AGREGATION DE MATHÉMATIQUES (1928)

supérieurs déterminés par le cercle sur ces transversales soient égaux aux segments inférieurs de ces transversales.

THÉORÈME 2. — *Dans tout triangle:*

1° *Le centre de chaque cercle tangent,*

2° *Le centre de gravité,*

3° *Le point d'intersection des transversales opposées de contact correspondantes,*

sont en ligne droite et le centre de gravité divise la distance des deux autres points dans le rapport 1 : 2. *Le centre du cercle correspondant pour le triangle des points milieu des côtés est aussi sur cette droite qu'il divise en deux parties égales.*

N. B. — Pour simplifier, les cercles inscrit et ex-inscrits ont été appelés les cercles tangents.

AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES (1928)

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

Mathématiques élémentaires (6 heures). — *On donne deux droites* Δ, Δ', *non situées dans un même plan;* Oz *est leur perpendiculaire commune,* O *le milieu de cette perpendiculaire commune,* Ox, Oy *les bissectrices des angles formés par les parallèles à* Δ *et* Δ', *issues du point* O.

1° *Démontrer que le lieu des points d'un plan perpendiculaire à* Ox (*ou à* Oy), *équidistants de* Δ *et* Δ' *est une droite* g (*ou* h) *rencontrant* Ox (*ou* Oy).

Relation entre la distance de cette droite au point O *et l'angle qu'elle fait avec* Oz.

2° *On demande d'étudier les plans* P *tels que la symétrique de l'une des deux droites* Δ, Δ', *par rapport à chacun de ces plans, rencontre l'autre ou lui est parallèle.*

Montrer que chaque plan P *contient une droite* g (*ou* h) *et réciproquement.*

Placer en particulier les plans P *qui passent par une sécante commune à* Δ *et* Δ' *ou sont perpendiculaires à cette sécante.*

Trouver l'enveloppe Γ *des plans* P *passant par un point fixe quelconque* S*; on déterminera l'enveloppe des traces de ces plans sur un plan perpendiculaire à* Ox *ou* Oy. *Cas particulier, où* S *est placé sur une droite* g (*ou* h).

Trouver l'enveloppe Γ' *des plans* P *qui sont parallèles à une direction de droite donnée; cas particulier ou cette direction est perpendiculaire à* Ox *ou* Oy.

3° *On demande d'étudier les droites* A *telles que la symétrique de l'une des droites* Δ, Δ' *par rapport à chacune de ces droites* A *rencontre l'autre ou lui est parallèle.*

On démontrera que le lieu de ces droites A *qui passent par un point donné* S *est le cône supplémentaire d'un cône qui se définit comme le cône* Γ *du* n° 2, *à l'aide d'un système de deux droites, autre que celui des droites* Δ *et* Δ'*; que l'enveloppe de ces droites* A *qui sont situées dans un plan donné* Π *est la section droite d'un cylindre qui se définit également comme le cylindre* Γ' *du* n° 2.

On reconnaîtra dans quels cas ce lieu et cette enveloppe se décomposent.

On démontrera que le lieu des droites A *qui sont parallèles à une direction de droite donnée est un plan* P *du* n° 2.

4° *Démontrer que par chaque droite* A *passent toujours deux plans* P, *dont on distinguera les rôles, et que, si la droite* A *varie en restant dans un plan fixe* Π, *l'un de ces deux plans* P *reste parallèle à une direction fixe et l'autre passe par un point fixe.*

SOLUTION

PAR

M. Bertrand GAMBIER (Paris).

N. B. — Le lecteur est prié de faire lui-même les figures, d'ailleurs très simples.

1. — Ox, Oy, Oz sont chacun axe de symétrie de la figure Δ, Δ'; Oz perce Δ en A, Δ' en A'; prenons comme demi-droite positive sur Oz la direction OA et soit $A'O = OA = h$; menons par O les parallèles OD, OD' à Δ et Δ' et soit 2φ l'angle aigu de ces droites; prenons pour direction positive Ox la bissectrice (dans un ou l'autre sens) de l'angle aigu de OD, OD' et prenons comme sens positif de rotation dans le plan Oxy le sens qui amène OD sur OD': Oy en résulte.

