

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	28 (1929)
<b>Heft:</b>	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
<b>Kapitel:</b>	propos d'une Note de M. Lainé « Sur quelques classes particulières de polynomes ».
<b>Autor:</b>	Schmidt, Hermann

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 31.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

---

## A propos d'une Note de M. Lainé « Sur quelques classes particulières de polynomes ».

Dans sa Note intitulée « Sur quelques classes particulières de polynomes » (*Enseign. math.* 25, 1926, p. 191-196; nous citerons ce travail par E. M.), M. LAINÉ a étudié, entre autres, les polynomes de degré  $n$  qui satisfont à l'équation différentielle

$$(x^2 + 1)y'' + (2(1 - a)x + b)y' - n(n + 1 - 2a)y = 0 \quad (a)$$

$(a, b \text{ réels}, b \neq 0)$ .

Nous allons montrer que ces polynomes se déduisent des polynomes de JACOBI à l'aide d'une transformation simple, et que, de même, les formules (8) et (9) (E. M., p. 194, 195) sont la conséquence d'une identité trouvée par le même auteur (*Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe*, Crelles Journal für reine und angewandte Mathematik 56, 1859; *Gesammelte Werke* Bd. 6, p. 184 et suiv.). M. Lainé s'est borné au domaine réel.

Nous posons

$$x = -2i\xi + i; \quad \xi = \frac{ix + 1}{2}, \quad (b)$$

de sorte que l'équation différentielle a) devient une équation différentielle hypergéométrique dont les paramètres ont les valeurs

$$\alpha = 1 - 2a + n; \quad \beta = -n; \quad \gamma = 1 - a - \frac{ib}{2}. \quad (c)$$

Celle-ci, pourvu que  $\gamma$  soit  $\neq 0, -1, -2 \dots$ , a pour intégrale particulière le polynome

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \xi) = G_n\left(1 - 2a, 1 - a - \frac{ib}{2}, \xi\right), \quad (d)$$

où  $F(\alpha, \beta, \gamma, \xi)$  désigne la série hypergéométrique de Gauss, et  $G_n(p, q, \xi)$  le  $n$ -ième polynôme de Jacobi (pour la notation voir COURANT-HILBERT, *Methoden der mathematischen Physik*, Berlin 1925, p. 74-75). D'après Jacobi (loc. cit., équation (7)), on a

$$\begin{aligned} & \gamma(\gamma + 1) \dots (\gamma + n - 1) F(\alpha, \beta, \gamma, \xi) \\ &= (\xi(1 - \xi))^a \left( \frac{\xi}{1 - \xi} \right)^{\frac{ib}{2}} \frac{d^n}{d\xi^n} \left[ (\xi(1 - \xi))^{n-a} \left( \frac{\xi}{1 - \xi} \right)^{\frac{-ib}{2}} \right] \quad (e) \end{aligned}$$

où  $\alpha, \beta, \gamma$  ont la signification  $c$ ). En vertu de  $b$ ) et de la formule connue

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{1}{2i} \lg \frac{1+ix}{1-ix},$$

on peut donner à l'expression  $e$ ) la forme  $(f)$

$$\left( \frac{-i}{2} \right)^n (x^2 + 1)^a e^{-b \operatorname{arc} \operatorname{tg} x} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 + 1)^{n-a} e^{b \operatorname{arc} \operatorname{tg} x} = \left( \frac{-i}{2} \right)^n \prod_n (x)$$

en utilisant la définition (8) de M. Lainé. Les équations  $e$ ) et  $f$ ) nous montrent alors pour  $a = \frac{n+1}{2}$ , que, en ce cas,  $\Pi_n(x)$  prend la valeur constante

$$P_n = (2i)^n \prod_{k=0}^{n-1} \left( -\frac{n-1}{2} - \frac{ib}{2} + k \right) = \prod_{k=0}^{n-1} (b + i(2k - (n-1))) ,$$

donc pour  $n = 2v$  pair

$$\begin{aligned} P_{2v} &= \prod_{k=0}^{v-1} [b + i(2k - (2v-1))] [b - i(2k - (2v-1))] \\ &= \prod_{m=1}^v (b^2 + (2m-1)^2) \end{aligned}$$

et pour  $n = 2v + 1$  impair

$$P_{2v+1} = b \prod_{k=0}^{v-1} (b + i(2k - 2v)) (b - i(2k - 2v)) = b \prod_{m=1}^v (b^2 + 4m^2) .$$

Ce sont les formules (9) de la Note de M. Lainé (*E. M.*, p. 195).

Enfin, il résulte facilement des « Relationes inter functiones contiguas » de GAUSS (*Disquisitiones generales circa seriem infinitam*

$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \dots$ ; *Commentationes societatis Gottingensis recent.* Bd. 2, 1813; *Werke* Bd. 3, p. 125 et suiv.) [1], [2], [7], qu'on a

$$\begin{aligned} & \alpha(\beta - \alpha + 1)(\gamma - \beta) F(\alpha + 1, \beta - 1, \gamma, \xi) \\ & \quad + \beta(\beta - \alpha - 1)(\gamma - \alpha) F(\alpha - 1, \beta + 1, \gamma, \xi) \\ & + (\beta - \alpha)[\gamma(\beta + \alpha - 1) - 2\alpha\beta - (\beta - \alpha - 1)(\beta - \alpha + 1)\xi] F(\alpha, \beta, \gamma, \xi) = 0, \end{aligned}$$

et quand on y pose

$$\alpha = n + p; \quad \beta = -n; \quad \gamma = q,$$

on trouve pour les polynomes de Jacobi la formule de récurrence

$$\begin{aligned} & (n + p)(n + q)(2n + p - 1) G_{n+1}(p, q, \xi) \\ & \quad + n(2n + p + 1)(n + p - q) G_{n-1}(p, q, \xi) \\ & + (2n + p)((p - 1)q + 2n(n + p) - (2n + p - 1)(2n + p + 1)\xi) G_n = 0. \end{aligned}$$

En y introduisant les valeurs (b), (c) et la notation  $\Pi_n(x)$  de M. Lainé, on retrouve sa dernière formule (p. 196). On constate ainsi que cette formule est une conséquence presque immédiate de relations classiques bien connues.

Jena, 18.IV.1929.

Hermann SCHMIDT.