Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 28 (1929)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES OVALES DE DESCARTES
Autor: Dufour, M.
Kapitel: IV. — Applications a l'optique.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-22597

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

IV. — Applications a l'optique.

1. — *Ovales stigmatiques par rapport à deux points donnés.*

On sait depuis Descartes que la méridienne d'un *dioptre stigmatique* pour deux points donnés P et P′, situés dans deux milieux optiques d'indices respectifs 1 et n, est une ovale de Descartes dont ces points sont deux foyers [1].

On obtient l'équation de cette ovale en appliquant la *loi du tautochronisme*, c'est-à-dire en écrivant que le temps mis par la lumière pour aller dans le premier milieu du point P à un point I de l'ovale et du point I au point P′ dans le second milieu est une constante. Les rayons vecteurs ρ et ρ' étant positifs, on affectera ρ du signe + ou du signe — suivant que P sera un point lumineux réel ou virtuel; ρ' sera affecté du signe + ou du signe — suivant que P′ sera une image réelle ou virtuelle. Désignant par ρ_0 et ρ_0' les distances de P et P′ au point S où la méridienne rencontre l'axe PP′, nous écrivons la loi du tautochronisme sous la forme

$$\pm \rho \pm n\rho' = \pm \rho_0 \pm n\rho_0' .$$

Les deux points P et P′ étant donnés, il y a pour toute position de S une ovale stigmatique, qui suivant la distribution des points P, P′ et S peut être une ovale intérieure ou une ovale extérieure. D'après ce qui a été dit plus haut (I § 2 et III, § 1), nous pourrons reconnaître sa nature, savoir à quels foyers elle est rapportée et dire si au point S elle présente un maximum ou un minimum de courbure. Des considérations très simples vont nous fournir directement ce dernier renseignement dans le cas où P et P′ sont conjugués par rapport à un dioptre sphérique de sommet S.

Supposons que le dioptre sphérique tourne sa convexité du

---

[1] Un système optique est *stigmatique* pour deux points P et P′ si tous les rayons incidents venant de P ont pour conjugués des rayons passant par P′. Le système est *aplanétique* quand il est stigmatique pour les points infiniment voisins de P et P′, situés au voisinage de son axe dans deux plans perpendiculaires à l'axe.

côté d'où vient la lumière et que le second milieu est plus réfringent que le premier ($n > 1$). Nous avons à distinguer un certain nombre de cas.

1. P réel infiniment éloigné; P′ coïncide avec le foyer-image. L'ovale se réduit à une ellipse, présentant en S un *maximum* de courbure.

2. P réel plus éloigné de S que le foyer objet; P′ est réel (fig. 7). La condition du tautochronisme donne $\rho + n\rho' = k$.

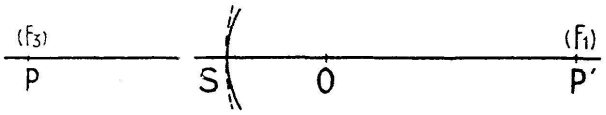

Fig. 7.

L'ovale, indiquée schématiquement en pointillé, est une *ovale intérieure* rapportée aux foyers F_3 et F_1 (voir le tableau, I § 2) et P′ ne peut correspondre à F_3 puisque l'on a $n > 1$ [1]. Donc P correspond à F_3 et P′ à F_1. Il y a un *maximum* de courbure en S.

3. P réel placé au foyer-objet; P′ est à l'infini. L'ovale devient une hyperbole. *Maximum* de courbure en S.

4. P réel et P′ virtuel (fig. 8), Nous avons

$$\rho - n\rho' = \rho_0 - n\rho'_0 < 0$$

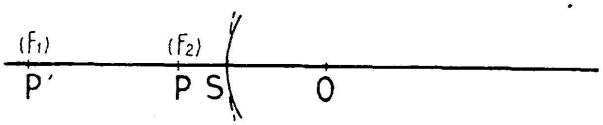

Fig. 8.

puisque $\rho'_0 > \rho_0$ et $n > 1$. Il s'agit d'une ovale *extérieure*. Comme en S elle tourne sa convexité vers les foyers P et P′, P′ correspond à F_1 et P à F_2. Il y a un *maximum* de courbure en S.

