial}{\partial u_{\nu}} \left(M_1 \wedge M_2\right) , \\ &= M_{\nu} \times M_{1\mu} \wedge M_2 + M_{\mu} \times M_{1\nu} \wedge M_2 + M_{\nu} \times M_1 \wedge M_{2\mu} \\ &+ M_{\mu} \times M_1 \wedge M_{2\nu} , \\ &= - \left(M_{1\mu} \times M_{\nu} \wedge M_2 + M_{1\nu} \times M_{\mu} \wedge M_2 + M_{2\mu} \times M_1 \wedge M_{\nu} + M_{1\nu} \times M_1 \wedge M_{\mu}\right) . \end{split}$$

En observant que

$$g_{11} = E$$
, $g_{12} = g_{21} = F$, $g_{22} = G$

on a
$$-\frac{1}{2}\frac{\delta E}{\delta u_3} = D \ , \qquad -\frac{1}{2}\frac{\delta F}{\delta u_3} = D' \ , \qquad -\frac{1}{2}\frac{\delta G}{\delta u_3} = D'' \ .$$

II. — Ayant:

b)

a)
$$g_{33} = \overline{M}_3^2 = (M_1 \wedge M_2) \times (M_1 \wedge M_2) = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$$
, donc
$$H = \sqrt{\overline{EG - F^2}} = \sqrt{g_{33}}$$
,

$$a \wedge (b \wedge c) = (a \times c) b - (a \times b) c$$
;

L'Enseignement mathém., 28° année; 1929.

c) La courbure moyenne en M a pour valeur

$$ho_m = rac{1}{2} \Big(rac{1}{\mathrm{R_1}} + rac{1}{\mathrm{R_2}} \Big) = rac{\mathrm{ED''} + \mathrm{GD} - 2\mathrm{FD'}}{2\mathrm{H}^3} \; ,$$
 $\mathrm{M}_i imes \mathrm{M}_3 = 0 \qquad \mathrm{si} \qquad i = 1, \ 2 \; .$

Done

d)

$$M_i \times \frac{\delta M_3}{\delta u_\alpha} = -M_3 \times \frac{\delta M_i}{\delta u_\alpha} = -M_3 \times M_{i\alpha} = -M_{i\alpha} \times (M_1 \wedge M_2)$$
,

et par suite

$$\begin{split} & \mathbf{M_1} \times \mathbf{M_{13}} = -\ \mathbf{M_{11}} \times (\mathbf{M_1} \ \wedge \ \mathbf{M_2}) = -\ \mathbf{D} \\ & \mathbf{M_1} \times \mathbf{M_{23}} = \mathbf{M_2} \times \mathbf{M_{13}} = -\ \mathbf{M_{12}} \times (\mathbf{M_1} \ \wedge \ \mathbf{M_2}) = -\ \mathbf{D'} \\ & \mathbf{M_2} \times \mathbf{M_{23}} = -\ \mathbf{M_{22}} \times (\mathbf{M_1} \ \wedge \ \mathbf{M_2}) = -\ \mathbf{D''} \ . \end{split}$$

On trouve alors

$$\begin{split} \frac{\partial g_{33}}{\partial u_3} &= -\,\, 2\, (M_{13} \times M_3 \, \wedge \, M_2 \, + \, M_{23} \times M_1 \, \wedge \, M_3) \,\,, \\ - \, \frac{1}{2} \frac{\partial g_{33}}{\partial u_3} &= M_{13} [(M_2 \times M_1) \, M_2 - (M_2 \times M_2) \, M_1] \\ &\quad + \, M_{23} [(M_1 \times M_2) \, M_1 - (M_1 \times M_1) \, M_2] \,\,, \\ &= g_{12} \, (M_2 \times M_{13} + M_1 \times M_{23}) - g_{11} \, M_2 \times M_{23} - g_{22} \, M_1 \times M_{13} \,\,, \\ &= -\, 2 \, F \, D' \, + \, E \, D'' \, + \, G \, D \, \equiv \, 2 \, H^3 \, \rho_m \,\,, \end{split}$$

donc

$$ho_m = -rac{1}{2\mathrm{H}^2}rac{\delta\mathrm{H}}{\delta\mathit{u_3}} = rac{1}{2}rac{\delta}{\delta\mathit{u_3}}rac{1}{\mathrm{H}}$$
 .

