

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 28 (1929)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES OVALES DE DESCARTES  
**Autor:** Dufour, M.  
**Kapitel:** 2. — Les équations bipolaires et tripolaire de l'ovale  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-22597>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

si les cônes  $S_1$  et  $S_2$  sont égaux, une hyperbole de foyers  $F_2$  et  $F_3$   
 si les cônes  $S_2$  et  $S_3$  sont égaux et de foyers  $F_3$  et  $F_1$  si les cônes  
 $S_3$  et  $S_1$  sont égaux.

## 2. — Les équations bipolaires et tripolaire de l'ovale.

Soient  $P$  et  $P'$  les projections sur le plan horizontal et sur le plan  $V$  d'un point quelconque de la courbe d'intersection des trois cônes, et  $\pi, S'_1, S'_2, S'_3$  les projections de ce point et des trois sommets sur un axe vertical pour lequel nous choisissons un sens positif  $XX'$ . Soient  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  les segments  $\pi S'_1, \pi S'_2, \pi S'_3$  et  $h_1, h_2, h_3$  les segments  $S'_2 S'_3, S'_3 S'_1, S'_1 S'_2$ . La relation de Chasles, appliquée successivement aux points  $S'_1, S'_2, S'_3$ ;  $\pi, S'_1, S'_2$ ;  $\pi, S'_2, S'_3$ ;  $\pi, S'_3, S'_1$ , nous donne

$$h_1 + h_2 + h_3 = 0 \quad (1)$$

$$\varphi_1 + h_3 - \varphi_2 = 0 \quad (2)$$

$$\varphi_2 + h_1 - \varphi_3 = 0 \quad (3)$$

$$\varphi_3 + h_2 - \varphi_1 = 0 \quad (4)$$

Multiplions respectivement (2) et (3) par  $h_1$  et par  $(-h_3)$  et ajoutons membre à membre; il vient

$$\varphi_1 h_1 - \varphi_2 (h_1 + h_3) + \varphi_3 h_3 = 0$$

ou, en vertu de (1)

$$\varphi_1 h_1 + \varphi_2 h_2 + \varphi_3 h_3 = 0 \quad (5)$$

Soient  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  les distances du point  $P$  aux trois foyers  $F_1, F_2, F_3$  et  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  les valeurs au signe près des cotangentes des demi-angles au sommet des trois cônes. Convenons de donner à  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  les signes respectifs de  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ , nous aurons

$$\varphi_1 = \lambda_1 \rho_1 \quad \varphi_2 = \lambda_2 \rho_2 \quad \varphi_3 = \lambda_3 \rho_3$$

$\rho_1, \rho_2, \rho_3$  étant toujours positifs.

<sup>1</sup> En exprimant  $h_1, h_2, h_3$  en fonction de  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ , on a

$$\varphi_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \varphi_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \varphi_3(\varphi_2 - \varphi_1) = 0.$$

Etant données trois segments de même origine portés sur un même axe, la somme algébrique des produits de chacun d'eux par la différence des deux autres est nulle, puisque, dans cette somme, chaque produit de deux segments intervient deux fois et avec des signes contraires.

En y remplaçant  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  par ces valeurs, les relations (2), (3), (4) et (5) deviennent

$$\lambda_1 \rho_1 - \lambda_2 \rho_2 + h_3 = 0 \quad \lambda_2 \rho_2 - \lambda_3 \rho_3 + h_1 = 0 \quad \lambda_3 \rho_3 - \lambda_1 \rho_1 + h_2 = 0 \quad .$$

$$h_1 \lambda_1 \rho_1 + h_2 \lambda_2 \rho_2 + h_3 \lambda_3 \rho_3 = 0 \quad .$$

Ce sont les équations bipolaires et tripolaire de l'ovale de Descartes, rapportées à ses foyers.

Si nous remarquons que  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3|$ , nous voyons que l'équation bipolaire étant rapportée aux deux foyers intérieurs  $F_1$  et  $F_2$ , le foyer extérieur  $F_3$  est du côté du foyer intérieur pour lequel le coefficient du rayon vecteur a la plus petite valeur absolue et que l'équation bipolaire étant rapportée à un foyer intérieur et au foyer extérieur, le rayon vecteur correspondant à ce dernier est affecté du coefficient le plus petit en valeur absolue.