5. P et P′ coïncident avec S. L'ovale se réduit à un point.

6. P virtuel placé entre le sommet S et le centre de courbure O du dioptre sphérique; P′ est réel entre P et O (fig. 9). Nous avons

$$-\rho + n\rho' = -\rho_0 + n\rho'_0 > 0$$

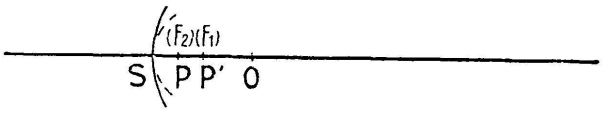

Fig. 9.

[1] P′ ne peut jamais correspondre à F_3, ni P à F_1.

puisque $\rho_0' > \rho_0$ et $n > 1$. C'est l'équation d'une ovale *extérieure*. La courbe tournant en S sa concavité vers P et P′, P′ correspond à F_1 et P à F_2. Il y a un *minimum* de courbure en S.

7. P et P′ coïncident avec 0. L'ovale se réduit au cercle méridien du dioptre puisque les foyers F_1 et F_2 viennent en coïncidence.

8. P virtuel au-delà de 0 et en deçà du point stigmatique objet du dioptre (fig. 10).

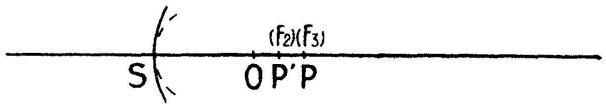

Fig. 10.

Si P est virtuel et placé au-delà de 0, P′ est réel et placé entre 0 et P. Nous avons

$$-\rho + n\rho' = -\rho_0 + n\rho_0' .$$

Quand P se déplace vers la droite à partir de 0, $-\rho_0 + n\rho_0'$ part de la valeur positive $(n - 1)$ SO et décroît pour s'annuler quand P atteint le point stigmatique objet. Nous reconnaissons l'équation d'une ovale *extérieure*. Il y a un *minimum* de courbure en S.

9. P virtuel placé au point stigmatique objet, P′ au point stigmatique image. Nous avons $-\rho + n\rho' = 0$. L'ovale se réduit au cercle méridien du dioptre sphérique.

10. P virtuel placé au-delà du point stigmatique objet; P′ est entre 0 et P (fig. 11). Nous avons

$$-\rho + n\rho' = -\rho_0 + n\rho_0' < 0 .$$

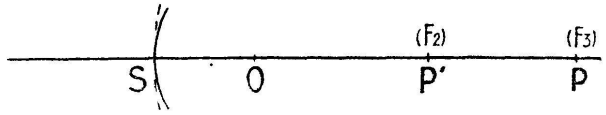

Fig. 11.

C'est l'équation d'une ovale *intérieure* rapportée aux foyers F_2 et F_3: F_2 est en P′, F_3 en P. Il y a un *maximum* de courbure en S.

On peut faire la même discussion si, n étant toujours plus grand que 1, le dioptre tourne sa concavité du côté d'où vient la lumière. Enfin, pour passer aux cas où on aurait $n < 1$, il suffirait d'appliquer le principe du retour inverse des rayons lumineux.

Ce mode de raisonnement s'applique aussi aux *miroirs stigmatiques* pour deux points donnés. Dans le cas de la réflexion ($n = -1$), l'ovale se réduit à une conique, dont la courbure aux sommets sur l'axe est toujours un *maximum*.