III. — Soit T* (M^1 , M^2 , M^3) le trièdre supplémentaire du trièdre tangent T (M_1 , M_2 , M_3).

Posant

$$g^{\mu\nu}=M^{\mu} imes M^{\nu}$$
, on a $M_{\mu}=g_{\mu\nu}M^{\nu}$, $M^{\mu}=g^{\mu\nu}M_{\nu}$, $M^{\mu} imes g^{\mu\nu}M_{\nu}$, $M^{\mu} imes g^{\mu\alpha}g_{\nu\alpha}=egin{cases} 0 & \mu
ot=
u &
ot$

Introduisons les symboles à 3 indices de Christoffel (écrits suivant la notation de M. R. Lagrange).

Les symboles de première espèce sont

$$\begin{split} \begin{bmatrix} \alpha \\ \mu \nu \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\delta g_{\nu\alpha}}{\delta u_{\mu}} + \frac{\delta g_{\alpha\mu}}{\delta u_{\nu}} - \frac{\delta g_{\mu\nu}}{\delta u_{\alpha}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(M_{\nu} \times M_{\alpha\mu} + M_{\nu\mu} \times M_{\alpha} + M_{\alpha} \times M_{\mu\nu} + M_{\alpha\nu} \times M_{\mu} \\ &- M_{\mu} \times M_{\nu\alpha} - M_{\mu\alpha} \times M_{\nu} \right) \end{split}$$

d'où, compte tenu de (1),

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{bmatrix} = M_{\alpha} \times M_{\mu\nu} .$$

Ce sont les projections de $M_{\mu\nu}$ sur T, ou composantes sur T*. Les symboles de seconde espèce sont

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu \nu \end{matrix} \right\} = g^{\alpha \epsilon} {\left[\begin{matrix} \epsilon \\ \mu \nu \end{matrix} \right]} \; , \label{eq:spectrum}$$

Multipliant scalairement $M^{\alpha}=g^{\alpha\epsilon}M_{\epsilon}$ par $M_{\mu\nu}$, on a:

Ce sont les composantes de $M_{\mu\nu}$ sur T, ou projections sur T*. On a alors des expressions simples pour d^2M , dans lesquelles on tiendra compte de $du_3=0$ sur S,

$$d^2\,\mathrm{M}\,=\,d^2\,u_\mu\,.\,\mathrm{M}_\mu\,+\,du_\mu\,du_\nu\,.\,\mathrm{M}_{\mu\nu}$$
 , ayant $d\mathrm{M}\,=\,du_\mu\,.\,\mathrm{M}_\mu$,

ou, mettant en évidence les composantes sur T:

$$\label{eq:defM} \textit{d}^{\,2}M \,=\, (\textit{d}^{\,2}M \,\times\, M^{\,\epsilon}) \;.\; M_{\,\epsilon} \,=\, \left(\textit{d}^{\,2}\textit{u}_{\,\epsilon} \,+\, \left\{ \begin{smallmatrix} \epsilon \\ \mu \,\nu \end{smallmatrix} \right\} \textit{d}\textit{u}_{\,\mu}\,\textit{d}\textit{u}_{\,\nu} \right) .\; M_{\,\epsilon} \;\;.$$

Une application est l'obtention des équations des géodésiques: d^2M devant être normal à S doit être orthogonal à M_1 et M_2 , d'où

$$d^2u_{\varepsilon}+\left\{egin{array}{c} \varepsilon \ \mu
u\end{array}
ight\}du_{\mu}du_{\nu}=0\;,\qquad \varepsilon=1,\,2\;.$$