Soit maintenant un plan Π perpendiculaire à Ox, d'abcisse x_0; la symétrie autour de Oz permet de supposer $x_0 > 0$; soient Δ'_1 la symétrique de Δ' par rapport à Π, $A'X'$, $A'Y'$ les parallèles à Ox, Oy menées par A', AX la parallèle à Ox menée par A. Si α est pied de la perpendiculaire menée de A' sur Δ'_1 (Δ'_1 est dans le plan $A'X'Y'$), $A\alpha$ est perpendiculaire sur Δ'_1; d'une part tous les points de Π sont équidistants de Δ' et Δ'_1, de l'autre le lieu des points équidistants de Δ et Δ'_1 est le plan Q médiateur de $A\alpha$: donc la droite (g) commune à Π et Q est le lieu des points de Π équidistants de Δ et Δ'; la parallèle à Δ et Δ'_1 issue du point x_0 de Ox est manifestement tout entière dans Q, de sorte que la droite (g) rencontre Ox en x_0; cette droite (g) est perpendiculaire sur Ox et $A\alpha$, donc aussi sur la droite $A\beta$ obtenue en projetant α en β sur $A'Y'$; or $A'\alpha$ égale $2x_0 \sin\varphi$, et $A'\beta$ égale $2x_0 \sin\varphi \cos\varphi$; si on complète le rectangle $AA'\beta\gamma$, la diagonale $A\beta$ a sa pente opposée à celle de $A'\gamma$, donc égale à $\dfrac{h}{-x_0 \sin\varphi \cos\varphi}$; la pente de (g) dans le plan Π est donc égale à $\dfrac{x_0 \cos\varphi \sin\varphi}{h}$; si V est l'angle (g, Oz), cette pente représente $\cot V$: nous avons pris le mot pente dans l'acception usuelle, dans le plan Π ou le plan parallèle $y\,Oz$; le premier axe est Oy, le second Oz. Les équations de (g) sont donc

$$x = x_0 \qquad \frac{z}{y} = \frac{x_0 \sin\varphi \cos\varphi}{h} . \tag{1}$$

Ces considérations très élémentaires donnent l'équation de la surface Σ lieu des droites (g)

$$hz = xy \sin\varphi \cos\varphi . \tag{2}$$

Le même raisonnement s'applique aux plans Π_1 perpendiculaires à Oy: il suffit d'ailleurs, si l'on veut, de permuter Ox avec Oy, x_0 avec y_0 et φ avec $\frac{\pi}{2} - \varphi$ [l'ordre des axes est alors $Oyxz$ et $(Oy, \Delta') = \frac{\pi}{2} - \varphi$ avec le nouveau sens de rotation]; les équations d'une droite (h) sont

$$y = y_0 \qquad \frac{z}{x} = \frac{y_0 \sin\varphi \cos\varphi}{h} \tag{3}$$

résultat bien d'accord avec (2). La surface Σ est un paraboloïde équilatère, de sommet O, d'axe Oz, de génératrices principales Ox, Oy.

(Dans ce qui suit nous utiliserons les propriétés suivantes qui se démontrent aisément, par exemple en utilisant le théorème relatif aux quatre points d'intersection d'un quadrilatère gauche et d'un plan, simple extension du théorème de Ménélaüs: les sécantes communes à trois droites parallèles à un même plan P sont elles-mêmes parallèles à un même plan Q et engendrent une surface doublement réglée.)

On passe de Δ' à Δ par deux symétries: la première, relative à Π, transforme Δ' en Δ'_1, la seconde relative à Q transforme Δ'_1 en Δ; une rotation autour de (g), de même sens que celle qui amène Π sur Q et double de cette dernière, amène Δ' sur Δ; la valeur absolue de l'angle (Π, Q) est égale à celle W de l'angle des perpendiculaires $\alpha\beta$, αA menées de α à ces deux plans; on a

$$\operatorname{tg} W = \left|\frac{A\beta}{\beta\alpha}\right| = \frac{\sqrt{h^2 + x_0^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi}}{|x_0| \sin^2\varphi} \tag{4}$$