2. — *Aberration du dioptre sphérique.*

Pour les rayons centraux, l'action du dioptre sphérique est la même que celle du dioptre stigmatique ayant pour méridienne l'ovale dont le cercle osculateur en S coïncide avec le cercle 0. Si cette ovale présente en S un *maximum* de courbure (fig. 12), l'effet optique réalisé en chaque point I par la substitution du dioptre stigmatique au dioptre sphérique est celui que produirait en I l'adjonction au dioptre sphérique d'un prisme d'angle très petit à arête tournée vers l'axe. Ce prisme déviant les rayons vers sa base, nous en concluons que les rayons marginaux réfractés par le dioptre sphérique rencontrent l'axe en un point P'' plus rapproché du sommet S que le point P' où se croisent les rayons centraux. L'aberration est dite *sous-corrigée*. Si l'ovale présente en S un minimum de courbure (fig. 13), l'effet optique réalisé

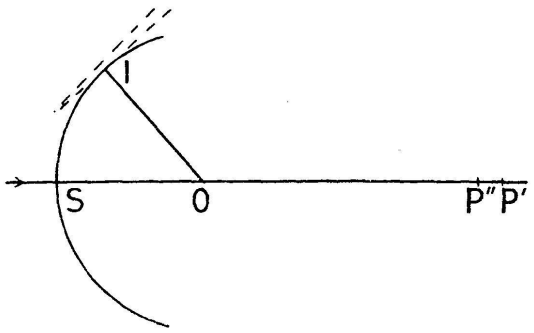

Fig. 12.

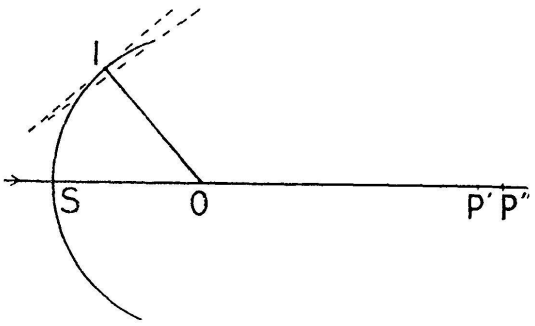

Fig. 13.

par la substitution du dioptre sphérique au dioptre stigmatique est celui que produirait en I l'adjonction au dioptre stigmatique d'un petit prisme à arête tournée vers l'axe: nous en concluons

que les rayons marginaux réfractés par le dioptre sphérique rencontrent l'axe en un point P'' plus éloigné de S que P'. L'aberration est dite *surcorrigée* [1].

D'après ce qui a été dit au paragraphe précédent, l'aberration du dioptre sphérique convexe et convergent est surcorrigée quand le point lumineux objet P se trouve entre le sommet du dioptre et son centre de courbure; quand P est extérieur à cet intervalle, l'aberration est souscorrigée. L'aberration du miroir sphérique garde toujours le même sens, quelle que soit la position du point-objet sur l'axe: elle est toujours souscorrigée pour le miroir sphérique concave et surcorrigée pour le miroir sphérique convexe.

3. — *Surface de l'onde réfractée de chemin optique nul dans le cas d'un dioptre sphérique et d'une onde incidente sphérique.*

L'ovale de Descartes se rencontre encore quand on cherche la surface de l'onde réfractée de chemin optique nul donnée par un dioptre sphérique, le point-objet A étant à distance finie [2].

---

[1] On peut, en précisant ces indications, calculer la valeur de l'aberration. Prenons sur l'ovale et sur son cercle osculateur au sommet deux points voisins situés à une même distance infiniment petite h de l'axe. Menons en ces points les normales à l'ovale et au cercle. Les angles γ et γ_0 qu'elles font respectivement avec l'axe sont des infiniment petits; leur différence $\psi = |\gamma - \gamma_0|$ est l'angle du petit prisme additionnel. Pour avoir γ, nous utilisons l'expression de $tg\,\gamma$ donnée dans la deuxième partie de cette note, en développant les sinus et cosinus en série jusqu'au troisième ordre inclusivement et tenant compte de la relation qui existe entre les distances de deux points conjugués au sommet d'un dioptre sphérique d'indice n et de rayon R. Nous trouvons

