

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 28 (1929)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES OVALES DE DESCARTES  
**Autor:** Dufour, M.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-22597>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SUR LES OVALES DE DESCARTES

PAR

M. DUFOUR (Nancy).

---

C'est au sujet de leurs applications à l'Optique que j'ai été conduit à m'occuper des ovales de Descartes. La présente note a pour but d'en exposer certaines propriétés d'une façon assez simple et intuitive <sup>1</sup>.

## I. — L'OVALE PROJECTION D'UNE COURBE GAUCHE.

On sait que l'intersection de deux cônes de révolution à axe vertical a pour projection horizontale une ovale de Descartes, et pour projection verticale sur le plan  $V$  passant par les axes des deux cônes une parabole à axe horizontal. Les foyers  $F_1$  et  $F_2$  de l'ovale sont les projections horizontales des sommets  $S_1$  et  $S_2$  des deux cônes. En faisant intervenir ainsi la géométrie dans l'espace, on peut établir assez simplement certaines propriétés de l'ovale.

### § 1. — *Les trois foyers ordinaires.*

Soient  $A'_1, A'_2, B'_1, B'_2$  les points d'intersection des génératrices situées dans le plan  $V$  (fig. 1). Les angles  $B'_1A'_1B'_2$  et  $B'_1A'_2B'_2$  étant l'un et l'autre égaux à la somme des demi-angles au sommet des deux cônes  $S_1$  et  $S_2$ , les quatre points  $A'_1, A'_2, B'_2, B'_1$  sont sur une circonférence. Par suite les angles  $B'_2A'_1A'_2$  et  $B'_2B'_1A'_2$  sont égaux, et on en conclut sans peine que les deux droites

---

<sup>1</sup> Ce travail a été transmis à la Rédaction, par M. Elie Cartan, le 20 avril 1928.

$A'A_2'$  et  $B_1'B_2'$  sont également inclinées sur la verticale. On peut donc les considérer comme étant deux génératrices d'un troisième cône de révolution à axe vertical ayant pour sommet leur point de rencontre  $S_3$ . L'intersection des deux cônes  $S_1$  et  $S_3$  a pour projection sur le plan V la même parabole à axe horizontal que l'intersection des cônes  $S_1$  et  $S_2$ , car les projections de ces deux courbes d'intersection passent par  $A_1'$ ,  $A_2'$ ,  $B_1'$ ,  $B_2'$  et par quatre points ne passent que deux paraboles (dont les axes

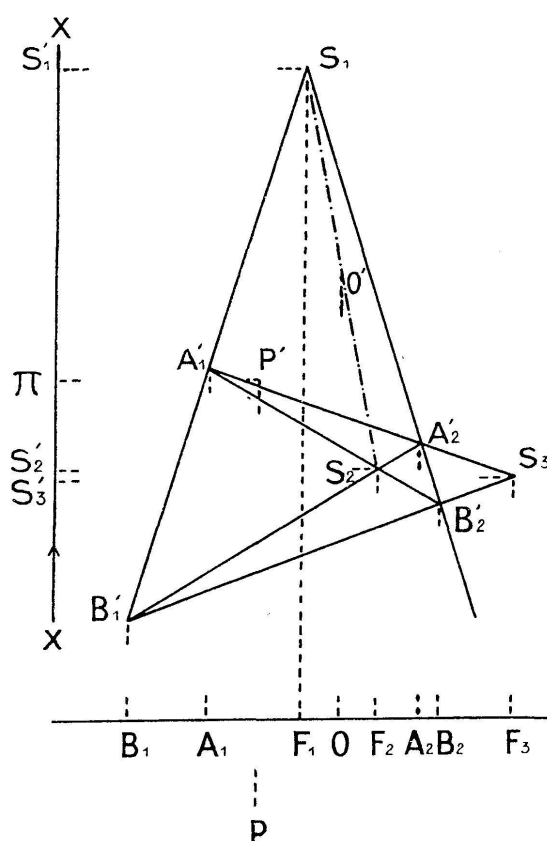


Fig. 1.

n'ont pas la même direction). Ainsi les trois cônes  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  ont une ligne commune dont la projection horizontale est une ovale de Descartes. Cette ovale peut donc être définie par deux quelconques des trois cônes et la projection horizontale  $F_3$  de  $S_3$  est son troisième foyer. L'ovale a deux foyers intérieurs  $F_1$  et  $F_2$  et un foyer extérieur placé du côté du sommet intérieur  $F_2$ , pour lequel la distance au sommet correspondant de la courbe a la plus petite valeur ( $F_2A_2 < F_1A_1$ ).

La ligne commune aux trois cônes se compose de deux portions à chacune desquelles correspond une ovale distincte. Nous pou-

vons donner à ces deux ovales conjuguées les noms d'*ovale intérieure* et d'*ovale extérieure*. Les deux ovales conjuguées, qui sont données par une même équation rationnelle du quatrième degré, présentent des caractères très différents en ce qui concerne leurs normales.

*Construction géométrique du troisième foyer.* — Supposons une ovale de Descartes donnée par deux de ses foyers ( $F_1$  et  $F_2$  par exemple) et par ses sommets  $A_1$  et  $A_2$ . Sur les lignes de rappel menées par  $A_1$  et  $F_1$ , prenons arbitrairement deux points  $A'_1$  et  $S_1$ , situées à des distances différentes de l'axe  $A_1A_2$ . Le cône  $S_1$  est défini par sa génératrice  $S_1A_1$ . L'intersection de son autre génératrice contenue dans le plan de la figure avec la ligne de rappel menée par  $A_2$  nous donne le point  $A'_2$ . Prenons sur la ligne de rappel menée par  $F_2$  le point  $S_2$  tel que les droites  $S_2A'_1$  et  $S_2A'_2$  fassent des angles égaux avec la verticale<sup>1</sup>. Ces droites déterminent les points  $B'_1$  et  $B'_2$ , et l'intersection de  $A'_1A'_2$  avec  $B'_1B'_2$  nous donne le sommet  $S_3$  qui se projette en  $F_3$  sur l'axe de l'ovale. En faisant varier les positions de  $A'_1$  et  $S_1$ , qui ont été prises arbitrairement sur les lignes de rappel, nous serions amenés à tracer des figures affines, et nous obtiendrions toujours le même point  $F_3$ .

On voit facilement comment il conviendrait de modifier la construction, si le foyer extérieur  $F_3$  figurait parmi les données.

*Calcul des coordonnées de  $S_3$ .* — Calculons les coordonnées du point  $S_3$  par rapport à un système d'axes rectangulaires  $O'_x, O'_y$  situés dans le plan  $V$ , l'axe des  $y$  étant parallèle aux axes des cônes, l'origine  $O'$  étant le milieu de  $S_1S_2$ . Soit  $2c$  la distance  $F_1F_2$  des deux foyers intérieurs et  $2d$  la différence des cotes de  $S_1$  et de  $S_2$ . Les coordonnées de  $S_1$  et  $S_2$  sont respectivement  $(-c, d)$  et  $(c, -d)$ . Dans le quadrilatère complet  $A'_1A'_2B'_1B'_2$ ,

<sup>1</sup> Ce point est à l'intersection de la ligne de rappel  $F_2S_2$  avec la droite passant par  $A'_1$  et par le symétrique de  $A'_2$  par rapport à cette ligne de rappel; ce point tombe à l'intérieur du cône  $S_1$ . — Nous avons supposé l'ovale donnée par deux foyers et par ses deux sommets. On pourrait supposer donnés les deux foyers et deux points quelconques de la courbe: il serait facile alors de déterminer les contours apparents des deux cônes correspondant à ces foyers, et on serait ramené au cas pour lequel est tracée la figure 1.



le faisceau  $S_1(A'_1, S_2, A'_2, S_3)$  est un faisceau harmonique. Dans ce faisceau, les deux génératrices de  $S_1$  ont pour équations

$$\Delta = y - d + \lambda_1(x + c) = 0 \quad \text{et} \quad \Delta' = y - d - \lambda_1(x + c) = 0 .$$

L'équation de la droite  $S_1 S_2$  est de la forme  $\Delta + \mu \Delta' = 0$ . En exprimant que cette droite passe par  $S_2$  nous trouvons

$$\mu = \frac{\lambda_1 c - d}{\lambda_1 c + d} .$$

L'équation de la droite  $S_1 S_3$ , conjuguée de  $S_1 S_2$  par rapport à  $\Delta$  et  $\Delta'$  est  $\Delta - \mu \Delta' = 0$ , ou, réductions faites,

$$\lambda_1^2 cx + d \cdot y = -(\lambda_1^2 c^2 - d^2) .$$

Grâce au choix fait pour  $Ox$  et  $Oy$ , il nous suffit pour obtenir l'équation de  $S_2 S_3$ , de changer les signes de  $c$  et  $d$  et de remplacer  $\lambda_1$  par  $\lambda_2$ , ce qui donne

$$\lambda_2^2 cx + d \cdot y = \lambda_2^2 c^2 - d^2 .$$

Les coordonnées  $\xi$  et  $\eta$  du point  $S_3$  sont les racines du système formé par ces deux équations. On a

$$\xi = -c \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} + 2 \frac{d^2}{c} \cdot \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \quad \text{et} \quad \eta = -d \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} + 2 \frac{c^2}{d} \frac{\lambda_1^2 \lambda_2^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} .$$

