MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

A propos d'une Note de M. Lainé « Sur quelques classes particulières de polynomes ».

Dans sa Note intitulée « Sur quelques classes particulières de polynomes » (*Enseign. math.* 25, 1926, p. 191-196; nous citerons ce travail par E. M.), M. Lainé a étudié, entre autres, les polynomes de degré n qui satisfont à l'équation différentielle

$$(x^2 + 1)y'' + (2(1 - a)x + b)y' - n(n + 1 - 2a)y = 0 \qquad (a)$$

$$(a\,, \; b \quad \text{réels}, \quad b \neq 0)\;.$$

Nous allons montrer que ces polynomes se déduisent des polynomes de Jacobi à l'aide d'une transformation simple, et que, de même, les formules (8) et (9) (*E. M.*, p. 194, 195) sont la conséquence d'une identité trouvée par le même auteur (*Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe*, Crelles Journal für reine und angewandte Mathematik 56, 1859; Gesammelte Werke Bd. 6, p. 184 et suiv.). M. Lainé s'est borné au domaine réel.

Nous posons

$$x = - 2i\xi + i\;; \qquad \xi = \frac{ix + 1}{2}\;, \qquad (b)$$

de sorte que l'équation différentielle a) devient une équation différentielle hypergéométrique dont les paramètres ont les valeurs

$$\alpha = 1 - 2a + n\;; \qquad \beta = - n\;; \qquad \gamma = 1 - a - \frac{ib}{2}\;. \qquad (c)$$

Celle-ci, pourvu que γ soit $\neq 0, - 1, - 2 \ldots$, a pour intégrale particulière le polynome

$$F(\alpha\,, \beta\,, \gamma\,, \xi) = G_n\left(1 - 2a\,, 1 - a - \frac{ib}{2}\,, \xi\right)\,, \qquad (d)$$

où $F(\alpha, \beta, \gamma, \xi)$ désigne la série hypergéométrique de Gauss, et $G_n(p, q, \xi)$ le n-ième polynome de Jacobi (pour la notation voir COURANT-HILBERT, *Methoden der mathematischen Physik*, Berlin 1925, p. 74-75). D'après Jacobi (loc. cit., équation (7)), on a

$$\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)F(\alpha, \beta, \gamma, \xi)$$

$$= (\xi(1-\xi))^a\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)^{\frac{ib}{2}} \frac{d^n}{d\xi^n}\left[(\xi(1-\xi))^{n-a}\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)^{\frac{-ib}{2}}\right] \qquad (e)$$

où α, β, γ ont la signification c). En vertu de b) et de la formule connue

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{2i}\lg\frac{1+ix}{1-ix},$$

on peut donner à l'expression e) la forme (f)

$$\left(\frac{-i}{2}\right)^n (x^2+1)^a e^{-b \operatorname{arc\,tg} x} \frac{d^n}{dx^n}(x^2+1)^{n-a} e^{b \operatorname{arc\,tg} x} = \left(\frac{-i}{2}\right)^n \prod_n (x)$$

en utilisant la définition (8) de M. Lainé. Les équations e) et f) nous montrent alors pour $a = \frac{n+1}{2}$, que, en ce cas, $\Pi_n(x)$ prend la valeur constante

$$P_n = (2i)^n \prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{n-1}{2} - \frac{ib}{2} + k\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(b + i(2k-(n-1))\right),$$

donc pour $n = 2\nu$ *pair*

$$P_{2\nu} = \prod_{k=0}^{\nu-1}\left[b + i(2k-(2\nu-1))\right]\left[b - i(2k-(2\nu-1))\right]$$

$$= \prod_{m=1}^{\nu}(b^2+(2m-1)^2$$

et pour $n = 2\nu+1$ *impair*

$$P_{2\nu+1} = b\prod_{k=0}^{\nu-1}(b+i(2k-2\nu))(b-i(2k-2\nu)) = b\prod_{m=1}^{\nu}(b^2+4m^2).$$

Ce sont les formules (9) de la Note de M. Lainé (*E. M.*, p. 195).

Enfin, il résulte facilement des « Relationes inter functiones contiguas » de GAUSS (Disquisitiones generales circa seriem infinitam

$1 + \frac{\alpha . \beta}{1 . \gamma} x + \ldots$; *Commentationes societatis Gottingensis recent.* Bd. 2, 1813; Werke Bd. 3, p. 125 et suiv.) [1], [2], [7], qu'on a

$$\begin{aligned} &\alpha(\beta - \alpha + 1)(\gamma - \beta) F(\alpha + 1, \beta - 1, \gamma, \xi) \\ &\qquad + \beta(\beta - \alpha - 1)(\gamma - \alpha) F(\alpha - 1, \beta + 1, \gamma, \xi) \\ &+ (\beta - \alpha)[\gamma(\beta + \alpha - 1) - 2\alpha\beta - (\beta - \alpha - 1)(\beta - \alpha + 1)\xi] F(\alpha, \beta, \gamma, \xi) = 0, \end{aligned}$$

et quand on y pose

$$\alpha = n + p ; \qquad \beta = -n ; \qquad \gamma = q ,$$

on trouve pour les polynomes de Jacobi la formule de récurrence

$$\begin{aligned} &(n + p)(n + q)(2n + p - 1) G_{n+1}(p, q, \xi) \\ &\qquad + n(2n + p + 1)(n + p - q) G_{n-1}(p, q, \xi) \\ &+ (2n + p)((p - 1)q + 2n(n + p) - (2n + p - 1)(2n + p + 1)\xi) G_n = 0 . \end{aligned}$$

En y introduisant les valeurs (b), (c) et la notation $\Pi_n(x)$ de M. Lainé, on retrouve sa dernière formule (p. 196). On constate ainsi que cette formule est une conséquence presque immédiate de relations classiques bien connues.

Jena, 18.IV.1929.

Hermann SCHMIDT.