**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 28 (1929)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES OVALES DE DESCARTES

**Autor:** Dufour, M.

**Kapitel:** 1. — Sommets de l'ovale.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-22597

## Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

## **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

## Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 14.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

nous pouvons déterminer  $\rho'$  et par suite  $\rho$ . Alors le point I est connu et CI est la normale cherchée.

Pour trouver l'angle  $\gamma$  de la normale avec l'axe, projetons le contour II'B sur l'axe focal et sur une droite qui lui soit perpendiculaire. Désignant par  $\varphi$  et  $\varphi'$  les angles des rayons vecteurs avec l'axe, nous obtenons

 $II'\cos\gamma - \lambda\cos\phi - \lambda'\cos\phi' = 0 \ , \quad II'\sin\gamma - \lambda\sin\phi - \lambda'\sin\phi' = 0 \ .$ 

D'où

$$tg\,\gamma = \frac{\lambda\,\sin\phi\,+\,\lambda'\,\sin\phi'}{\lambda\,\cos\phi\,+\,\lambda'\,\sin\phi'}\,.$$

III. POINTS OU L'OVALE PRÉSENTE UN MAXIMUM OU UN MINIMUM DE COURBURE.

Par raison de symétrie, les sommets situés sur l'axe correspondent à un maximum ou à un minimum de courbure.

1. Construction du centre de courbure relatif à un sommet. — Si le point I (fig. 4 et 5) se rapproche indéfiniment du sommet A, le point C, intersection de la normale en I avec  $FF'_1$ , tend vers une position limite  $C_0$  qui est le centre de courbure en A, puisque par raison de symétrie, ce centre de courbure doit se trouver sur FF' et on a

$$\frac{C_0 F}{C_0 F'} = \frac{|\lambda'|}{|\lambda|} \frac{C_0 A}{C_0 A'}.$$

Le point  $C_0$  divisant FF' dans un rapport donné se détermine par une construction bien connue et cette construction est applicable à l'ellipse ( $\lambda = \lambda'$ ) et à l'hyperbole ( $\lambda = -\lambda'$ ).

2. Sommets de l'ovale intérieure. — Quand le point I se déplace sur une ovale intérieure à partir du sommet  $A_1$ , voisin du foyer  $F_1$ ,  $\rho_1$  augmente et l'équation de la courbe  $\lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2 = -h_3$  montre que  $\rho_2$  diminue. Alors  $\rho_1 : \rho_2$  augmente, ainsi que  $CF_1 : CF_2$ 

et le point C se rapproche de  $F_2$  et de  $A_2$ . La courbure passe donc par un maximum en  $A_1$ . On verrait de même qu'elle passe par un maximum en  $A_2$ .

3. Sommets de l'ovale extérieure. — Considérons l'ovale extérieure comme la transformée de l'ovale intérieure conjuguée en prenant  $F_1$  pour centre d'inversion. Le cercle osculateur en  $A_1$  devient par inversion le cercle osculateur en  $B_1$  et comme le cercle osculateur en  $A_1$  est intérieur à l'ovale intérieure, le cercle osculateur en  $B_1$  est extérieur à l'ovale extérieure. D'autre part, le foyer  $F_1$  est intérieur au cercle osculateur en  $A_1$ , puisque les normales à l'ovale intérieure rencontrent l'axe entre les deux foyers:  $F_1$  est donc intérieur au cercle osculateur en  $B_1$ : en ce sommet la courbe tourne sa concavité vers  $F_1$  et présente un minimum de courbure.

En ce qui concerne le sommet B<sub>2</sub>, il faut distinguer plusieurs cas:

- $\alpha$ ) Si le foyer  $F_1$  est à l'intérieur du cercle osculateur en  $A_2$ , il est aussi à l'intérieur du cercle osculateur en  $B_2$  et, ce cercle étant extérieur à la courbe, l'ovale extérieure tourne en  $B_2$  sa concavité vers  $F_1$  et présente un minimum de courbure.
- $\beta$ ) Si le cercle osculateur en  $A_2$  passe par  $F_1$ , il se transforme en une droite, et l'ovale extérieure présente au sommet  $B_2$  un point méplat.
- $\gamma$ ) Enfin, si le foyer  $F_1$  est extérieur au cercle osculateur en  $A_2$ , il est aussi extérieur au cercle osculateur en  $B_2$  et, ce cercle étant extérieur à la courbe, l'ovale extérieure tourne en  $B_2$  sa convexité vers  $F_1$  et présente un maximum de courbure  $^2$ .

logue est un point d'inflexion.

