Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 28 (1929)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR L'EMPLOI D'UNE TROISIÈME COORDONNÉE EN THÉORIE DES SURFACES

Autor: Becqué, J.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-22599

SUR L'EMPLOI D'UNE TROISIÈME COORDONNÉE EN THÉORIE DES SURFACES

PAR

J. Becqué (Carcassonne).

Aux coordonnées curvilignes u_1, u_2, sur une surface S, on est conduit à adjoindre une troisième, u_3, par suite de l'emploi du trièdre tangent en un point M, défini par

$$M_1 = \frac{\partial M}{\partial u_1}, \qquad M_2 = \frac{\partial M}{\partial u_2}, \qquad M_3 = \frac{\partial M}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial M}{\partial u_2};$$

S étant considérée comme surface coordonnée des u_1, u_2, on a $u_3 = \text{cons}^{\text{te}}$ sur S, mais ne nous occupant que de S et non de la famille des surfaces coordonnées nous pouvons définir u_3 par

$$\frac{\partial M}{\partial u_3} = M_3 = \frac{\partial M}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial M}{\partial u_2}.$$

On est alors amené à chercher la signification des dérivées partielles en u_3 des éléments les plus simples; on trouve ainsi que *les coefficients de la deuxième forme fondamentale sont, au facteur* $-\frac{1}{2}$ *près, les dérivées partielles, en* u_3, *des coefficients correspondants du* ds^2, *que la courbure moyenne est, au facteur* $\frac{1}{2}$ *près, la dérivée partielle en* u_3 *de* $\frac{1}{H}$. L'emploi des trois coordonnées donne aussi une interprétation remarquable des symboles de Christoffel.

I. — On sait que

$$E = \left(\frac{\partial M}{\partial u_1}\right)^2, \qquad F = \frac{\partial M}{\partial u_1} \times \frac{\partial M}{\partial u_2}, \qquad G = \left(\frac{\partial M}{\partial u_2}\right)^2;$$

$$D = \frac{\partial^2 M}{\partial u_1^2} \times \left(\frac{\partial M}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial M}{\partial u_2}\right), \qquad D' = \frac{\partial^2 M}{\partial u_1\, \partial u_2} \times \left(\frac{\partial M}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial M}{\partial u_2}\right),$$

$$D'' = \frac{\partial^2 M}{\partial u_2^2} \times \left(\frac{\partial M}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial M}{\partial u_2}\right).$$

Posons, pour abréger

$$M_i = \frac{\partial M}{\partial u_i}, \qquad M_{ij} = \frac{\partial^2 M}{\partial u_i\, \partial u_j}, \qquad g_{\mu\nu} = M_\mu \times M_\nu, \qquad (g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}).$$

En vertu de la commutativité des dérivations partielles

$$M_{ij} = \frac{\partial M_i}{\partial u_j} = \frac{\partial M_j}{\partial u_i} = M_{ji}; \tag{1}$$

donc

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial u_3} = \left(\frac{\partial}{\partial u_3} M_\mu\right) \times M_\nu + M_\mu \times \frac{\partial}{\partial u_3} M_\nu = M_\nu \times \frac{\partial}{\partial u_\mu} M_3 + M_\mu \times \frac{\partial}{\partial u_\nu} M_3,$$

$$= M_\nu \times \frac{\partial}{\partial u_\mu} (M_1 \wedge M_2) + M_\mu \times \frac{\partial}{\partial u_\nu} (M_1 \wedge M_2),$$

$$= M_\nu \times M_{1\mu} \wedge M_2 + M_\mu \times M_{1\nu} \wedge M_2 + M_\nu \times M_1 \wedge M_{2\mu}$$
$$+ M_\mu \times M_1 \wedge M_{2\nu},$$

$$= -(M_{1\mu} \times M_\nu \wedge M_2 + M_{1\nu} \times M_\mu \wedge M_2 + M_{2\mu} \times M_1 \wedge M_\nu$$
$$+ M_{1\nu} \times M_1 \wedge M_\mu).$$

En observant que

$$g_{11} = E, \qquad g_{12} = g_{21} = F, \qquad g_{22} = G$$

on a

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u_3} = D, \qquad -\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial u_3} = D', \qquad -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u_3} = D''.$$

II. — Ayant:

a) $$g_{33} = \overline{M}_3^2 = (M_1 \wedge M_2) \times (M_1 \wedge M_2) = g_{11} g_{22} - g_{12}^2,$$

donc

$$H = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{g_{33}},$$

b) $$a \wedge (b \wedge c) = (a \times c)\, b - (a \times b)\, c;$$

c) La courbure moyenne en M a pour valeur

$$\rho_m = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{ED'' + GD - 2FD'}{2H^3},$$

d) $$M_i \times M_3 = 0 \qquad \text{si} \qquad i = 1, 2 .$$

Donc

$$M_i \times \frac{\partial M_3}{\partial u_\alpha} = - M_3 \times \frac{\partial M_i}{\partial u_\alpha} = - M_3 \times M_{i\alpha} = - M_{i\alpha} \times (M_1 \wedge M_2),$$

et par suite

$$\begin{aligned} M_1 \times M_{13} &= - M_{11} \times (M_1 \wedge M_2) = - D \\ M_1 \times M_{23} &= M_2 \times M_{13} = - M_{12} \times (M_1 \wedge M_2) = - D' \\ M_2 \times M_{23} &= - M_{22} \times (M_1 \wedge M_2) = - D'' . \end{aligned}$$

