**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 28 (1929)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES OVALES DE DESCARTES

**Autor:** Dufour, M.

**Kapitel:** § 1. — Les trois foyers ordinaires. **DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-22597

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 14.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

### SUR LES OVALES DE DESCARTES

PAR

## M. Dufour (Nancy).

C'est au sujet de leurs applications à l'Optique que j'ai été conduit à m'occuper des ovales de Descartes. La présente note a pour but d'en exposer certaines propriétés d'une façon assez simple et intuitive <sup>1</sup>.

### I. — L'OVALE PROJECTION D'UNE COURBE GAUCHE.

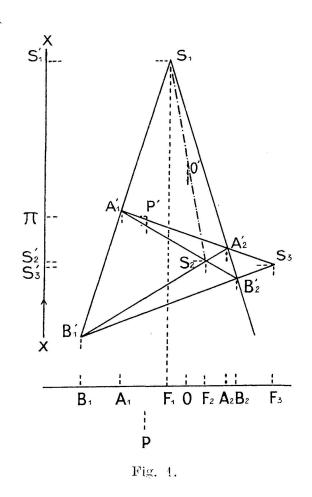
On sait que l'intersection de deux cônes de révolution à axe vertical a pour projection horizontale une ovale de Descartes, et pour projection verticale sur le plan V passant par les axes des deux cônes une parabole à axe horizontal. Les foyers  $F_1$  et  $F_2$  de l'ovale sont les projections horizontales des sommets  $S_1$  et  $S_2$  des deux cônes. En faisant intervenir ainsi la géométrie dans l'espace, on peut établir assez simplement certaines propriétés de l'ovale.

# § 1. — Les trois foyers ordinaires.

Soient  $A_1'$ ,  $A_2'$ ,  $B_1'$ ,  $B_2'$  les points d'intersection des génératrices situées dans le plan V (fig. 1). Les angles  $B_1'A_1'B_2'$  et  $B_1'A_2'B_2'$  étant l'un et l'autre égaux à la somme des demi-angles au sommet des deux cônes  $S_1$  et  $S_2$ , les quatre points  $A_1'$ ,  $A_2'$ ,  $B_2'$ ,  $B_1'$  sont sur une circonférence. Par suite les angles  $B_2'A_1'A_2'$  et  $B_2'B_1'A_2'$  sont égaux, et on en conclut sans peine que les deux droites

<sup>1</sup> Ce travail a été transmis à la Rédaction, par M. Elie Cartan, le 20 avril 1928.

 $A'A_2'$  et  $B_1'B_2'$  sont également inclinées sur la verticale. On peut donc les considérer comme étant deux génératrices d'un troisième cône de révolution à axe vertical ayant pour sommet leur point de rencontre  $S_3$ . L'intersection des deux cônes  $S_1$  et  $S_3$  a pour projection sur le plan V la même parabole à axe horizontal que l'intersection des cônes  $S_1$  et  $S_2$ , car les projections de ces deux courbes d'intersection passent par  $A_1'$ ,  $A_2'$ ,  $B_1'$ ,  $B_2'$  et par quatre points ne passent que deux paraboles (dont les axes



n'ont pas la même direction). Ainsi les trois cônes  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  ont une ligne commune dont la projection horizontale est une ovale de Descartes. Cette ovale peut donc être définie par deux quelconques des trois cônes et la projection horizontale  $F_3$  de  $S_3$  est son troisième foyer. L'ovale a deux foyers intérieurs  $F_1$  et  $F_2$  et un foyer extérieur placé du côté du sommet intérieur  $F_2$ , pour lequel la distance au sommet correspondant de la courbe a la plus petite valeur ( $F_2A_2 < F_1A_1$ ).

La ligne commune aux trois cônes se compose de deux portions à chacune desquelles correspond une ovale distincte. Nous pouvons donner à ces deux ovales conjuguées les noms d'ovale intérieure et d'ovale extérieure. Les deux ovales conjuguées, qui sont données par une même équation rationnelle du quatrième degré, présentent des caractères très différents en ce qui concerne leurs normales.