<sup>1</sup> On peut obtenir le même résultat d'une façon plus classique, mais qui exige quelques calculs. Soit un cercle de rayon R tangent au sommet de l'ovale. Prenons pour axes de coordonnées l'axe et la tangente au sommet. Les coordonnées d'un point P du cercle sont  $x=R(1-\cos \varphi)$  et  $y=R\sin \varphi$ . Dans x et y remplaçons  $\cos \varphi$  et  $\sin \varphi$  par leurs développements en série en fonction de  $\varphi$  et négligeons les puissances supérieures à la quatrième. Calculons  $F_1P$  et  $F_2P$ . Portant leurs valeurs dans le premier membre de l'équation de l'ovale, nous obtenons une expression de la forme  $p\varphi^2 + q\varphi^4$ . Ecrivons que le coefficient de  $\varphi^2$  est nul: l'équation p=0 nous fait connaître le rayon  $R_0$  du cercle osculateur. Le signe du coefficient de  $\varphi^4$ , quand on y remplace R par  $R_0$ , permet de savoir si la courbure au sommet envisagé est maxima ou minima.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Dans ce dernier cas, le foyer  $F_1$  est intérieur au cercle osculateur en  $A_1$  et extérieur au cercle osculateur en  $A_2$ . Il y a donc sur chacune des moitiés de l'ovale intérieure entre  $A_1$  et  $A_2$  un point tel que le cercle osculateur en ce point passe par  $F_1$ , et le cercle osculateur au point correspondant de l'ovale extérieure est une droite: ce point homologue est un point d'inflorier

Il y a entre les valeurs de  $ho_1$ ,  $ho_2$ ,  $i_1$ ,  $i_2$  qui correspondent aux points d'inflexion une

4. Condition pour que l'ovale extérieure soit une courbe convexe.

— Nous avons vu plus haut comment la forme d'une équation bipolaire nous permet de reconnaître s'il s'agit d'une ovale intérieure ou d'une ovale extérieure. Cherchons la condition pour qu'une ovale extérieure soit une courbe convexe. Des considérations d'optique vont nous guider.

La relation  $\lambda \sin i = |\lambda'| \sin i'$  nous montre que, si nous envisageons l'ovale comme la méridienne d'un dioptre pour lequel le premier et le second milieu ont des indices respectivement égaux à  $\lambda$  et  $\lambda'$  et si nous supposons un point lumineux placé en F dans le premier milieu, les rayons réfractés forment un faisceau homocentrique de centre F'. Supposons l'ovale rapportée à ses foyers intérieurs et prenons  $F_2$  comme point-objet. Si l'ovale possède en  $B_2$  un point méplat, les rayons lumineux venant de  $F_2$  sont réfractés au voisinage de  $B_2$  comme ils le seraient sous l'incidence normale par un dioptre plan, et on a  $\lambda_2 F_1 B_1 = \lambda_1 F_2 B_2$  ou  $\lambda_2 b_1 = \lambda_1 b_2'$ . Si la courbe tourne en  $B_2$  sa concavité vers  $F_2$ , l'image  $F_1$  se rapproche de  $B_2$ , et on a  $\lambda_2 b_2 < \lambda_1 b_1$ : c'est la condition pour que l'ovale extérieure soit une courbe convexe.

2. — Points situés en dehors de l'axe et présentant un maximum ou un minimum de courbure.

Soit M un des points de contact de la circonférence menée par  $F_1$  et  $F_2$  et bitangente à l'ovale. En ce point M, l'angle  $F_1MF_2$ , formé par les rayons vecteurs, passe par un maximum. Il est égal à  $(i_1+i_2)$  pour l'ovale intérieure (fig. 6) et à  $(i_1-i_2)$  pour l'ovale extérieure. Nous avons donc, en M,  $d(i_1\pm i_2)=0$ . D'autre part, de la relation

 $\lambda_1 \sin i_1 = \lambda_2 \sin i_2$ , nous tirons  $\lambda_1 \cos i_1 di_1 = \lambda_2 \cos i_2 di_2$ .

$$\frac{\lambda_1\cos^2i_1}{\rho_1}=\frac{\lambda_2\cos^2i_2}{\rho_2}.$$

relation simple qu'on trouve aisément par des considérations d'optique. Dans le plan de la figure, les rayons lumineux émanés de  $F_2$  sont réfractés en ces points par un dioptre ayant l'ovale pour méridienne comme ils le seraient par un dioptre plan osculateur. La relation qui détermine la position de la focale tangentielle est