Ainsi  $\xi$  est la distance du foyer extérieur de l'ovale au milieu 0 de  $F_1 F_2$ . Soient  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  les demi-angles au sommet des deux cônes  $S_1$  et  $S_2$ ; supposons  $\alpha_2 > \alpha_1$ , alors  $\cot \alpha_2 < \cot \alpha_1$  ou  $\lambda_2 < \lambda_1$ . Comme  $(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)$  est positif,  $\xi$  a le signe de  $-c^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + 2d^2$ , c'est-à-dire de

$$2 \frac{d^2}{c^2} - \cot^2 \alpha_1 - \cot^2 \alpha_2 .$$

Mais  $d : c$  est la cotangente de l'angle aigu  $\beta$  que fait la droite  $S_1 S_2$  avec la verticale et, puisque la portion  $S_1 S_2$  de cette droite est intérieure aux deux cônes  $S_1$  et  $S_2$ , on a  $\beta < \alpha_1 < \alpha_2$  et, par suite,  $\cot \beta > \cot \alpha_1 > \cot \alpha_2$ , et  $\xi$  est positif.

*Formes des deux ovales conjuguées.* — Une droite ne peut couper l'ensemble des deux ovales conjuguées en plus de quatre points, et, par suite, l'ovale intérieure en plus de deux points, l'ovale intérieure est donc toujours une courbe convexe; elle a une *forme ovale* au sens généralement attribué à ce mot. Le paramètre de la parabole dépend de la position de  $S_2$  et des valeurs des demi-angles au sommet des deux cônes  $S_1$  et  $S_2$ . Sur la figure le sommet de la parabole se trouve entre  $S_1$  et  $S_2$ : l'ovale extérieure, elle aussi est une courbe convexe. Mais si le sommet de la parabole vient se placer au-dessous de la génératrice  $B'_1B'_2$ , la projection horizontale de l'intersection des cônes tournera en son sommet  $B_2$  sa concavité vers l'extérieur. Si le sommet de la parabole est en  $B'_1$ ,  $B_2$  sera un point méplat.

Nous verrons plus loin comment il est possible, d'après l'équation de l'ovale, de se rendre compte de sa forme.

*Cas particuliers.* — Si  $S_1$  s'éloigne à l'infini dans la direction verticale, l'intersection est symétrique par rapport au plan horizontal mené par  $S_2$  et le sommet  $S_3$  est dans ce plan. L'axe de la parabole passe par  $S_2$  et  $S_3$ . L'ovale intérieure et l'ovale extérieure se confondent en une même circonférence de centre  $F_1$ ;  $F_2$  et  $F_3$  sont conjugués par rapport à cette circonférence double.

Si,  $S_2$  se déplaçant à l'intérieur du cône,  $S_1$  vient sur l'axe de ce cône, l'intersection se compose de deux circonférences horizontales et  $S_3$  s'éloigne à l'infini dans la direction horizontale. La parabole se décompose en deux droites parallèles; l'ovale intérieure et l'ovale extérieure deviennent deux circonférences concentriques ayant pour centres les deux foyers  $F_1$  et  $F_2$  confondus.

Si  $S_2$  est sur le cône  $S_1$ ,  $S_3$  coïncide avec  $S_2$ . L'intersection des cônes est une quartique gauche présentant un point double en  $S_2$ : sa projection sur le plan  $V$  est une parabole à axe horizontal tangente en  $S_2$  à la droite  $S_1 S_2$ ; sa projection horizontale est un limaçon de Pascal.

Si deux des cônes ont la même ouverture, le sommet du troisième s'éloigne à l'infini: la courbe d'intersection est plane. Sa projection horizontale est une ellipse de foyers  $F_1$  et  $F_2$

si les cônes  $S_1$  et  $S_2$  sont égaux, une hyperbole de foyers  $F_2$  et  $F_3$   
 si les cônes  $S_2$  et  $S_3$  sont égaux et de foyers  $F_3$  et  $F_1$  si les cônes  
 $S_3$  et  $S_1$  sont égaux.

## 2. — Les équations bipolaires et tripolaire de l'ovale.

Soient  $P$  et  $P'$  les projections sur le plan horizontal et sur le plan  $V$  d'un point quelconque de la courbe d'intersection des trois cônes, et  $\pi, S'_1, S'_2, S'_3$  les projections de ce point et des trois sommets sur un axe vertical pour lequel nous choisissons un sens positif  $XX'$ . Soient  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  les segments  $\pi S'_1, \pi S'_2, \pi S'_3$  et  $h_1, h_2, h_3$  les segments  $S'_2 S'_3, S'_3 S'_1, S'_1 S'_2$ . La relation de Chasles, appliquée successivement aux points  $S'_1, S'_2, S'_3$ ;  $\pi, S'_1, S'_2$ ;  $\pi, S'_2, S'_3$ ;  $\pi, S'_3, S'_1$ , nous donne

$$h_1 + h_2 + h_3 = 0 \quad (1)$$

$$\varphi_1 + h_3 - \varphi_2 = 0 \quad (2)$$

$$\varphi_2 + h_1 - \varphi_3 = 0 \quad (3)$$

$$\varphi_3 + h_2 - \varphi_1 = 0 \quad (4)$$

Multiplions respectivement (2) et (3) par  $h_1$  et par  $(-h_3)$  et ajoutons membre à membre; il vient

$$\varphi_1 h_1 - \varphi_2 (h_1 + h_3) + \varphi_3 h_3 = 0$$

ou, en vertu de (1)

$$\varphi_1 h_1 + \varphi_2 h_2 + \varphi_3 h_3 = 0 \quad (5)$$

Soient  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  les distances du point  $P$  aux trois foyers  $F_1, F_2, F_3$  et  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  les valeurs au signe près des cotangentes des demi-angles au sommet des trois cônes. Convenons de donner à  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  les signes respectifs de  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ , nous aurons

$$\varphi_1 = \lambda_1 \rho_1 \quad \varphi_2 = \lambda_2 \rho_2 \quad \varphi_3 = \lambda_3 \rho_3$$

$\rho_1, \rho_2, \rho_3$  étant toujours positifs.

<sup>1</sup> En exprimant  $h_1, h_2, h_3$  en fonction de  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ , on a

$$\varphi_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \varphi_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \varphi_3(\varphi_2 - \varphi_1) = 0.$$

Etant données trois segments de même origine portés sur un même axe, la somme algébrique des produits de chacun d'eux par la différence des deux autres est nulle, puisque, dans cette somme, chaque produit de deux segments intervient deux fois et avec des signes contraires.

En y remplaçant  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  par ces valeurs, les relations (2), (3), (4) et (5) deviennent

$$\lambda_1 \rho_1 - \lambda_2 \rho_2 + h_3 = 0 \quad \lambda_2 \rho_2 - \lambda_3 \rho_3 + h_1 = 0 \quad \lambda_3 \rho_3 - \lambda_1 \rho_1 + h_2 = 0 \quad .$$

$$h_1 \lambda_1 \rho_1 + h_2 \lambda_2 \rho_2 + h_3 \lambda_3 \rho_3 = 0 \quad .$$

Ce sont les équations bipolaires et tripolaire de l'ovale de Descartes, rapportées à ses foyers.

Si nous remarquons que  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3|$ , nous voyons que l'équation bipolaire étant rapportée aux deux foyers intérieurs  $F_1$  et  $F_2$ , le foyer extérieur  $F_3$  est du côté du foyer intérieur pour lequel le coefficient du rayon vecteur a la plus petite valeur absolue et que l'équation bipolaire étant rapportée à un foyer intérieur et au foyer extérieur, le rayon vecteur correspondant à ce dernier est affecté du coefficient le plus petit en valeur absolue.

Sur une équation bipolaire  $\lambda \rho + \lambda' \rho' - k = 0$ , il est facile de voir si les deux foyers auxquels elle est rapportée sont ou non de même nature. Remplaçons-y successivement  $\rho$  et  $\rho'$  par les rayons vecteurs  $(0, 2b)$  et  $(2b, 0)$  qui correspondent aux deux foyers: si  $2b\lambda' - k$  et  $2b\lambda - k$  ont le même signe les deux foyers sont intérieurs; dans le cas contraire, un des deux foyers est intérieur, l'autre est extérieur.

Nous avons (fig. 1)  $h_1 < 0, h_2 > 0, h_3 < 0$  et pour l'ovale intérieure  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$ ; pour l'ovale extérieure,  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$ .