Construction géométrique du troisième foyer. — Supposons une ovale de Descartes donnée par deux de ses foyers (F<sub>1</sub> et F<sub>2</sub> par exemple) et par ses sommets A<sub>1</sub> et A<sub>2</sub>. Sur les lignes de rappel menées par A<sub>1</sub> et F<sub>1</sub>, prenons arbitrairement deux points A<sub>1</sub> et S<sub>1</sub>, situées à des distances différentes de l'axe A<sub>1</sub>A<sub>2</sub>. Le cône S<sub>1</sub> est défini par sa génératrice S<sub>1</sub>A<sub>1</sub>. L'intersection de son autre génératrice contenue dans le plan de la figure avec la ligne de rappel menée par A2 nous donne le point A2. Prenons sur la ligne de rappel menée par F<sub>2</sub> le point S<sub>2</sub> tel que les droites S<sub>2</sub>A'<sub>1</sub> et S<sub>2</sub>A'<sub>2</sub> fassent des angles égaux avec la verticale <sup>1</sup>. Ces droites déterminent les points B' et B', et l'intersection de A' A' avec B'<sub>1</sub>B'<sub>2</sub> nous donne le sommet S<sub>3</sub> qui se projette en F<sub>3</sub> sur l'axe de l'ovale. En faisant varier les positions de A' et S<sub>1</sub>, qui ont été prises arbitraitement sur les lignes de rappel, nous serions amenés à tracer des figures affines, et nous obtiendrions toujours le même point F<sub>3</sub>.

On voit facilement comment il conviendrait de modifier la construction, si le foyer extérieur F<sub>3</sub> figurait parmi les données.

Calcul des coordonnées de  $S_3$ . — Calculons les coordonnées du point  $S_3$  par rapport à un système d'axes rectangulaires  $O_x$ ,  $O_y$  situés dans le plan V, l'axe des y étant parallèle aux axes des cônes, l'origine O' étant le milieu de  $S_1$   $S_2$ . Soit 2c la distance  $F_1$   $F_2$  des deux foyers intérieurs et 2d la différence des cotes de  $S_1$  et de  $S_2$ . Les coordonnées de  $S_1$  et  $S_2$  sont respectivement (-c, d) et (c, -d). Dans le quadrilatère complet  $A_1 A_2 B_2 B_1$ ,

<sup>1</sup> Ce point est à l'intersection de la ligne de rappel  $F_2S_2$  avec la droite passant par  $A_1'$  et par le symétrique de  $A_2'$  par rapport à cette ligne de rappel; ce point tombe à l'intérieur du cone  $S_1$ . — Nous avons supposé l'ovale donnée par deux foyers et par ses deux sommets. On pourrait supposer donnés les deux foyers et deux points quelconques de la courbe: il serait facile alors de déterminer les contours apparents des deux cônes correspondant à ces foyers, et on serait ramené au cas pour lequel est tracée la figure 1.

le faisceau  $S_1(A_1', S_2, A_2', S_3)$  est un faisceau harmonique. Dans ce faisceau, les deux génératrices de  $S_1$  ont pour équations

$$\Delta = y - d + \lambda_1(x+c) = 0$$
 et  $\Delta' = y - d - \lambda_1(x+c) = 0$ .

L'équation de la droite  $S_1$   $S_2$  est de la forme  $\Delta + \mu \Delta' = 0$ . En exprimant que cette droite passe par  $S_2$  nous trouvons

$$\mu = \frac{\lambda_1 c - d}{\lambda_1 c + d} .$$

L'équation de la droite  $S_1$   $S_3$ , conjuguée de  $S_1$   $S_2$  par rapport à  $\Delta$  et  $\Delta'$  est  $\Delta - \mu \Delta' = 0$ , ou, réductions faites,

$$\lambda_1^2 cx + d \cdot y = -(\lambda_1^2 c^2 - d^2)$$
.