Chaque point ω de (g) est centre d'une sphère tangente à Δ et Δ'; quand ω décrit (g), cette sphère reste inscrite dans l'hyperboloïde H engendré par la rotation de Δ ou Δ' autour de (g); d et d' étant les points de contact de cette sphère avec Δ et Δ', si ω décrit (g) et vient en ω_1, d et d' viennent en d_1 et d'_1 et l'on a

$$dd_1 = d'd'_1 = \omega\omega_1 \cos\psi$$

ψ étant l'angle aigu de Δ ou Δ' avec (g); la sphère circonscrite au tétraèdre $dd'\,d_1\,d'_1$ a son centre aussi sur (g) et coupe H suivant les deux parallèles issus de d ou d_1. Nous allons retrouver ces propriétés dans le numéro suivant.

2. — Si la symétrie par rapport au plan P change Δ' en une droite Δ'_1 rencontrant Δ, cette même symétrie change les deux droites concourantes Δ, Δ'_1 en deux droites Δ_1, Δ' concourantes, de sorte que les plans P jouent un rôle symétrique relativement à Δ et Δ'. Δ et Δ_1 se coupent en U dans P, Δ' et Δ'_1 en U$'$ dans P; Δ et Δ'_1 se coupent en d, Δ_1 et Δ' en d' et le plan P est le plan médiateur de dd'; P est l'un des bissecteurs de Δ et Δ_1 ou de Δ' et Δ'_1. Remarquons que dd' ou Δ_1 (ou Δ'_1) sont des sécantes communes à Δ et Δ'.

Réciproquement, soit une sécante commune quelconque à Δ et Δ': si on lui fait jouer le rôle de dd' elle donne un plan P, médiateur de dd'; si on lui fait jouer le rôle de Δ_1, elle donne deux plans P, bissecteurs de cette sécante et de Δ; si on lui fait jouer le rôle de Δ'_1, elle donne deux plans P, bissecteurs de cette droite et Δ': chaque sécante commune fournit ainsi cinq plans P, du moins en supposant qu'elle ne soit parallèle à aucune des droites Δ ou Δ': dans ce dernier cas, supposons la parallèle à Δ et appelons la Δ'_1; elle ne donne plus que trois plans P, à savoir les plans Π ou Π_1 et le plan Q de la première partie (en considérant ce cas comme cas limite du précédent, on doit ajouter le plan de l'infini trouvé une fois comme limite du médiateur de dd', et une nouvelle fois comme limite d'un bissecteur de Δ et Δ_1).

Soit donc un plan P quelconque: il est l'un des bissecteurs de Δ et d'une sécante Δ_1 commune à Δ et Δ_1: chaque bissecteur Q_1 ou Q_2 de Δ_1 et Δ' coupe P suivant une droite dont chaque point est équidistant de Δ et Δ_1 d'une part, de Δ_1 et Δ' de l'autre, donc de Δ et Δ'; chacune de ces droites est donc sur Σ; une quelconque de ces deux droites fait le même angle avec Δ et Δ_1 d'une part, avec Δ_1 et Δ' de l'autre, donc avec Δ et Δ': autrement dit chacune d'elles est parallèle à un bissecteur des droites D et D$'$, c'est-à-dire xOz ou yOz; ces droites sont donc bien une droite (g) et une droite (h) de la première partie. La sphère tangente à Δ et Δ' en d et d' est commune aux deux séries de sphères tangentes à Δ et Δ' ayant leur centre sur ces droites (g) et (h) du plan P; P est tangent à Σ au centre de cette sphère. Le plan Π de la première partie est un plan P particulier contenant une droite (g) à distance finie et une droite (h) rejetée à l'infini.

Inversement, soit une droite (g) quelconque; elle est l'axe d'un hyperboloïde de révolution H contenant Δ et Δ'; la rotation continue de Δ autour de (g) donne ∞^1 génératrices de H sans point commun entre elles; chaque plan méridien de H est plan de symétrie de H, de sorte que les symétriques de Δ relativement à ces méridiens forment ∞^1 droites nouvelles situées sur H, rencontrant toutes Δ; chacune d'elles rencontre Δ', car la rotation d'amplitude W amenant Δ sur Δ' par rotation autour de (g) peut se décomposer en deux symétries successives autour de deux méridiens de H faisant entre eux l'angle $\frac{W}{2}$; Δ_1 étant cette génératrice du second système, on prendra comme premier de ces deux méridiens celui qui a transformé Δ en Δ_1: donc Δ_1, se transformant en Δ' par symétrie autour du second méridien, rencontre Δ'; par suite, tout plan contenant une droite (g) ou (h) est bien plan P.