$$\psi = \frac{n+1}{2n^2} i^2 \omega ,$$

ω étant l'angle du rayon incident avec la droite joignant le point d'incidence au point stigmatique objet du dioptre sphérique. La déviation imprimée par ce primse d'angle ψ au rayon réfracté est

$$\delta = (n-1)\psi = \frac{n^2-1}{2n^2} i^2 \omega .$$

Le déplacement correspondant du point d'intersection de ce rayon avec l'axe est δ.IP': sin φ'. Comme δ est du troisième ordre infinitésimal et φ' du premier ordre, nous pouvons remplacer sin φ' par la partie principale de φ', c'est-à-dire par h: SP', et IP' par SP' qui lui est égal à un infiniment petit du second ordre près. Donc

$$P'P'' = \delta \cdot \frac{\overline{SP'}^2}{h} = \frac{n^2-1}{2n^2} \cdot \frac{\overline{SP'}^2}{h} \cdot i^2 \omega .$$

[2] Si le point-objet est à l'infini, la surface d'onde réfractée de chemin nul est rejetée à l'infini.

Soient O le centre de courbure du dioptre, AI un rayon incident quelconque, OI la normale (fig. 14 et 15). La circonférence menée

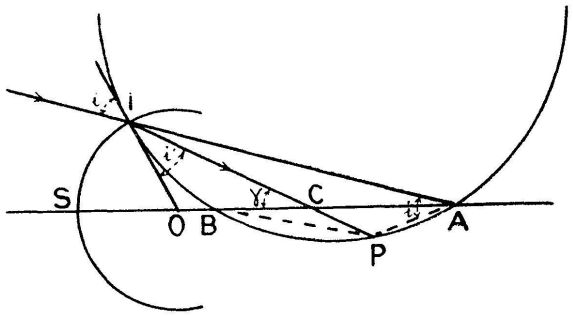

Fig. 14.

par A et I et tangente à OI coupe la droite OA en un point fixe B et $OB.OA = OI^2$. Soient P le second point où le rayon réfracté IP

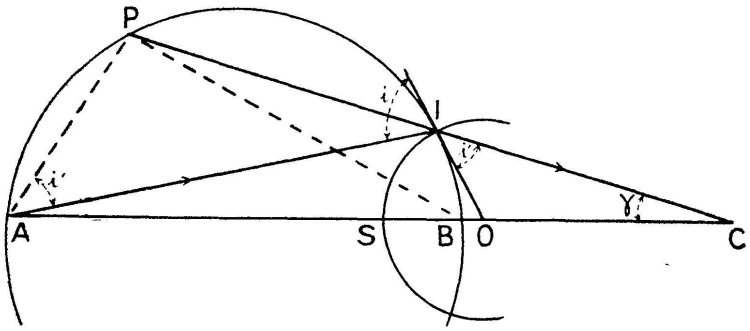

Fig. 15.

coupe la circonférence AIB, et C l'intersection de OA et de IP. Le triangle AIP nous donne

$$\frac{PI}{AI} = \frac{\sin i'}{\sin i} = \frac{1}{n}.$$

Les temps employés par la lumière pour aller de A à I dans le premier milieu et de P à I dans le second milieu sont égaux. Le lieu du point P est la méridienne de la surface d'onde réfractée de chemin optique nul. Nous avons, dans les triangles PAC et PBC,

$$\frac{PA}{CA} = \frac{\sin \gamma}{\sin APC} \quad \text{et} \quad \frac{PB}{CB} = \frac{\sin \gamma}{\sin BPC}.$$

D'où

$$\frac{CB}{CA} = \frac{\sin BPC}{\sin APC} \cdot \frac{PB}{PA} \quad \text{ou} \quad \frac{CB}{CA} = \frac{\sin BAI}{\sin ABI} \cdot \frac{PB}{PA}.$$