Si nous désignons par  $k, \lambda$  et  $\lambda'$  des quantités essentiellement positives, et si nous supposons  $\lambda' > \lambda$ , le tableau suivant nous indique les formes que prennent les équations des deux ovals conjugués suivant les foyers auxquelles elles sont rapportées.

Foyers	Ovale intérieure	Ovale extérieure
$F_1 F_2$	$\lambda \rho + \lambda' \rho' = k$	$\lambda' \rho' - \lambda \rho = k$
$F_2 F_3$	$\lambda \rho - \lambda' \rho' = k$	$\lambda' \rho' - \lambda \rho = k$
$F_3 F_1$	$\lambda \rho + \lambda' \rho' = k$	$\lambda' \rho' - \lambda \rho = k$

Ce tableau montre également comment on passe d'une équation de l'ovale à celle de l'ovale conjuguée rapportée aux deux mêmes foyers.

Etant donnée une équation bipolaire, quand on a calculé la position du troisième foyer, on peut calculer les  $h$ .

Connaissant la position de deux foyers, il est aisé de trouver la position des sommets. Désignons par  $a_f$  ( $f$  étant égal à 1, 2 ou 3)  $a'_f$ ,  $b_f$ ,  $b'_f$  les distances respectives du foyer  $F_f$  aux sommets  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  des deux ovales conjugués, et supposons, par exemple, l'ovale donnée par l'équation bipolaire  $\lambda_1 \rho_1 - \lambda_2 \rho_2 + h_3 = 0$ . Exprimant que le sommet  $A_1$  est sur la courbe nous avons  $\lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2 + h_3 = 0$ . Si nous appelons  $2b$  la distance des deux foyers  $F_1 F_2$ ,  $a_2 = a_1 + 2b$  et la relation précédente devient  $\lambda_1 a_1 - \lambda_2 (a_1 + 2b) + h_3 = 0$ , d'où nous pouvons tirer  $a_1$ .

D'autre part,

$$\lambda_2 a_2 - \lambda_3 a_3 = \lambda_2 a'_2 - \lambda_3 a'_3 = -h_1.$$

D'où  $\lambda_3 (a_3 - a'_3) = \lambda_2 (a_2 - a'_2)$ , relation qui nous fait connaître  $\lambda_3$ . On pourrait, connaissant  $h_3$  et  $h_1$  avoir  $h_2$  par la relation  $h_1 + h_2 + h_3 = 0$ . Ainsi une des équations bipolaires d'une ovale étant donnée, nous pouvons trouver les deux autres équations bipolaires et l'équation tripolaire. Si l'ovale est donnée par ses trois foyers et son équation tripolaire, nous pouvons déterminer ses deux sommets et trouver ses équations bipolaires.

D'après le tableau qui précède, l'équation  $\lambda \rho - \lambda' \rho' = k$  représente toujours une ovale intérieure rapportée aux foyers  $F_2$  et  $F_3$ . Les autres formes d'équations bipolaires indiquent simplement que l'ovale est intérieure ou extérieure. Pour savoir à quels foyers elle est rapportée, il convient de chercher la position de ses sommets et celle du point milieu 0 de l'intervalle qui les sépare: la disposition des deux foyers connus par rapport à 0, fait voir si ce sont  $F_1$ ,  $F_2$  ou  $F_3$ .

### 3. — L'ovale courbe anallagmatique.

Si on prend pour pôle un quelconque des trois foyers et pour axe la droite  $F_1 F_2 F_3$ , l'équation de l'ovale en coordonnées polaires  $\rho$  et  $\theta$  se présente sous la forme  $\rho^2 + P\rho + Q = 0$ ,  $P$  étant une fonction linéaire de  $\cos \theta$  et  $Q$  une constante. La transformation par rayons vecteurs réciproques autour du pôle

$\rho\sigma = Q$  conduit à l'équation  $Q + P\sigma + \frac{Q}{Q}\sigma^2 = 0$ . L'ovale est donc une courbe synallagmatique par rapport à chacun de ses foyers pris pour origine <sup>1</sup>.

Dans la figure 1, le quadrilatère inscriptible  $A'_1A'_2B'_2B'_1$  nous donne les relations

$$S_1A'_1 \cdot S_1B'_1 = S_1A'_2 \cdot S_1B'_2 \quad S_2A'_1 \cdot S_2B'_2 = S_2A'_2 \cdot S_2B'_1$$

$$S_3A'_1 \cdot S_3A'_2 = S_3B'_1 \cdot S_3B'_2 .$$

Les deux points de la quartique gauche qui sont sur une même génératrice du cône  $S_1$  correspondent l'un à l'ovale intérieure, l'autre à l'ovale extérieure et sont d'un même côté de  $S_1$ ; pour le cône  $S_2$  les deux points correspondent l'un à l'ovale intérieure, l'autre à l'ovale extérieure et sont de part et d'autre de  $S_2$ ; pour le cône  $S_3$ , les deux points correspondent tous deux soit à l'ovale intérieure, soit à l'ovale extérieure et sont d'un même côté de  $S_3$ . Chacune des ovals conjuguées est à elle-même son inverse par rapport à  $F_3$ , la puissance d'inversion  $m_3^2$  étant positive (cercle d'inversion réel passant par les points de contact des tangentes menées du foyer extérieur aux deux branches de la courbe. On a  $m_3^2 = a_3 \cdot a'_3 = b_3 \cdot b'_3$ ;  $a_3, a'_3, b_3$  et  $b'_3$  conservant les significations indiquées plus haut). Les tangentes menées du foyer extérieur à deux ovals conjuguées sont égales.

Les deux ovals conjuguées sont inverses l'une de l'autre par rapport à  $F_1$  et  $F_2$ : la puissance d'inversion  $m_1^2$  relative à  $F_1$  est positive (cercle d'inversion réel passant entre les deux courbes); la puissance d'inversion —  $m_2^2$  relative à  $F_2$  étant négative (cercle d'inversion imaginaire).

On a

$$m_1^2 = a_1 b_1 = a'_1 b'_1 \quad \text{et} \quad m_2^2 = a_2 b_2 = a'_2 b'_2 .$$

On trouverait aussi ces valeurs de  $m_1^2, m_2^2, m_3^2$  en calculant le terme constant  $Q$  de l'équation monopolaire qui correspond à chacun des trois foyers.

<sup>1</sup> L'ovale étant symétrique par rapport à l'axe  $F_1F_2F_3$  (puisque le plan  $V$  est un plan de symétrie pour les trois cônes), et la symétrie par rapport à un axe pouvant être considérée comme une inversion dont le centre s'est éloigné à l'infini dans une direction perpendiculaire à l'axe de symétrie, l'ovale possède quatre origines d'anallagmatisme comme toute quartique bicirculaire.

Partons du sommet  $A_1$ : l'inversion  $m_1^2$  nous mène en  $B_1$ , puis l'inversion  $m_2^2$  nous mène en  $A_2$ , et enfin l'inversion  $m_3^2$  nous ramène en  $A_1$ . Donc  $m_1^2 \cdot m_2^2 \cdot m_3^2 = 1$ .

Le foyer  $F_3$  a même puissance par rapport aux deux cercles de diamètre  $A_1A_2$  et  $B_1B_2$ : il est donc sur leur axe radical. Puisque, connaissant l'équation bipolaire  $\lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_2 + h_3 = 0$  d'une ovale, on en déduit facilement l'équation de l'ovale conjuguée et la position des sommets de cette dernière, nous obtenons ainsi une seconde construction du foyer extérieur  $F_3$ . On voit sans peine que  $F_1$  et  $F_2$  pourraient aussi se trouver par une construction d'axe radical:  $F_1$  est sur l'axe radical des deux cercles décrits sur  $A_1B_1$  et  $A_2B_2$  comme diamètres, et la corde commune aux deux cercles décrits sur  $A_1B_2$  et  $A_2B_1$  comme diamètres passe par  $F_2$ .

*Cercle tangent à l'ovale et passant par deux points donnés dont un de ses foyers.* — L'inversion anallagmatique autour du foyer par lequel doit passer le cercle à construire transforme ce cercle en une droite tangente à l'ovale et passant par le point inverse de l'autre point donné. Le point inverse de son point de contact avec l'ovale est le point où le cercle à construire touche l'ovale. En particulier, le cercle passant par  $F_1$  et  $F_2$  et tangent à l'ovale se déduit par inversion autour du foyer  $F_1$ , par exemple, de la tangente à l'ovale conjuguée qui passe par l'inverse de  $F_2$ .

#### 4. — *Sécantes passant par un foyer.*

D'une propriété bien connue de la transformation par rayons vecteurs réciproques, il résulte immédiatement que: 1<sup>o</sup> toute sécante à l'ovale menée par  $F_1$  est bissectrice des directions des tangentes aux deux points situés d'un même côté de l'axe où elle coupe les deux ovales conjugués; 2<sup>o</sup> toute sécante menée par  $F_2$  est bissectrice des directions des tangentes aux deux points situés de part et d'autre de l'axe où elle coupe ces deux ovales; 3<sup>o</sup> toute sécante menée par  $F_3$  est bissectrice des directions des tangentes aux deux points où elle coupe chacune des ovales intérieure et extérieure.