Nous avons en passant démontré qu'un hyperboloïde de révolution contient deux systèmes de génératrices, chaque génératrice d'un système rencontrant toutes celles du système opposé et aussi démontré le théorème suivant: étant donné une sphère σ et deux tangentes Δ, Δ' de cette sphère, les tangentes nouvelles Δ_1 qui s'appuient sur Δ et Δ' ont leurs points de contact avec σ répartis sur l'un ou l'autre de deux cercles passant par les points de contact d et d' de Δ et Δ' avec σ; ces cercles sont les parallèles de contact avec σ des deux hyperboloïdes ayant pour axe la droite (g) ou (h) située dans le plan médiateur de dd'; le plan de chaque cercle est parallèle à l'une des bissectrices Ox, Oy de D et D$'$.

Ce qui précède situe le plan P perpendiculaire à une sécante commune dd' de Δ et Δ': c'est le plan médiateur de dd'.

Cherchons maintenant les plans P passant par une droite *quelconque* L: la rotation de Δ autour de L fournit un hyperboloïde H_1 qui peut: ne pas couper Δ', la couper en deux points distincts u', v', la toucher en un point u' ou enfin contenir Δ'; dans ce dernier cas L est une droite (g) ou (h) et tout plan contenant L est plan P. Dans le premier cas, il n'existe aucun plan P passant par L; dans le second cas, menons par u' le plan perpendiculaire à L, qui coupe Δ en u; sur H_1 le parallèle de u' passe par u et il est clair que le plan médiateur de uu', qui est un plan P, contient L; v' fournit de même le second plan P contenant L. Le troisième cas est limite du second et correspond à un unique plan P passant par L, mais comptant pour deux. En serrant de près cette construction, on voit que la sphère tangente en Δ et Δ' en u et u' a son centre à l'intersection des deux génératrices (g_1) et (h_1) contenues dans le premier plan P_1 relatif à u et u' et que la sphère analogue relative à v et v' a son centre au point commun aux droites analogues (g_2) et (h_2): donc (g_1) et (h_2) se coupent sur L et de même (g_2) et (h_1). On peut donc dire que le problème est ramené, si l'on veut, à trouver les points communs à Σ et à L et à prendre les génératrices passant en ces points.

La construction se simplifie si L rencontre Δ, car H_1 devient le cône de révolution engendré par Δ en tournant autour de L; si même L rencontre Δ et Δ', la simplification augmente encore, car on a simplement à tracer les deux génératrices du cône situées dans le plan L, Δ'.

Il est commode pour les numéros 3 et 4 de préciser divers résultats relatifs aux plans P; à chaque plan P, tangent au paraboloïde Σ, correspond la sécante dd', commune à Δ et Δ', dont P est le médiateur; soit R (a, b, o) le milieu de dd', point qui, manifestement, est dans le plan xOy; le plan P touche Σ au point R_1. Supposons que le point R décrive la droite $x = a$ du plan xOy; la sécante dd', d'après une remarque faite au nº 1, reste parallèle à un plan fixe, qui, en raison de la symétrie de la figure relativement à Ox, ne peut qu'être perpendiculaire à Ox ou contenir Ox.