Sur une équation bipolaire  $\lambda \rho + \lambda' \rho' - k = 0$ , il est facile de voir si les deux foyers auxquels elle est rapportée sont ou non de même nature. Remplaçons-y successivement  $\rho$  et  $\rho'$  par les rayons vecteurs  $(0, 2b)$  et  $(2b, 0)$  qui correspondent aux deux foyers: si  $2b\lambda' - k$  et  $2b\lambda - k$  ont le même signe les deux foyers sont intérieurs; dans le cas contraire, un des deux foyers est intérieur, l'autre est extérieur.

Nous avons (fig. 1)  $h_1 < 0, h_2 > 0, h_3 < 0$  et pour l'ovale intérieure  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$ ; pour l'ovale extérieure,  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$ .

Si nous désignons par  $k, \lambda$  et  $\lambda'$  des quantités essentiellement positives, et si nous supposons  $\lambda' > \lambda$ , le tableau suivant nous indique les formes que prennent les équations des deux ovales conjuguées suivant les foyers auxquelles elles sont rapportées.

Foyers	Ovale intérieure	Ovale extérieure
$F_1 F_2$	$\lambda \rho + \lambda' \rho' = k$	$\lambda' \rho' - \lambda \rho = k$
$F_2 F_3$	$\lambda \rho - \lambda' \rho' = k$	$\lambda' \rho' - \lambda \rho = k$
$F_3 F_1$	$\lambda \rho + \lambda' \rho' = k$	$\lambda' \rho' - \lambda \rho = k$

Ce tableau montre également comment on passe d'une équation de l'ovale à celle de l'ovale conjuguée rapportée aux deux mêmes foyers.

Etant donnée une équation bipolaire, quand on a calculé la position du troisième foyer, on peut calculer les  $h$ .

Connaissant la position de deux foyers, il est aisé de trouver la position des sommets. Désignons par  $a_f$  ( $f$  étant égal à 1, 2 ou 3)  $a'_f$ ,  $b_f$ ,  $b'_f$  les distances respectives du foyer  $F_f$  aux sommets  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  des deux ovales conjugués, et supposons, par exemple, l'ovale donnée par l'équation bipolaire  $\lambda_1 \rho_1 - \lambda_2 \rho_2 + h_3 = 0$ . Exprimant que le sommet  $A_1$  est sur la courbe nous avons  $\lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2 + h_3 = 0$ . Si nous appelons  $2b$  la distance des deux foyers  $F_1 F_2$ ,  $a_2 = a_1 + 2b$  et la relation précédente devient  $\lambda_1 a_1 - \lambda_2 (a_1 + 2b) + h_3 = 0$ , d'où nous pouvons tirer  $a_1$ .

D'autre part,

$$\lambda_2 a_2 - \lambda_3 a_3 = \lambda_2 a'_2 - \lambda_3 a'_3 = -h_1.$$

D'où  $\lambda_3 (a_3 - a'_3) = \lambda_2 (a_2 - a'_2)$ , relation qui nous fait connaître  $\lambda_3$ . On pourrait, connaissant  $h_3$  et  $h_1$  avoir  $h_2$  par la relation  $h_1 + h_2 + h_3 = 0$ . Ainsi une des équations bipolaires d'une ovale étant donnée, nous pouvons trouver les deux autres équations bipolaires et l'équation tripolaire. Si l'ovale est donnée par ses trois foyers et son équation tripolaire, nous pouvons déterminer ses deux sommets et trouver ses équations bipolaires.

D'après le tableau qui précède, l'équation  $\lambda \rho - \lambda' \rho' = k$  représente toujours une ovale intérieure rapportée aux foyers  $F_2$  et  $F_3$ . Les autres formes d'équations bipolaires indiquent simplement que l'ovale est intérieure ou extérieure. Pour savoir à quels foyers elle est rapportée, il convient de chercher la position de ses sommets et celle du point milieu 0 de l'intervalle qui les sépare: la disposition des deux foyers connus par rapport à 0, fait voir si ce sont  $F_1$ ,  $F_2$  ou  $F_3$ .

### 3. — L'ovale courbe anallagmatique.

Si on prend pour pôle un quelconque des trois foyers et pour axe la droite  $F_1 F_2 F_3$ , l'équation de l'ovale en coordonnées polaires  $\rho$  et  $\theta$  se présente sous la forme  $\rho^2 + P\rho + Q = 0$ ,  $P$  étant une fonction linéaire de  $\cos \theta$  et  $Q$  une constante. La transformation par rayons vecteurs réciproques autour du pôle