Si entre l'équation de l'ovale en coordonnées polaires rapportée à un de ses foyers et l'équation d'une droite quelconque de son plan

$$\rho(p \cos \theta + q \sin \theta) = r$$

on élimine  $\theta$ , on obtient une équation du quatrième degré en  $\rho$  dont les quatre racines sont les distances des foyers aux points d'intersection de la droite et de la courbe. Dans cette équation le quotient des coefficients de  $\rho^3$  et de  $\rho^4$  est une constante: donc la somme des quatre rayons vecteurs menés d'un foyer aux points d'intersection de la courbe avec une droite quelconque est constante. Nous pouvons le voir par des considérations géométriques simples dans le cas où la sécante passe par le foyer.

Par l'axe de l'un des cônes,  $S_1$  par exemple, menons un plan vertical quelconque  $V'$ . L'intersection de  $V'$  avec le cône  $S_2$  est une hyperbole à axe réel vertical. Le centre  $S'_2$  de cette hyperbole est toujours dans le plan horizontal qui passe par  $S_2$ , et l'angle de ses asymptotes est égal à l'angle au sommet du cône  $S_2$  (fig. 2).

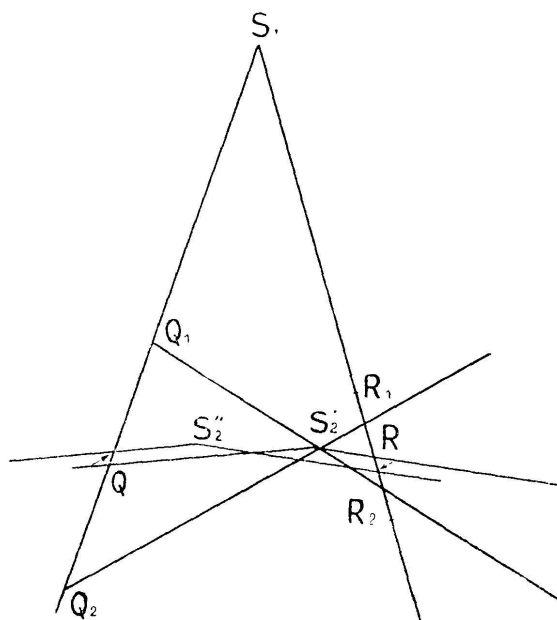


Fig. 2.

L'intersection de  $V'$  avec le cône  $S_1$  se compose de deux génératrices de ce cône. Soient  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  les points d'intersection de ces deux génératrices avec l'hyperbole, et  $S'_2Q$ ,  $S'_2R$  les diamètres conjugués des cordes  $Q_1 Q_2$  et  $R_1 R_2$ . Ces diamètres sont



comme les cordes correspondantes également inclinés sur la verticale. Nous avons

$$S_1 Q_1 + S_1 Q_2 = 2S_1 Q \quad \text{et} \quad S_1 R_1 + S_1 R_2 = 2S_1 R .$$

Faisons tourner le plan  $V'$  autour de l'axe du cône  $S_1$ : l'angle des deux génératrices passant par  $S_1$  ne change pas,  $S'_2$  se déplace dans  $V'$  le long d'une droite horizontale et vient en  $S''_2$ . L'angle des asymptotes ne change pas et par suite le système des deux diamètres conjugués subit une translation horizontale: les déplacements de  $Q$  et  $R$  sur les génératrices de  $S_1$  sont égaux et de sens contraire et la somme  $S_1 Q + S_1 R$  reste constante, quelle que soit l'orientation de  $V'$ . Projetons sur la trace horizontale de  $V'$ : nous voyons que la somme des distances d'un foyer aux points d'intersection de la courbe avec une sécante quelconque passant par ce foyer est constante.

Si nous prenons comme sécante l'axe  $F_1 F_2$ , nous voyons de plus que la constante est la même pour les foyers  $F_1$  et  $F_2$ .

### 5. — *Le foyer singulier.*

Les trois points  $F_1, F_2, F_3$ . auxquels leur propriété optique a fait donner le nom de foyers, sont aussi des foyers répondant à la définition de Plücker: le calcul prouve que ce sont les points d'intersection de tangentes menées à l'ovale par les points cycliques du plan.

L'ovale possède aussi un *foyer singulier*: elle passe par les points cycliques du plan et a des asymptotes qui la touchent en ces points.

Si nous supposons que  $S_2$  se déplace sur la verticale  $F_2 S_2$  (fig. 1), c'est-à-dire si nous faisons varier  $h_3$  en laissant fixes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , nous obtenons une famille d'ovales définies par la relation  $\lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2 = -h_3$ , où  $h_3$  est un paramètre variable. Dans l'équation en coordonnées cartésiennes correspondante, les termes du quatrième et du troisième degré sont indépendants de  $h_3$ , et, par suite, toutes ces ovales ont les mêmes asymptotes<sup>1</sup>. Il nous

<sup>1</sup> L'équation cartésienne de l'ovale de Descartes ne diffère que par une constante de celle du limaçon qui fait partie de la famille. L'ovale est le lieu des points d'égale puissance par rapport au limaçon.

suffira donc d'étudier ces asymptotes dans le cas particulier où  $S_2$  est sur le cône  $S_1$ , où l'ovale devient un *limaçon de Pascal*. En regardant cette courbe comme une conchoïde de cercle, et en prenant comme pôle son point double et comme axe polaire son axe de symétrie, on écrit immédiatement son équation en coordonnées polaires

$$\rho = 2r \cos \theta + l \quad \text{ou} \quad \rho^2 - 2r\rho \cos \theta + l\rho = 0.$$

Passant aux coordonnées cartésiennes rectangulaires, le pôle étant pris pour origine et l'axe polaire pour axe des  $x$ , on a

$$(x^2 + y^2 - 2rx)^2 = l^2(x^2 + y^2).$$

Les points cycliques sont points doubles: les tangentes aux points cycliques y rencontrent la courbe en trois points confondus. Soit  $y = ix + \delta$  une de ces asymptotes; l'équation aux abscisses des points de rencontre de cette droite avec la courbe doit avoir trois racines infinies. En portant la valeur  $y = ix + \delta$  dans l'équation de la courbe, et en exprimant que le coefficient de  $x^2$  est nul, nous obtenons la relation  $(\delta + ri)^2 = 0$ . Les points cycliques sont des points de rebroussement de l'ovale, et les asymptotes se coupent en un point réel ( $x = r, y = 0$ ) au centre du cercle de base du limaçon. Ce point est le *foyer singulier* commun aux ovals de la famille  $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = -h_3^1$ .

Calculons la valeur du rayon  $r$  en fonction de la distance  $2c$  des deux foyers et des coefficients  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Nous avons (fig. 3), en appelant C l'extrémité du diamètre du cercle de base du limaçon  $F_2C = 2r$ . D'après la définition de la conchoïde, ce cercle passe à égale distance de B et de A, points du limaçon situés sur son axe. On a  $2 F_2C = F_2A + F_2B$ .

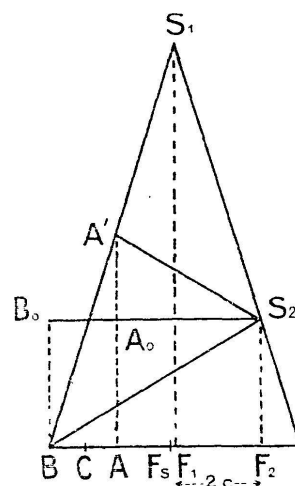


Fig. 3.

<sup>1</sup> Si nous supposons  $l = 2r$ , nous n'avons plus affaire à une ovale de Descartes, mais à une *cardioïde*. Le centre du cercle de base de la cardioïde est un foyer singulier.

D'autre part,

$$A_0 A' = \lambda_2 \cdot F_2 A = \lambda_1 (4c - F_2 A) \quad \text{d'où} \quad F_2 A = \frac{4\lambda_1 c}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

$$B_0 B = \lambda_2 \cdot F_2 B = \lambda_1 (F_2 B - 4c) \quad \text{d'où} \quad F_2 B = \frac{4\lambda_1 c}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Par suite

$$r = \frac{F_2 C}{2} = \frac{F_2 A + F_2 B}{4} = \lambda_1 c \left( \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) = \frac{2\lambda_1^2 c}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}.$$

Désignons par  $F_s$  le foyer singulier; ses distances aux trois foyers ordinaires sont <sup>1</sup>

$$F_s F_1 = \frac{2\lambda_2^2 c}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}, \quad F_s F_2 = \frac{2\lambda_1^2 c}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}, \quad F_s F_3 = 2 \frac{d^2}{c} \cdot \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}.$$

$F_s$  est extérieur à l'intervalle  $F_1 F_2$  et placé du côté de  $F_1$ .