On trouve alors

$$\frac{\partial g_{33}}{\partial u_3} = - 2(M_{13} \times M_3 \wedge M_2 + M_{23} \times M_1 \wedge M_3),$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial u_3} &= M_{13}[(M_2 \times M_1)M_2 - (M_2 \times M_2)M_1] \\ &\quad + M_{23}[(M_1 \times M_2)M_1 - (M_1 \times M_1)M_2], \\ &= g_{12}(M_2 \times M_{13} + M_1 \times M_{23}) - g_{11}M_2 \times M_{23} - g_{22}M_1 \times M_{13}, \\ &= -2FD' + ED'' + GD = 2H^3\rho_m, \end{aligned}$$

donc

$$\rho_m = - \frac{1}{2H^2}\frac{\partial H}{\partial u_3} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u_3}\frac{1}{H}.$$

III. — Soit T^* (M^1, M^2, M^3) le trièdre supplémentaire du trièdre tangent T (M_1, M_2, M_3).

Posant

$$g^{\mu\nu} = M^\mu \times M^\nu, \qquad \text{on a} \qquad M_\mu = g_{\mu\nu}M^\nu, \; M^\mu = g^{\mu\nu}M_\nu,$$

$$M^\mu \times M_\nu = g^{\mu\alpha}g_{\nu\alpha} = \begin{cases} 0 & \mu \neq \nu, \\ 1 & \mu = \nu . \end{cases}$$

Introduisons les symboles à 3 indices de Christoffel (écrits suivant la notation de M. R. Lagrange).

Les symboles de première espèce sont

$$\begin{bmatrix}\alpha\\ \mu\nu\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial u_\mu} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial u_\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial u_\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\mathrm{M}_\nu \times \mathrm{M}_{\alpha\mu} + \mathrm{M}_{\nu\mu} \times \mathrm{M}_\alpha + \mathrm{M}_\alpha \times \mathrm{M}_{\mu\nu} + \mathrm{M}_{\alpha\nu} \times \mathrm{M}_\mu - \mathrm{M}_\mu \times \mathrm{M}_{\nu\alpha} - \mathrm{M}_{\mu\alpha} \times \mathrm{M}_\nu)$$

d'où, compte tenu de (1),

$$\begin{bmatrix}\alpha\\ \mu\nu\end{bmatrix} = \mathrm{M}_\alpha \times \mathrm{M}_{\mu\nu} .$$

Ce sont les projections de $\mathrm{M}_{\mu\nu}$ sur T, ou composantes sur T*.

Les symboles de seconde espèce sont

$$\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\nu\end{Bmatrix} = g^{\alpha\varepsilon}\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \mu\nu\end{bmatrix} ,$$

Multipliant scalairement $\mathrm{M}^\alpha = g^{\alpha\varepsilon}\mathrm{M}_\varepsilon$ par $\mathrm{M}_{\mu\nu}$, on a:

$$\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\nu\end{Bmatrix} = \mathrm{M}^\alpha \times \mathrm{M}_{\mu\nu} .$$

Ce sont les composantes de $\mathrm{M}_{\mu\nu}$ sur T, ou projections sur T*.

On a alors des expressions simples pour $d^2\mathrm{M}$, dans lesquelles on tiendra compte de $du_3 = 0$ sur S,

$$d^2\mathrm{M} = d^2u_\mu \,.\, \mathrm{M}_\mu + du_\mu\, du_\nu \,.\, \mathrm{M}_{\mu\nu} , \qquad \text{ayant} \qquad d\mathrm{M} = du_\mu \,.\, \mathrm{M}_\mu ,$$

ou, mettant en évidence les composantes sur T:

$$d^2\mathrm{M} = (d^2\mathrm{M} \times \mathrm{M}^\varepsilon) \,.\, \mathrm{M}_\varepsilon = \left(d^2u_\varepsilon + \begin{Bmatrix}\varepsilon\\ \mu\nu\end{Bmatrix} du_\mu\, du_\nu\right) . \,\mathrm{M}_\varepsilon .$$

Une application est l'obtention des équations des géodésiques: $d^2\mathrm{M}$ devant être normal à S doit être orthogonal à M_1 et M_2, d'où

$$d^2u_\varepsilon + \begin{Bmatrix}\varepsilon\\ \mu\nu\end{Bmatrix} du_\mu\, du_\nu = 0 , \qquad \varepsilon = 1, 2 .$$