Or, soient B, C et C' les points d'abscisse a sur Ox, D et D'; les parallèles à Oz menées de C ou C' percent Δ et Δ' en E, E' et les trois points B, E, E' sont en ligne droite, B étant le milieu de EE'; donc les sécantes communes à Δ, Δ', parallèles au plan yOz, ont leur trace horizontale sur Ox et non sur la droite $x = a$; donc le plan auquel la sécante dd' reste parallèle contient Ox et c'est le plan Ox, EE'; le plan P reste donc parallèle à la perpendiculaire à ce plan; comme cette perpendiculaire est parallèle au plan yOz, la génératrice (g) contenue dans P est *fixe*, et perpendiculaire sur EE'; on a $\mathrm{CB} = a \operatorname{tg} \varphi$, $\mathrm{CE} = h$; la pente de BE, calculée comme au nº 1, est $\dfrac{-h}{a \operatorname{tg} \varphi}$; la pente de (g) est donc $\dfrac{a \operatorname{tg} h}{h}$, de sorte que (g) perce Ox au point d'abscisse x_0 donnée par la relation $\dfrac{a \operatorname{tg} \varphi}{h} = \dfrac{x_0 \sin \varphi \cos \varphi}{h}$; on a donc $x_0 = \dfrac{a}{\cos^2 \varphi}$. Pour la même raison, si le point R décrit la droite $y = b$ de xOy, le plan P pivote autour de la génératrice (h) d'éloignement $y_0 = \dfrac{b}{\sin^2 \varphi}$. Si donc nous considérons le point $R(a, b, o)$, le plan P correspondant contient les deux génératrices (g), (h) d'abscisse $\dfrac{a}{\cos^2 \varphi}$ ou d'éloignement $\dfrac{b}{\sin^2 \varphi}$ et touche le paraboloïde Σ au point $R_1\left(\dfrac{a}{\cos^2 \varphi}, \dfrac{b}{\sin^2 \varphi}, \dfrac{ab}{h \sin \varphi \cos \varphi}\right)$.

La droite RR_1 est tangente à Σ au point R_1. Il est à remarquer que la droite RR_1 est perpendiculaire à la droite UU' joignant les traces de Δ et Δ' sur le plan P; en effet, si nous abaissons du point R la perpendiculaire Rt sur UU', la symétrique δ de Δ relativement à Rt s'obtient en joignant d', symétrique de d, à U_1 obtenu en prolongeant Ut de $tU_1 = Ut$: l'hyperboloïde H_1 obtenu par rotation de Δ autour de Rt admet donc pour génératrices particulières Δ_1 (symétrique de Δ par rapport au méridien P) et δ: or, Δ' passe au point d' commun à Δ_1 et δ et est dans le plan $\Delta_1 \delta$: donc l'hyperboloïde H_1 touche Δ' en d': d'après ce qui a été expliqué un peu plus haut, Rt est une droite particulière pour laquelle les deux plans P correspondants sont confondus; elle est donc tangente à Σ et par suite coïncide avec RR_1.

Déterminons maintenant les plans P issus d'un point S quelconque: projetons S en s et s' sur Δ et Δ'; soient $Ss = l$, $Ss' = l'$ et portons sur Δ et Δ' les segments sd et $s'd'$ de longueur algébrique u, u' déterminés par l'équation

$$l^2 + u^2 = l'^2 + u'^2 . \tag{1}$$

On a ainsi $Sd = Sd'$ et le plan médiateur de dd', qui est un plan P, passe en S. Cette relation se simplifie si S est sur Σ, car on a alors $l = l'$ et $u = \pm u'$; le plan P pivote alors autour de l'une des droites (g) ou (h) qui passent en S; on retrouve les propriétés signalées au n° 1.

Si on suppose maintenant $l \neq l'$, il est plus simple de remarquer qu'un plan P est finalement un plan contenant une droite (g) ou (h); si donc nous voulons déterminer l'enveloppe Γ des plans P issus de S, il suffira de déterminer la section de ce cône Γ par le plan yOz. Considérons les ∞^1 droites (g) et les ∞^1 plans S (g): la trace de l'un d'eux sur yOz est une droite $(\bar{g})$ parallèle à (g); V étant l'angle défini plus haut de (g) ou $(\bar{g})$ avec Oz, il y a une relation homographique entre x_0, abscisse de (g), et cot V; or, la perspective de Ox sur yOz à partir de S est une droite $O\xi$, trace aussi d'un plan P; si donc le point ξ_0 de $O\xi$ est la perspective de x_0, on voit qu'il y a correspondance homographique entre ξ_0 et cot V: donc, cot V pouvant être regardé comme le paramètre qui fixe un point à l'infini du plan yOz, la droite $(\bar{g})$ enveloppe une parabole γ tangente à $O\xi$; le cône Γ est donc du second degré. Il est bon de démontrer ce résultat par une méthode encore plus élémentaire, qui a l'avantage de faire découvrir la tangente au sommet de γ et son foyer F. Le plan perpendiculaire sur Ox mené par S donne sur Σ une génératrice (g'): quand (g) tend vers (g'), sa perspective s'éloigne à l'infini, tout en tendant à devenir parallèle à (g'); il existe sur Σ une génératrice (g'') perpendiculaire à (g') et le plan Sg'' coupe Σ suivant une génératrice (h'') telle que les perpectives $(\overline{g''})$, $(\overline{h''})$ de (g'') et (h'') coïncident; (h'') est de même système que Ox sur Σ, et les génératrices (g) découpent sur Ox et (h'') deux divisions semblables, de sorte, qu'en perspective, les droites $(\bar{g})$ découpent encore deux divisions homographiques sur $(\overline{h''})$ et la droite de l'infini; en prenant une origine convenable sur $(\overline{h''})$, on donne à cette correspondance homographique la forme