## II. — NORMALE A L'OVALE.

L'ovale étant donnée par l'équation  $\lambda\rho + \lambda'\rho' = h$  rapportée à deux foyers  $F$  et  $F'$ , nous prenons sur la courbe un point  $I$ ,

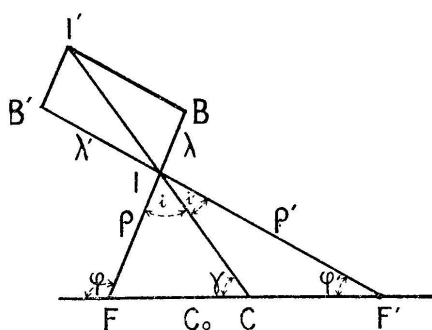


Fig. 4.

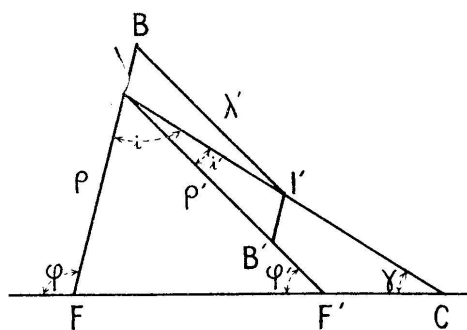


Fig. 5.

nous portons sur les rayons vecteurs  $FI$  et  $F'I$  des segments  $IB = \lambda$  et  $IB' = \lambda'$ , et nous complétons le parallélogramme  $BIB'I'$  (fig. 4 et 5): sa diagonale  $II'$  est la normale à l'ovale.

<sup>1</sup> En prenant  $F_s$  pour origine, l'équation cartésienne de l'ovale prend une forme où  $F_s F_1$ ,  $F_s F_2$  et  $F_s F_3$  interviennent de façon symétrique, se prêtant de façon commode à l'étude de la courbe.

La normale rencontre l'axe FF' en un point C situé entre F et F' si  $\lambda$  et  $\lambda'$  sont de même signe (fig. 4) et en dehors de l'intervalle FF' si  $\lambda$  et  $\lambda'$  sont de signe contraire (fig. 5). Le tableau des équations bipolaires montre que pour l'ovale intérieure, la normale passe entre F<sub>1</sub> et F<sub>2</sub> et que pour l'ovale extérieure, elle rencontre l'axe en des points extérieurs à l'intervalle F<sub>1</sub>F<sub>2</sub>.

Soient  $i$ ,  $i'$  et  $\gamma$  les angles que fait la normale avec les rayons vecteurs et avec l'axe FF'. Les deux triangles CFI et CF'I nous donnent

$$\frac{CF}{\rho} = \frac{\sin i}{\sin \gamma} \quad \text{et} \quad \frac{CF'}{\rho'} = \frac{\sin i'}{\sin \gamma}.$$

D'où

$$\frac{CF}{CF'} = \frac{\sin i}{\sin i'} \cdot \frac{\rho}{\rho'}.$$

Dans le triangle IBI'

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{|\lambda'|}{|\lambda|}.$$

Donc

$$\frac{CF}{CF'} = \frac{|\lambda'|}{|\lambda|} \cdot \frac{\rho}{\rho'}.$$

*Le rapport des segments déterminés sur FF' par la normale à l'ovale est égal au produit du rapport des rayons vecteurs adjacents par un facteur constant.*

Réciproquement, si la normale à une courbe détermine sur la droite passant par deux points fixes F et F' deux segments dont le rapport est égal au produit du rapport des deux rayons vecteurs adjacents par un facteur constant, la courbe est une ovale de Descartes. En effet, si

$$\frac{FC}{F'C} = \frac{|\lambda'|}{|\lambda|} \cdot \frac{\rho}{\rho'},$$

nous pouvons construire sur les directions des rayons vecteurs un parallélogramme de côtés égaux à  $\lambda$  et  $\lambda'$ .

Si nous connaissons le point d'intersection C d'une normale avec l'axe, nous connaissons le rapport  $\rho : \rho'$  et, si nous écrivons l'équation de la courbe sous la forme

$$\left(\lambda \frac{\rho}{\rho'} + \lambda'\right) \rho' = h,$$

nous pouvons déterminer  $\rho'$  et par suite  $\rho$ . Alors le point I est connu et CI est la normale cherchée.

Pour trouver l'angle  $\gamma$  de la normale avec l'axe, projetons le contour II'B sur l'axe focal et sur une droite qui lui soit perpendiculaire. Désignant par  $\varphi$  et  $\varphi'$  les angles des rayons vecteurs avec l'axe, nous obtenons

$$\text{II}' \cos \gamma - \lambda \cos \varphi - \lambda' \cos \varphi' = 0, \quad \text{II}' \sin \gamma - \lambda \sin \varphi - \lambda' \sin \varphi' = 0.$$

D'où

$$\text{tg } \gamma = \frac{\lambda \sin \varphi + \lambda' \sin \varphi'}{\lambda \cos \varphi + \lambda' \sin \varphi'}.$$

### III. POINTS OU L'OVALE PRÉSENTE UN MAXIMUM OU UN MINIMUM DE COURBURE.

#### 1. — *Sommets de l'ovale.*

Par raison de symétrie, les sommets situés sur l'axe correspondent à un maximum ou à un minimum de courbure.

1. *Construction du centre de courbure relatif à un sommet.* — Si le point I (fig. 4 et 5) se rapproche indéfiniment du sommet A, le point C, intersection de la normale en I avec FF', tend vers une position limite  $C_0$  qui est le centre de courbure en A, puisque par raison de symétrie, ce centre de courbure doit se trouver sur FF' et on a

$$\frac{C_0 F}{C_0 F'} = \frac{|\lambda'|}{|\lambda|} \frac{C_0 A}{C_0 A'}.$$

Le point  $C_0$  divisant FF' dans un rapport donné se détermine par une construction bien connue et cette construction est applicable à l'ellipse ( $\lambda = \lambda'$ ) et à l'hyperbole ( $\lambda = -\lambda'$ ).

2. *Sommets de l'ovale intérieure.* — Quand le point I se déplace sur une ovale intérieure à partir du sommet  $A_1$ , voisin du foyer  $F_1$ ,  $\rho_1$  augmente et l'équation de la courbe  $\lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2 = -h_3$  montre que  $\rho_2$  diminue. Alors  $\rho_1 : \rho_2$  augmente, ainsi que  $CF_1 : CF_2$

et le point C se rapproche de  $F_2$  et de  $A_2$ . La courbure passe donc par un maximum en  $A_1$ . On verrait de même qu'elle passe par un maximum en  $A_2$ <sup>1</sup>.

3. *Sommets de l'ovale extérieure.* — Considérons l'ovale extérieure comme la transformée de l'ovale intérieure conjuguée en prenant  $F_1$  pour centre d'inversion. Le cercle osculateur en  $A_1$  devient par inversion le cercle osculateur en  $B_1$  et comme le cercle osculateur en  $A_1$  est intérieur à l'ovale intérieure, le cercle osculateur en  $B_1$  est extérieur à l'ovale extérieure. D'autre part, le foyer  $F_1$  est intérieur au cercle osculateur en  $A_1$ , puisque les normales à l'ovale intérieure rencontrent l'axe entre les deux foyers:  $F_1$  est donc intérieur au cercle osculateur en  $B_1$ : en ce sommet la courbe tourne sa concavité vers  $F_1$  et présente un minimum de courbure.

En ce qui concerne le sommet  $B_2$ , il faut distinguer plusieurs cas:

$\alpha$ ) Si le foyer  $F_1$  est à l'intérieur du cercle osculateur en  $A_2$ , il est aussi à l'intérieur du cercle osculateur en  $B_2$  et, ce cercle étant extérieur à la courbe, l'ovale extérieure tourne en  $B_2$  sa concavité vers  $F_1$  et présente un minimum de courbure.

$\beta$ ) Si le cercle osculateur en  $A_2$  passe par  $F_1$ , il se transforme en une droite, et l'ovale extérieure présente au sommet  $B_2$  un point méplat.

$\gamma$ ) Enfin, si le foyer  $F_1$  est extérieur au cercle osculateur en  $A_2$ , il est aussi extérieur au cercle osculateur en  $B_2$  et, ce cercle étant extérieur à la courbe, l'ovale extérieure tourne en  $B_2$  sa convexité vers  $F_1$  et présente un maximum de courbure<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> On peut obtenir le même résultat d'une façon plus classique, mais qui exige quelques calculs. Soit un cercle de rayon  $R$  tangent au sommet de l'ovale. Prenons pour axes de coordonnées l'axe et la tangente au sommet. Les coordonnées d'un point  $P$  du cercle sont  $x = R(1 - \cos \varphi)$  et  $y = R \sin \varphi$ . Dans  $x$  et  $y$  remplaçons  $\cos \varphi$  et  $\sin \varphi$  par leurs développements en série en fonction de  $\varphi$  et négligeons les puissances supérieures à la quatrième. Calculons  $F_1P$  et  $F_2P$ . Portant leurs valeurs dans le premier membre de l'équation de l'ovale, nous obtenons une expression de la forme  $p\varphi^2 + q\varphi^4$ . Écrivons que le coefficient de  $\varphi^2$  est nul: l'équation  $p = 0$  nous fait connaître le rayon  $R_0$  du cercle osculateur. Le signe du coefficient de  $\varphi^4$ , quand on y remplace  $R$  par  $R_0$ , permet de savoir si la courbure au sommet envisagé est maxima ou minima.