Grâce au choix fait pour Ox et Oy, il nous suffit pour obtenir l'équation de  $S_2 S_3$ , de changer les signes de c et d et de remplacer  $\lambda_1$  par  $\lambda_2$ , ce qui donne

$$\lambda_2^2 cx + d \cdot y = \lambda_2^2 c^2 - d^2 \cdot$$

Les coordonnées  $\xi$  et  $\eta$  du point  $S_3$  sont les racines du système formé par ces deux équations. On a

$$\xi = - \, c \, rac{\lambda_1^2 \, + \, \lambda_2^2}{\lambda_1^2 \, - \, \lambda_2^2} \, + \, 2 \, rac{d^2}{c} \cdot rac{1}{\lambda_1^2 \, - \, \lambda_2^2} \quad {
m et} \quad au_i = - \, d \, rac{\lambda_1^2 \, + \, \lambda_2^2}{\lambda_1^2 \, - \, \lambda_2^2} \, + \, 2 \, rac{c^2}{d} \, rac{\lambda_1^2 \, \, \lambda_2^2}{\lambda_1^2 \, - \, \lambda_2^2} \; .$$

Ainsi  $\xi$  est la distance du foyer extérieur de l'ovale au milieu 0 de  $F_1F_2$ . Soient  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  les demi-angles au sommet des deux cônes  $S_1$  et  $S_2$ ; supposons  $\alpha_2 > \alpha_1$ , alors  $\cot \alpha_2 < \cot \alpha_1$  ou  $\lambda_2 < \lambda_1$ . Comme  $(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)$  est positif,  $\xi$  a le signe de  $-c^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + 2d^2$ , c'est-à-dire de

$$2\frac{d^2}{c^2} - \cot^2 \alpha_1 - \cot^2 \alpha_2 .$$

Mais d:c est la cotangente de l'angle aigu  $\beta$  que fait la droite  $S_1S_2$  avec la verticale et, puisque la portion  $S_1S_2$  de cette droite est intérieure aux deux cônes  $S_1$  et  $S_2$ , on a  $\beta < \alpha_1 < \alpha_2$  et, par suite, cot  $\beta > \cot \alpha_1 > \cot \alpha_2$ , et  $\xi$  est positif.

Formes des deux ovales conjuguées. — Une droite ne peut couper l'ensemble des deux ovales conjuguées en plus de quatre points, et, par suite, l'ovale intérieure en plus de deux points, l'ovale intérieure est donc toujours une courbe convexe; elle a une forme ovale au sens généralement attribué à ce mot. Le paramètre de la parabole dépend de la position de  $S_2$  et des valeurs des demi-angles au sommet des deux cônes  $S_1$  et  $S_2$ . Sur la figure le sommet de la parabole se trouve entre  $S_1$  et  $S_2$ : l'ovale extérieure, elle aussi est une courbe convexe. Mais si le sommet de la parabole vient se placer au-dessous de la génératrice  $B_1'B_2'$ , la projection horizontale de l'intersection des cônes tournera en son sommet  $B_2$  sa concavité vers l'extérieur. Si le sommet de la parabole est en  $B_1'$ ,  $B_2$  sera un point méplat.

Nous verrons plus loin comment il est possible, d'après l'équation de l'ovale, de se rendre compte de sa forme.

Cas particuliers. — Si  $S_1$  s'éloigne à l'infini dans la direction verticale, l'intersection est symétrique par rapport au plan horizontal mené par  $S_2$  et le sommet  $S_3$  est dans ce plan. L'axe de la parabole passe par  $S_2$  et  $S_3$ . L'ovale intérieure et l'ovale extérieure se confondent en une même circonférence de centre  $F_1$ ;  $F_2$  et  $F_3$  sont conjugués par rapport à cette circonférence double.