$$\operatorname{tg}(\bar{g}, \overline{h''}) = \frac{2\eta}{p} \tag{2}$$

où η est l'abscisse sur $(\overline{h''})$ du point M commun à $(\bar{g})$ et $(\overline{h''})$ et où p est une longueur fixe; cela montre que la perpendiculaire à $(\bar{g})$ en M passe par un point fixe F situé à la distance $\frac{p}{2}$ de $(\overline{h''})$; l'enveloppe est donc une parabole γ ayant $(\overline{h''})$ pour tangente au sommet et F pour foyer. Il est intéressant de montrer que la courbe de contact de Γ et du paraboloïde Σ est une hyperbole; cette courbe est le lieu du point R_1 commun aux deux génératrices (g), (h) contenues dans un même plan P issu de S; or, le plan Sg coupe Σ suivant une génératrice (h) issue du point d'éloignement y où le plan Sg coupe Oy; Oy peut être considérée comme sa propre perspective ou la perspective d'une génératrice (h_1) particulière; si on appelle x l'abscisse de la génératrice (g), cette génératrice détermine sur Ox et (h_1) deux divisions semblables: la division portée par (h_1) devient, par perspective, la division (y), de sorte qu'il y a correspondance homographique entre les paramètres x, y des génératrices (g), (h) situées dans un plan P issu de S; si (ξ, η, ζ) désignent les cordonnées de S, cette relation est de la forme

$$(x - \xi)(y - \eta) = k \tag{3}$$

comme on le voit en prenant pour plan P le plan perpendiculaire à Ox ou Oy issu de S. Le plan OxS donne d'autre part les valeurs correspondantes du couple (x, y), à savoir:

$$y = 0 \; ; \qquad \frac{x \sin\varphi \cos\varphi}{h} = \frac{\zeta}{\eta} \, .$$

Nous en déduisons la valeur de k; la relation (3) devient alors

$$x\eta \sin\varphi \cos\varphi + y\xi \sin\varphi \cos\varphi - xy \sin\varphi \cos\varphi - h\zeta = 0 \tag{4}$$

et comme R_1 a pour coordonnées $\left(x,\ y,\ \frac{xy \sin\varphi \cos\varphi}{h}\right)$, cette équation (4) exprime que R_1 est dans le plan Π d'équation

$$(x\eta + y\xi) \sin\varphi \cos\varphi - h(z + \zeta) = 0 \,. \tag{5}$$

Le point R_1 décrit la conique commune à ce plan Π et au cône Γ; cette conique est une hyperbole ayant pour directions asymptotiques les génératrices d'abscisse ξ ou ordonnée η du paraboloïde Σ ; ces deux génératrices se coupent au point $M\left(\xi,\ \eta,\ \frac{\xi\eta \sin\varphi \cos\varphi}{h}\right)$.

Le plan $x = \xi$ est tangent à Γ le long de la génératrice de ce cône parallèle à yOz et coupe le plan Π suivant une asymptote de l'hyperbole; le plan $y = \eta$ donne de même l'autre asymptote; ces deux asymptotes se coupent donc en un point ω centre de l'hyperbole en jeu; le z de ω est donné par l'équation

$$\frac{2\xi\eta \sin\varphi \cos\varphi}{h} = z + \zeta \tag{6}$$

qui prouve que M est le milieu de $S\omega$; $SM\omega$ est parallèle à Oz, axe de Σ, et le plan de l'hyperbole est parallèle au plan tangent à Σ en M.