<sup>2</sup> Dans ce dernier cas, le foyer  $F_1$  est intérieur au cercle osculateur en  $A_1$  et extérieur au cercle osculateur en  $A_2$ . Il y a donc sur chacune des moitiés de l'ovale intérieure entre  $A_1$  et  $A_2$  un point tel que le cercle osculateur en ce point passe par  $F_1$ , et le cercle osculateur au point correspondant de l'ovale extérieure est une droite: ce point homologue est un point d'inflexion.

Il y a entre les valeurs de  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $i_1$ ,  $i_2$  qui correspondent aux points d'inflexion une

4. *Condition pour que l'ovale extérieure soit une courbe convexe.* — Nous avons vu plus haut comment la forme d'une équation bipolaire nous permet de reconnaître s'il s'agit d'une ovale intérieure ou d'une ovale extérieure. Cherchons la condition pour qu'une ovale extérieure soit une courbe convexe. Des considérations d'optique vont nous guider.

La relation  $\lambda \sin i = |\lambda'| \sin i'$  nous montre que, si nous envisageons l'ovale comme la méridienne d'un dioptré pour lequel le premier et le second milieu ont des indices respectivement égaux à  $\lambda$  et  $\lambda'$  et si nous supposons un point lumineux placé en  $F$  dans le premier milieu, les rayons réfractés forment un faisceau homocentrique de centre  $F'$ . Supposons l'ovale rapportée à ses foyers intérieurs et prenons  $F_2$  comme point-objet. Si l'ovale possède en  $B_2$  un point méplat, les rayons lumineux venant de  $F_2$  sont réfractés au voisinage de  $B_2$  comme ils le seraient sous l'incidence normale par un dioptré plan, et on a  $\lambda_2 F_1 B_1 = \lambda_1 F_2 B_2$  ou  $\lambda_2 b_1 = \lambda_1 b'_2$ . Si la courbe tourne en  $B_2$  sa concavité vers  $F_2$ , l'image  $F_1$  se rapproche de  $B_2$ , et on a  $\lambda_2 b_2 < \lambda_1 b_1$  : c'est la condition pour que l'ovale extérieure soit une courbe convexe.

2. — *Points situés en dehors de l'axe et présentant un maximum ou un minimum de courbure.*

Soit  $M$  un des points de contact de la circonférence menée par  $F_1$  et  $F_2$  et bitangente à l'ovale. En ce point  $M$ , l'angle  $F_1 M F_2$ , formé par les rayons vecteurs, passe par un maximum. Il est égal à  $(i_1 + i_2)$  pour l'ovale intérieure (fig. 6) et à  $(i_1 - i_2)$  pour l'ovale extérieure. Nous avons donc, en  $M$ ,  $d(i_1 \pm i_2) = 0$ . D'autre part, de la relation

$$\lambda_1 \sin i_1 = \lambda_2 \sin i_2, \quad \text{nous tirons} \quad \lambda_1 \cos i_1 di_1 = \lambda_2 \cos i_2 di_2.$$

---

relation simple qu'on trouve aisément par des considérations d'optique. Dans le plan de la figure, les rayons lumineux émanés de  $F_2$  sont réfractés en ces points par un dioptré ayant l'ovale pour méridienne comme ils le seraient par un dioptré plan osculateur. La relation qui détermine la position de la focale tangentielle est

$$\frac{\lambda_1 \cos^2 i_1}{\rho_1} = \frac{\lambda_2 \cos^2 i_2}{\rho_2}.$$

Par suite  $d(i_1 \pm i_2) = 0$  équivaut à

$$\left(1 \pm \frac{\lambda_1 \cos i_1}{\lambda_2 \cos i_2}\right) di_1 = 0 .$$

Le facteur entre parenthèses ne pouvant s'annuler,  $di_1 = 0$  et  $di_2 = 0$ ; alors  $i_1$  et  $i_2$  passent en M par un maximum. Soit MJ la normale.

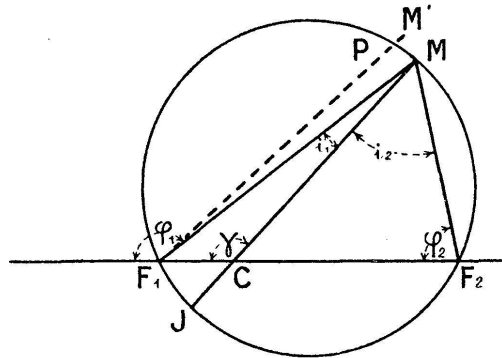


Fig. 6.

Prenons sur l'ovale un point  $M'$  infiniment voisin de  $M$ ; la droite  $F_1M'$  prolongée rencontre la circonférence au point  $P$ . Les angles inscrits  $F_1PJ$  et  $F_1MJ$  sont égaux. La normale  $M'$ , faisant avec  $F_1M'$  un angle égal à  $i_1$  au second ordre près, puisque  $i_1$  est un maximum, est parallèle à  $PJ$  et, puisque  $M'P$  est du second ordre, cette normale passe, au second ordre près, par le point  $J$ .  $J$  est par conséquent un point de rebroussement de la développée et en  $M$  la courbure de l'ovale passe par un minimum (pour l'ovale intérieure) par un maximum (pour l'ovale extérieure). Nous voyons donc que le cercle tangent en  $M$  ayant un rayon égal à la moitié du rayon de courbure en ce point passe par les deux foyers intérieurs. Entre les angles  $i_1$  et  $i_2$ , les rayons vecteurs  $\rho_1$  et  $\rho_2$  et le rayon de courbure  $R$  nous avons en  $M$  les relations

$$2R = \frac{\rho_1}{\cos i_1} = \frac{\rho_2}{\cos i_2} .$$

En tout point de l'ovale  $\gamma = \varphi_1 - i_1 = \varphi_2 + i_2$  d'où

$$d\gamma = d\varphi_1 - di_1 = d\varphi_2 + di_2 .$$

En  $M$  on a  $d\gamma = d\varphi_1 = d\varphi_2$ .



## IV. — APPLICATIONS A L'OPTIQUE.

1. — *Ovales stigmatiques par rapport à deux points donnés.*

On sait depuis Descartes que la méridienne d'un *dioptre stigmatique* pour deux points donnés P et P', situés dans deux milieux optiques d'indices respectifs 1 et  $n$ , est une ovale de Descartes dont ces points sont deux foyers <sup>1</sup>.

On obtient l'équation de cette ovale en appliquant la *loi du tautochronisme*, c'est-à-dire en écrivant que le temps mis par la lumière pour aller dans le premier milieu du point P à un point I de l'ovale et du point I au point P' dans le second milieu est une constante. Les rayons vecteurs  $\rho$  et  $\rho'$  étant positifs, on affectera  $\rho$  du signe + ou du signe — suivant que P sera un point lumineux réel ou virtuel;  $\rho'$  sera affecté du signe + ou du signe — suivant que P' sera une image réelle ou virtuelle. Désignant par  $\rho_0$  et  $\rho'_0$  les distances de P et P' au point S où la méridienne rencontre l'axe PP', nous écrivons la loi du tautochronisme sous la forme

$$\pm \rho \pm n\rho' = \pm \rho_0 \pm n\rho'_0 .$$

Les deux points P et P' étant donnés, il y a pour toute position de S une ovale stigmatique, qui suivant la distribution des points P, P' et S peut être une ovale intérieure ou une ovale extérieure. D'après ce qui a été dit plus haut (I § 2 et III, § 1), nous pourrions reconnaître sa nature, savoir à quels foyers elle est rapportée et dire si au point S elle présente un maximum ou un minimum de courbure. Des considérations très simples vont nous fournir directement ce dernier renseignement dans le cas où P et P' sont conjugués par rapport à un dioptre sphérique de sommet S.

Supposons que le dioptre sphérique tourne sa convexité du

---

<sup>1</sup> Un système optique est *stigmatique* pour deux points P et P' si tous les rayons incidents venant de P ont pour conjugués des rayons passant par P'. Le système est *aplanétique* quand il est stigmatique pour les points infiniment voisins de P et P', situés au voisinage de son axe dans deux plans perpendiculaires à l'axe.

côté d'où vient la lumière et que le second milieu est plus réfringent que le premier ( $n > 1$ ). Nous avons à distinguer un certain nombre de cas.