Le triangle AIB donne

$$\frac{\sin BAI}{\sin ABI} = \frac{BI}{AI}.$$

Donc

$$\frac{CB}{CA} = \frac{BI}{AI} \cdot \frac{PB}{PA} = \frac{SB}{SA} \cdot \frac{PB}{PA} \qquad \text{ou} \qquad \frac{CB}{CA} = \frac{R - R^2 : a}{a} \frac{PB}{PA}.$$

D'après ce que nous avons vu plus haut (II, § 1), PC est normale à une ovale de Descartes dont deux foyers sont A et B. Un des sommets est à une distance $\frac{SA}{n}$ du sommet du dioptre. La connaissance de la *nature* de cette ovale donnerait directement le *sens* de l'aberration pour le point A, mais le procédé artificiel indiqué au paragraphe précédent est plus simple.

4. — *Condensateur cardioïde.*

Nous signalerons encore ici, bien que l'ovale de Descartes n'y intervienne pas, une application *catoptrique* de la cardioïde.

La cardioïde peut être considérée comme engendrée par un point d'un cercle qui roule extérieurement sur un cercle égal.

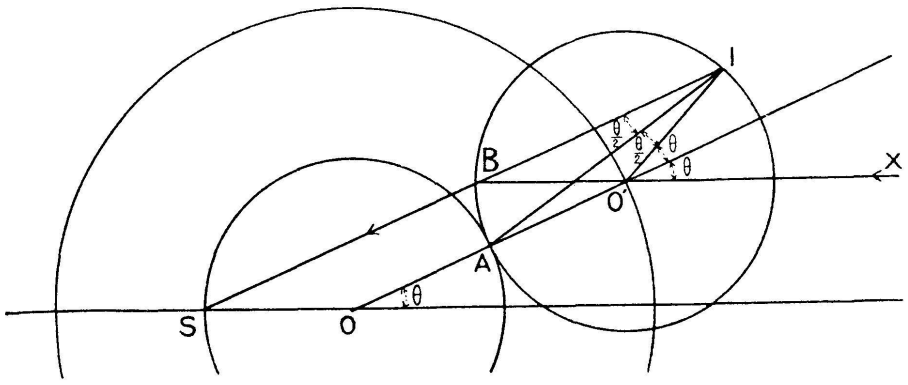

Fig. 16.

Soient O le centre du cercle de base, O′ une position quelconque du centre du cercle mobile, I le point correspondant de la cardioïde et S son point de rebroussement (fig. 16). Le trapèze

SIO′O est isocèle. La droite IA normale à la cardioïde est bissectrice de l'angle SIO′; O′B est parallèle à SO; OO′ est bissectrice de l'angle formé par les droites O′I et BO′ prolongée. Traçons le cercle ayant O pour centre et passant par O′.

Un rayon lumineux XO′ parallèle à l'axe se réfléchit sur le cercle suivant O′I, puis sur la cardioïde suivant IS. L'association du miroir sphérique convexe, ayant pour centre le foyer singulier et de rayon égal au diamètre du cercle de base, à un miroir concave de révolution, ayant pour méridienne la cardioïde transforme un faisceau de rayons parallèles à l'axe en un faisceau homocentrique de sommet S. Ce système optique est stigmatique pour le point S et le point infiniment éloigné de son axe et, de plus, il est aplanétique, car le rayon incident et le rayon deux fois réfléchi se coupant sur la circonférence de cercle de centre S et de rayon SB = OO′, la condition d'aplanétisme (condition des sinus) se trouve satisfaite. Ce système catoptrique est réalisé dans le condensateur cardioïde de Zeiss, qui s'emploie avec le microscope pour l'éclairage à fond noir et l'ultramicroscopie. Comme on n'utilise qu'une faible portion de la cardioïde au voisinage du point I, on la remplace par une portion de son cercle osculateur en I. Le rayon de courbure de ce cercle se détermine facilement. Le miroir concave employé est alors une zone empruntée à la surface d'un miroir torique.