Si,  $S_2$  se déplaçant à l'intérieur du cône,  $S_1$  vient sur l'axe de ce cône, l'intersection se compose de deux circonférences horizontales et  $S_3$  s'éloigne à l'infini dans la direction horizontale. La parabole se décompose en deux droites parallèles; l'ovale intérieure et l'ovale extérieure deviennent deux circonférences concentriques ayant pour centres les deux foyers  $F_1$  et  $F_2$  confondus.

Si  $S_2$  est sur le cône  $S_1$ ,  $S_3$  coïncide avec  $S_2$ . L'intersection des cônes est une quartique gauche présentant un point double en  $S_2$ : sa projection sur le plan V est une parabole à axe horizontal tangente en  $S_2$  à la droite  $S_1$   $S_2$ ; sa projection horizontale est un limaçon de Pascal.

Si deux des cônes ont la même ouverture, le sommet du troisième s'éloigne à l'infini: la courbe d'intersection est plane. Sa projection horizontale est une ellipse de foyers  $F_1$  et  $F_2$ 

si les cônes  $S_1$  et  $S_2$  sont égaux, une hyperbole de foyers  $F_2$  et  $F_3$  si les cônes  $S_2$  et  $S_3$  sont égaux et de foyers  $F_3$  et  $F_1$  si les cônes  $S_3$  et  $S_1$  sont égaux.

# 2. — Les équations bipolaires et tripolaire de l'ovale.

Soient P et P' les projections sur le plan horizontal et sur le plan V d'un point quelconque de la courbe d'intersection des trois cônes, et  $\pi$ , S', S', S', les projections de ce point et des trois sommets sur un axe vertical pour lequel nous choisissons un sens positif XX'. Soient  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ ,  $\nu_3$  les segments  $\pi S'_1$ ,  $\pi S_2$ ,  $\pi S'_3$  et  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  les segments  $S'_2S'_3$ ,  $S'_3S'_3$ ,  $S'_1S'_2$ . La relation de Chasles, appliquée successivement aux points  $S'_1$ ,  $S'_1$ ,  $S'_1$ ,  $S'_1$ ,  $S'_1$ ,  $S'_2$ ,  $\pi$ ,  $S'_3$ ,  $S'_3$ ,  $S'_3$ , nous donne

$$h_1 + h_2 + h_3 = 0 (1)$$

$$v_1 + h_3 - v_2 = 0 (2)$$

$$v_2 + h_1 - v_3 = 0 (3)$$

$$v_3 + h_2 - v_1 = 0 . (4)$$

Multiplions respectivement (2) et (3) par  $h_1$  et par (—  $h_3$ ) et ajoutons membre à membre; il vient

$$v_1 h_1 - v_2 (h_1 + h_3) + v_3 h_3 = 0$$

ou, en vertu de (1)

$$v_1 h_1 + v_2 h_2 + v_3 h_3 = 0 (5)$$

Soient  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\rho_3$  les distances du point Paux trois foyers  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  et  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  les valeurs au signe près des cotangentes des demiangles au sommet des trois cônes. Convenons de donner à  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  les signes respectifs de  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ ,  $\nu_3$ , nous aurons

$$v_1 \equiv \lambda_1 \, \rho_1 \qquad v_2 \equiv \lambda_2 \, \rho_2 \qquad v_3 \equiv \lambda_3 \, \rho_3$$

 $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\rho_3$  étant toujours positifs.

$$v_1(v_3 - v_2) + v_2(v_1 - v_3) + v_3(v_2 - v_1)$$
 0

Etant données trois segments de même origine portés sur un même axe, la somme algébrique des produits de chacun d'eux par la différence des deux autres est nulle, puisque, dans cette somme, chaque produit de deux segments intervient deux fois et avec des signes contraires.

<sup>1</sup> En exprimant  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  en fonction de  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ , on a