1. P réel infiniment éloigné; P' coïncide avec le foyer-image. L'ovale se réduit à une ellipse, présentant en S un *maximum* de courbure.

2. P réel plus éloigné de S que le foyer objet; P' est réel (fig. 7). La condition du tautochronisme donne  $\rho + n\rho' = k$ .

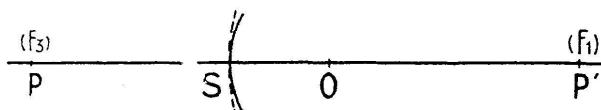


Fig. 7.

L'ovale, indiquée schématiquement en pointillé, est une *ovale intérieure* rapportée aux foyers  $F_3$  et  $F_1$  (voir le tableau, I § 2) et P' ne peut correspondre à  $F_3$  puisque l'on a  $n > 1$ <sup>1</sup>. Donc P correspond à  $F_3$  et P' à  $F_1$ . Il y a un *maximum* de courbure en S.

3. P réel placé au foyer-objet; P' est à l'infini. L'ovale devient une hyperbole. *Maximum* de courbure en S.

4. P réel et P' virtuel (fig. 8), Nous avons

$$\rho - n\rho' = \rho_0 - n\rho'_0 < 0$$

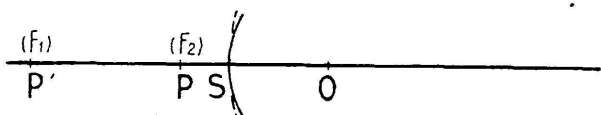


Fig. 8.

puisque  $\rho'_0 > \rho_0$  et  $n > 1$ . Il s'agit d'une *ovale extérieure*. Comme en S elle tourne sa convexité vers les foyers P et P', P' correspond à  $F_1$  et P à  $F_2$ . Il y a un *maximum* de courbure en S.

5. P et P' coïncident avec S. L'ovale se réduit à un point.

6. P virtuel placé entre le sommet S et le centre de courbure O du dioptré sphérique; P' est réel entre P et O (fig. 9). Nous avons

$$-\rho + n\rho' = -\rho_0 + n\rho'_0 > 0$$

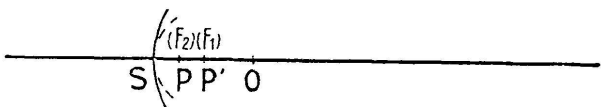


Fig. 9.

<sup>1</sup> P' ne peut jamais correspondre à  $F_3$ , ni P à  $F_1$ .

puisque  $\rho'_0 > \rho_0$  et  $n > 1$ . C'est l'équation d'une ovale *extérieure*. La courbe tournant en S sa concavité vers P et P', P' correspond à F<sub>1</sub> et P à F<sub>2</sub>. Il y a un *minimum* de courbure en S.

7. P et P' coïncident avec O. L'ovale se réduit au cercle méridien du dioptré puisque les foyers F<sub>1</sub> et F<sub>2</sub> viennent en coïncidence.

8. P virtuel au-delà de O et en deçà du point stigmatique objet du dioptré (fig. 10).

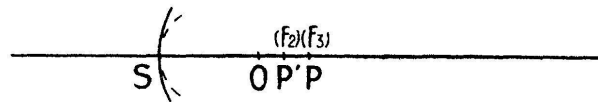


Fig. 10.

Si P est virtuel et placé au-delà de O, P' est réel et placé entre O et P. Nous avons

$$-\rho + n\rho' = -\rho_0 + n\rho'_0.$$

Quand P se déplace vers la droite à partir de O,  $-\rho_0 + n\rho'_0$  part de la valeur positive  $(n - 1) SO$  et décroît pour s'annuler quand P atteint le point stigmatique objet. Nous reconnaissons l'équation d'une ovale *extérieure*. Il y a un *minimum* de courbure en S.

9. P virtuel placé au point stigmatique objet, P' au point stigmatique image. Nous avons  $-\rho + n\rho' = 0$ . L'ovale se réduit au cercle méridien du dioptré sphérique.

10. P virtuel placé au-delà du point stigmatique objet; P' est entre O et P (fig. 11). Nous avons

$$-\rho + n\rho' = -\rho_0 + n\rho'_0 < 0.$$

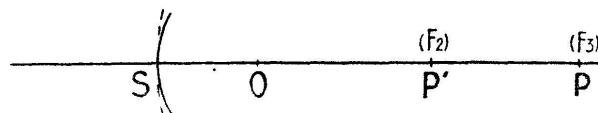


Fig. 11.

C'est l'équation d'une ovale *intérieure* rapportée aux foyers F<sub>2</sub> et F<sub>3</sub>: F<sub>2</sub> est en P', F<sub>3</sub> en P. Il y a un *maximum* de courbure en S.

On peut faire la même discussion si,  $n$  étant toujours plus grand que 1, le dioptré tourne sa concavité du côté d'où vient la lumière. Enfin, pour passer aux cas où on aurait  $n < 1$ , il suffirait d'appliquer le principe du retour inverse des rayons lumineux.

Ce mode de raisonnement s'applique aussi aux *miroirs stigmatiques* pour deux points donnés. Dans le cas de la réflexion ( $n = -1$ ), l'ovale se réduit à une conique, dont la courbure aux sommets sur l'axe est toujours un *maximum*.

## 2. — Aberration du dioptré sphérique.

Pour les rayons centraux, l'action du dioptré sphérique est la même que celle du dioptré stigmatique ayant pour méridienne l'ovale dont le cercle osculateur en  $S$  coïncide avec le cercle  $O$ . Si cette ovale présente en  $S$  un *maximum* de courbure (fig. 12), l'effet optique réalisé en chaque point  $I$  par la substitution du dioptré stigmatique au dioptré sphérique est celui que produirait en  $I$  l'adjonction au dioptré sphérique d'un prisme d'angle très petit à arête tournée vers l'axe. Ce prisme déviant les rayons vers sa base, nous en concluons que les rayons marginaux réfractés par le dioptré sphérique rencontrent l'axe en un point  $P''$  plus rapproché du sommet  $S$  que le point  $P'$  où se croisent les rayons centraux. L'aberration est dite *sous-correctée*. Si l'ovale présente en  $S$  un minimum de courbure (fig. 13), l'effet optique réalisé

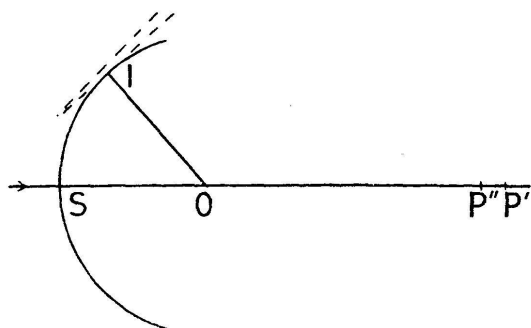


Fig. 12.

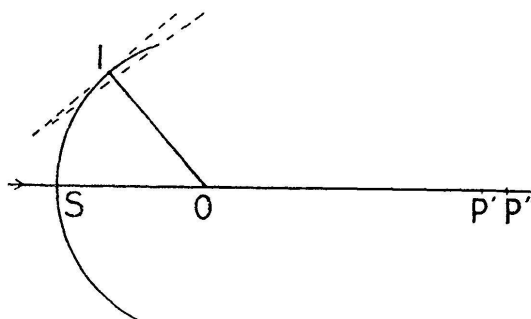


Fig. 13.

par la substitution du dioptré sphérique au dioptré stigmatique est celui que produirait en  $I$  l'adjonction au dioptré stigmatique d'un petit prisme à arête tournée vers l'axe: nous en concluons

que les rayons marginaux réfractés par le dioptré sphérique rencontrent l'axe en un point  $P''$  plus éloigné de  $S$  que  $P'$ . L'aberration est dite *surcorrigée* <sup>1</sup>.

D'après ce qui a été dit au paragraphe précédent, l'aberration du dioptré sphérique convexe et convergent est surcorrigée quand le point lumineux objet  $P$  se trouve entre le sommet du dioptré et son centre de courbure; quand  $P$  est extérieur à cet intervalle, l'aberration est souscorrigée. L'aberration du miroir sphérique garde toujours le même sens, quelle que soit la position du point-objet sur l'axe: elle est toujours souscorrigée pour le miroir sphérique concave et surcorrigée pour le miroir sphérique convexe.

### 3. — *Surface de l'onde réfractée de chemin optique nul dans le cas d'un dioptré sphérique et d'une onde incidente sphérique.*

L'ovale de Descartes se rencontre encore quand on cherche la surface de l'onde réfractée de chemin optique nul donnée par un dioptré sphérique, le point-objet  $A$  étant à distance finie <sup>2</sup>.