L'équation (1) écrite plus haut peut être considérée comme l'équation de la surface réglée unicursale lieu de la droite dd' associée à ce cône Γ; le cône directeur de cette surface est du second ordre et supplémentaire du cône Γ; chaque droite Δ ou Δ' est droite (exceptionnelle) double de cette surface réglée; l'équation (4), où l'on remplace x par $\frac{a}{\cos^2\varphi}$ et y par $\frac{b}{\sin^2\varphi}$, donne le lieu du point $R\,(a,\ b,\ o)$ où la droite dd' perce le plan horizontal xOy; on a ainsi l'hyperbole équilatère d'équation

$$ab - a\eta \sin^2\varphi - b\xi \cos^2\varphi + \xi\eta \sin^2\varphi \cos^2\varphi = 0 \,. \tag{7}$$

La surface réglée est ainsi définie par trois directrices; la droite qui joint les traces de Δ et Δ' sur le plan de cette hyperbole est une génératrice double de la surface: c'est la droite à l'infini du plan horizontal. Comme vérification si S vient sur Σ, cette hyperbole se décompose en deux droites.

L'enveloppe Γ' des plans P parallèles à une direction fixe L est un cylindre parabolique dont on détermine par le même procédé la trace sur le plan yOz: c'est une parabole γ' admettant Oy pour tangente au sommet; la sécante dd' est assujettie à rester parallèle au plan λ perpendiculaire sur la direction L, de sorte que le lieu du point R, comme il a été rappelé au n° 1, est une droite du plan xOy

$$ua + vb + w = 0 \,. \tag{8}$$

Le point R_1 reste donc dans le plan d'équation

$$ux \cos^2 \varphi + vy \sin^2 \varphi + w = 0 \tag{9}$$

qui coupe le paraboloïde Σ ou le cylindre Γ' suivant une parabole. Si la direction L est perpendiculaire à Ox (ou Oy) le plan P pivote autour de la génératrice (g) [ou (h)] parallèle à L.

3. — Dans la théorie élémentaire de la symétrie, on démontre que deux figures F_1, F_2 symétriques d'une même figure F l'une par rapport à un plan Q, l'autre par rapport à un point O du plan Q, sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite A perpendiculaire à Q en O; inversement on peut dire que la symétrie relativement à une droite A résulte de la composition des deux opérations suivantes: symétrie par rapport à un point O arbitraire de A, puis symétrie par rapport au plan Q élevé en O perpendiculairement à A.

La symétrique δ de Δ par rapport à A coupe Δ' en d'; d' est symétrique d'un point d de Δ et A est perpendiculaire à cette sécante commune dd' de Δ et Δ' en son milieu S; la réciproque est immédiate. Les droites A sont donc obtenues par ce procédé qui montre leur réciprocité vis-à-vis de Δ et Δ' et elles engendrent un complexe qui, nous le verrons, est du second ordre.

On a supposé d et d' à distance finie; mais si δ est parallèle à Δ', l'axe A est parallèle à l'une ou l'autre des bissectrices de Δ et Δ', c'est-à-dire Ox ou Oy, et réciproquement.

Supposons maintenant que A passe par un point fixe S: nous remplaçons d'abord Δ par sa symétrique $\bar{\Delta}$ relativement à S, puis $\bar{\Delta}$ par sa symétrique δ relativement au plan Q mené par S perpendiculairement à A; S est donné, donc $\bar{\Delta}$ est une droite connue et l'enveloppe des plans Q est le cône Γ relatif aux deux droites $\bar{\Delta}$ et Δ'; le lieu des droites A est le cône, supplémentaire de Γ, ayant pour sommet le point S; ce cône est du second degré, le complexe est du second ordre.

