Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 28 (1929)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES OVALES DE DESCARTES

Autor: Dufour, M.

Kapitel: 2. — Points situés en dehors de l'axe et présentant un maximum ou un minimum de courbure.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-22597

4. *Condition pour que l'ovale extérieure soit une courbe convexe.* — Nous avons vu plus haut comment la forme d'une équation bipolaire nous permet de reconnaître s'il s'agit d'une ovale intérieure ou d'une ovale extérieure. Cherchons la condition pour qu'une ovale extérieure soit une courbe convexe. Des considérations d'optique vont nous guider.

La relation $\lambda \sin i = |\lambda'| \sin i'$ nous montre que, si nous envisageons l'ovale comme la méridienne d'un dioptre pour lequel le premier et le second milieu ont des indices respectivement égaux à λ et λ' et si nous supposons un point lumineux placé en F dans le premier milieu, les rayons réfractés forment un faisceau homocentrique de centre F'. Supposons l'ovale rapportée à ses foyers intérieurs et prenons F_2 comme point-objet. Si l'ovale possède en B_2 un point méplat, les rayons lumineux venant de F_2 sont réfractés au voisinage de B_2 comme ils le seraient sous l'incidence normale par un dioptre plan, et on a $\lambda_2 F_1 B_1 = \lambda_1 F_2 B_2$ ou $\lambda_2 b_1 = \lambda_1 b_2'$. Si la courbe tourne en B_2 sa concavité vers F_2, l'image F_1 se rapproche de B_2, et on a $\lambda_2 b_2 < \lambda_1 b_1$: c'est la condition pour que l'ovale extérieure soit une courbe convexe.

2. — *Points situés en dehors de l'axe et présentant un maximum ou un minimum de courbure.*

Soit M un des points de contact de la circonférence menée par F_1 et F_2 et bitangente à l'ovale. En ce point M, l'angle F_1MF_2, formé par les rayons vecteurs, passe par un maximum. Il est égal à $(i_1 + i_2)$ pour l'ovale intérieure (fig. 6) et à $(i_1 - i_2)$ pour l'ovale extérieure. Nous avons donc, en M, $d(i_1 \pm i_2) = 0$. D'autre part, de la relation

$$\lambda_1 \sin i_1 = \lambda_2 \sin i_2 , \quad \text{nous tirons} \quad \lambda_1 \cos i_1 \, di_1 = \lambda_2 \cos i_2 \, di_2 .$$

relation simple qu'on trouve aisément par des considérations d'optique. Dans le plan de la figure, les rayons lumineux émanés de F_2 sont réfractés en ces points par un dioptre ayant l'ovale pour méridienne comme ils le seraient par un dioptre plan osculateur. La relation qui détermine la position de la focale tangentielle est

$$\frac{\lambda_1 \cos^2 i_1}{\rho_1} = \frac{\lambda_2 \cos^2 i_2}{\rho_2} .$$

Par suite $d(i_1 \pm i_2) = 0$ équivaut à

$$\left(1 \pm \frac{\lambda_1 \cos i_1}{\lambda_2 \cos i_2}\right) di_1 = 0 .$$

Le facteur entre parenthèses ne pouvant s'annuler, $di_1 = 0$ et $di_2 = 0$; alors i_1 et i_2 passent en M par un maximum. Soit MJ la normale.

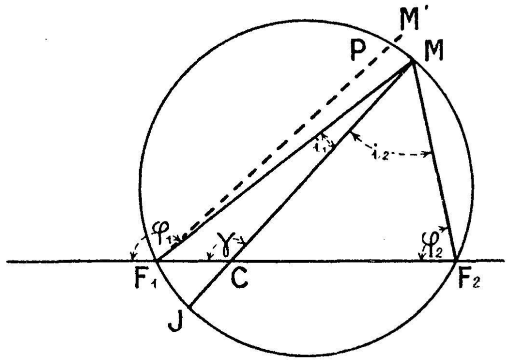

Fig. 6.

Prenons sur l'ovale un point M′ infiniment voisin de M; la droite F_1M' prolongée rencontre la circonférence au point P. Les angles inscrits F_1PJ et F_1MJ sont égaux. La normale M′, faisant avec F_1M' un angle égal à i_1 au second ordre près, puisque i_1 est un maximum, est parallèle à PJ et, puisque M′P est du second ordre, cette normale passe, au second ordre près, par le point J. J est par conséquent un point de rebroussement de la développée et en M la courbure de l'ovale passe par un minimum (pour l'ovale intérieure) par un maximum (pour l'ovale extérieure). Nous voyons donc que le cercle tangent en M ayant un rayon égal à la moitié du rayon de courbure en ce point passe par les deux foyers intérieurs. Entre les angles i_1 et i_2, les rayons vecteurs ρ_1 et ρ_2 et le rayon de courbure R nous avons en M les relations

$$2R = \frac{\rho_1}{\cos i_1} = \frac{\rho_2}{\cos i_2} .$$

En tout point de l'ovale $\gamma = \varphi_1 - i_1 = \varphi_2 + i_2$ d'où

$$d\gamma = d\varphi_1 - di_1 = d\varphi_2 + di_2 .$$

En M on a $d\gamma = d\varphi_1 = d\varphi_2$.