<sup>1</sup> On peut, en précisant ces indications, calculer la valeur de l'aberration. Prenons sur l'ovale et sur son cercle osculateur au sommet deux points voisins situés à une même distance infiniment petite  $h$  de l'axe. Menons en ces points les normales à l'ovale et au cercle. Les angles  $\gamma$  et  $\gamma_0$  qu'elles font respectivement avec l'axe sont des infiniment petits; leur différence  $\psi = |\gamma - \gamma_0|$  est l'angle du petit prisme additionnel. Pour avoir  $\gamma$ , nous utilisons l'expression de  $\tan \gamma$  donnée dans la deuxième partie de cette note, en développant les sinus et cosinus en série jusqu'au troisième ordre inclusivement et tenant compte de la relation qui existe entre les distances de deux points conjugués au sommet d'un dioptré sphérique d'indice  $n$  et de rayon  $R$ . Nous trouvons

$$\psi = \frac{n+1}{2n^2} i^2 \omega,$$

$\omega$  étant l'angle du rayon incident avec la droite joignant le point d'incidence au point stigmatique objet du dioptré sphérique. La déviation imprimée par ce prisme d'angle  $\psi$  au rayon réfracté est

$$\delta = (n-1)\psi = \frac{n^2-1}{2n^2} i^2 \omega.$$

Le déplacement correspondant du point d'intersection de ce rayon avec l'axe est  $\delta \cdot IP' : \sin \varphi'$ . Comme  $\delta$  est du troisième ordre infinitésimal et  $\varphi'$  du premier ordre, nous pouvons remplacer  $\sin \varphi'$  par la partie principale de  $\varphi'$ , c'est-à-dire par  $h : SP'$ , et  $IP'$  par  $SP'$  qui lui est égal à un infiniment petit du second ordre près. Donc

$$P'P'' = \delta \cdot \frac{SP'^2}{h} = \frac{n^2-1}{2n^2} \cdot \frac{SP'^2}{h} \cdot i^2 \omega.$$

<sup>2</sup> Si le point-objet est à l'infini, la surface d'onde réfractée de chemin nul est rejetée à l'infini.

Soient  $O$  le centre de courbure du dioptre,  $AI$  un rayon incident quelconque,  $OI$  la normale (fig. 14 et 15). La circonférence menée

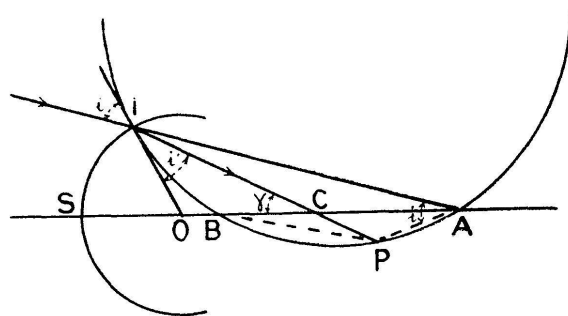


Fig. 14.

par  $A$  et  $I$  et tangente à  $OI$  coupe la droite  $OA$  en un point fixe  $B$  et  $OB \cdot OA = OI^2$ . Soient  $P$  le second point où le rayon réfracté  $IP$

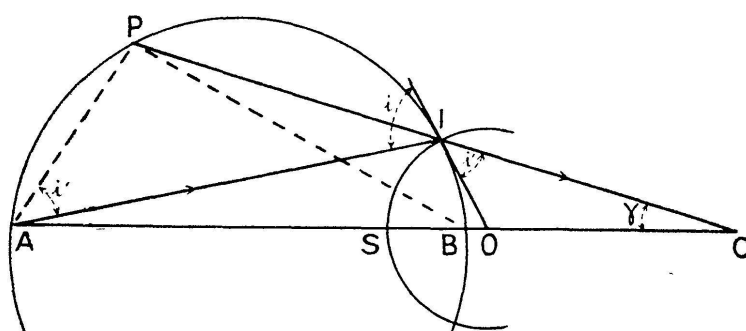


Fig. 15.

coupe la circonférence  $AIB$ , et  $C$  l'intersection de  $OA$  et de  $IP$ . Le triangle  $AIP$  nous donne

$$\frac{PI}{AI} = \frac{\sin i'}{\sin i} = \frac{1}{n}.$$

Les temps employés par la lumière pour aller de  $A$  à  $I$  dans le premier milieu et de  $P$  à  $I$  dans le second milieu sont égaux. Le lieu du point  $P$  est la méridienne de la surface d'onde réfractée de chemin optique nul. Nous avons, dans les triangles  $PAC$  et  $PBC$ ,

$$\frac{PA}{CA} = \frac{\sin \gamma}{\sin APC} \quad \text{et} \quad \frac{PB}{CB} = \frac{\sin \gamma}{\sin BPC}.$$

D'où

$$\frac{CB}{CA} = \frac{\sin BPC}{\sin APC} \cdot \frac{PB}{PA} \quad \text{ou} \quad \frac{CB}{CA} = \frac{\sin BAI}{\sin ABI} \cdot \frac{PB}{PA}.$$

Le triangle AIB donne

$$\frac{\sin BAI}{\sin ABI} = \frac{BI}{AI}.$$

Donc

$$\frac{CB}{CA} = \frac{BI}{AI} \cdot \frac{PB}{PA} = \frac{SB}{SA} \cdot \frac{PB}{PA} \quad \text{ou} \quad \frac{CB}{CA} = \frac{R - R^2 : a}{a} \frac{PB}{PA}.$$

D'après ce que nous avons vu plus haut (II, § 1), PC est normale à une ovale de Descartes dont deux foyers sont A et B. Un des sommets est à une distance  $\frac{SA}{n}$  du sommet du dioptré. La connaissance de la *nature* de cette ovale donnerait directement le *sens* de l'aberration pour le point A, mais le procédé artificiel indiqué au paragraphe précédent est plus simple.

#### 4. — Condensateur cardioïde.

Nous signalerons encore ici, bien que l'ovale de Descartes n'y intervienne pas, une application *catoptrique* de la cardioïde.

La cardioïde peut être considérée comme engendrée par un point d'un cercle qui roule extérieurement sur un cercle égal.

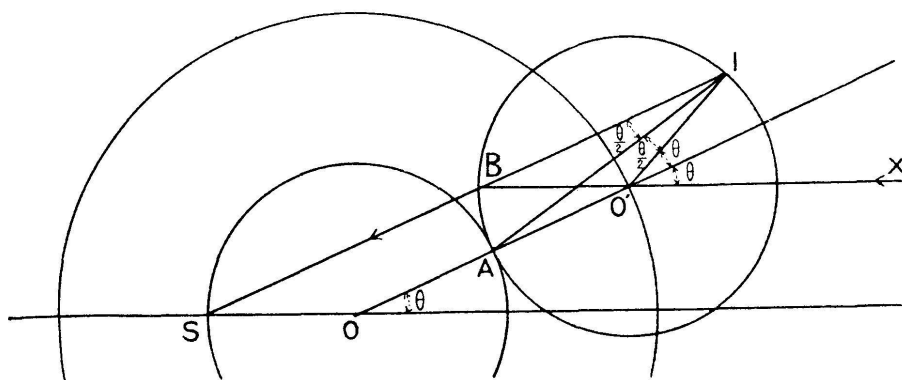


Fig. 16.

Soient O le centre du cercle de base, O' une position quelconque du centre du cercle mobile, I le point correspondant de la cardioïde et S son point de rebroussement (fig. 16). Le trapèze

$SIO'O$  est isocèle. La droite  $IA$  normale à la cardioïde est bissectrice de l'angle  $SIO'$ ;  $O'B$  est parallèle à  $SO$ ;  $OO'$  est bissectrice de l'angle formé par les droites  $O'I$  et  $BO'$  prolongée. Traçons le cercle ayant  $O$  pour centre et passant par  $O'$ .

Un rayon lumineux  $XO'$  parallèle à l'axe se réfléchit sur le cercle suivant  $O'I$ , puis sur la cardioïde suivant  $IS$ . L'association du miroir sphérique convexe, ayant pour centre le foyer singulier et de rayon égal au diamètre du cercle de base, à un miroir concave de révolution, ayant pour méridienne la cardioïde transforme un faisceau de rayons parallèles à l'axe en un faisceau homocentrique de sommet  $S$ . Ce système optique est stigmatique pour le point  $S$  et le point infiniment éloigné de son axe et, de plus, il est aplanétique, car le rayon incident et le rayon deux fois réfléchi se coupant sur la circonférence de cercle de centre  $S$  et de rayon  $SB = OO'$ , la condition d'aplanétisme (condition des sinus) se trouve satisfaite. Ce système catoptrique est réalisé dans le condensateur cardioïde de Zeiss, qui s'emploie avec le microscope pour l'éclairage à fond noir et l'ultramicroscopie. Comme on n'utilise qu'une faible portion de la cardioïde au voisinage du point  $I$ , on la remplace par une portion de son cercle osculateur en  $I$ . Le rayon de courbure de ce cercle se détermine facilement. Le miroir concave employé est alors une zone empruntée à la surface d'un miroir torique.

---