Pour trouver l'enveloppe des droites A situées dans un plan donné Π, il suffit de remarquer que la symétrie autour d'une droite de Π revient à la composition des deux opérations: symétrie relative à Π, puis symétrie relativement au plan Q mené par cette droite de Π perpendiculairement à Π; la première symétrie change Δ en une droite connue $\bar{\Delta}$: la seconde doit transformer $\bar{\Delta}$ en une droite δ coupant Δ', de sorte que le second plan, soit Q, enveloppe un cylindre parabolique Γ' de génératrices perpendiculaires sur Π, relatif à $\bar{\Delta}$ et Δ'; la droite A admet pour enveloppe la section droite de Γ' par Π. Nous trouverons plus loin, au n° 4, une démonstration plus directe de ce résultat.

Cette étude suppose jusqu'ici le point S ou le plan Π quelconques; manifestement s'introduit ici un cas particulier, éliminé de parti pris aux numéros 1 et 2, celui où $\bar{\Delta}$ et Δ' sont concourantes ou parallèles.

Si le point S fournit une droite $\bar{\Delta}$ rencontrant Δ', le plan Δ', $\bar{\Delta}$ n'est autre que le plan $A'X'Y'$ et S est un point *quelconque* du plan Oxy que nous appellerons R pour retrouver les résultats déjà obtenus; les deux plans $R\Delta$ et $R\Delta'$ se coupent suivant une droite Rdd' coupant Δ et Δ' à distance finie; le plan P élevé en R perpendiculairement à dd' donne ∞^1 droites A issues de R dans ce plan: nous appelons Δ_1 la symétrique de Δ relativement à P; la droite A étant tracée dans P, on obtient δ en prenant la symétrique de Δ_1 relativement au plan Q mené par A perpendiculairement à P; ce plan Q est le plan Add', de sorte que δ décrit, quand A tourne autour de R, le cône de révolution d'axe dd' dont Δ_1 est une génératrice. D'autre part, si nous considérons toutes les droites issues de R dans xOy, la symétrique δ de Δ par rapport à l'une d'elles, s'obtient en prenant d'abord la symétrique de Δ relativement au plan xOy, ce qui donne dans le plan $A'X'Y'$ la parallèle $\bar{\Delta}$ à Δ issue de A', puis prenant la symétrique de $\bar{\Delta}$ relativement aux divers plans verticaux passant en R: r étant la projection de R sur le plan $A'X'Y'$, les droites δ enveloppent manifestement le cercle décrit dans $A'X'Y'$ de r comme centre et tangent à $\bar{\Delta}$; donc le plan xOy est un second plan lieu de droites A issues de R; ce résultat prouve que toute droite du plan xOy est droite A.

Supposons de même Π choisi de sorte que $\bar{\Delta}$ et Δ' se rencontrent en un point d' à distance finie: Π est l'un des plans tangents à Σ et n'est parallèle ni à yOz, ni à xOz; il est médiateur d'une sécante commune dd' de Δ et Δ'; les droites A issues du point R milieu de dd' donnent une première série de droites A du plan Π; $\bar{\Delta}$ étant la symétrique de Δ relativement à Π, cette droite $\bar{\Delta}$ joint U trace de Δ sur Π au point d' et les ∞^1 droites A issues de R dans Π donnent comme droites δ les génératrices du cône de révolution engendré par $\bar{\Delta}$ en tournant autour de dd'; pour trouver les autres droites A situées dans Π remarquons qu'ici la droite δ est assujettie à être symétrique de $\bar{\Delta}$ relativement à un certain plan Q perpendiculaire sur Π et, de plus, à rencontrer Δ'; elle rencontre aussi $\bar{\Delta}$ de sorte qu'elle doit ou passer par le point d' commun à $\bar{\Delta}$ et Δ', cas déjà élucidé, ou bien être contenue dans le plan $\bar{\Delta}$, Δ': le plan Q, dans ce second cas, doit être perpendiculaire au plan $(\bar{\Delta}, \delta)$ ou $(\bar{\Delta}, \Delta')$ et par suite à l'intersection de Π et $(\bar{\Delta}, \Delta')$: cette intersection n'est autre que la droite UU' joignant les traces U et U' de Δ et Δ' sur le plan Π; la droite A, trace de Q sur Π, doit être perpendiculaire dans Π à UU', donc, d'après ce que nous avons vu au n° 2, parallèle à la droite RR_1 joignant R au point de contact R_1 de Π et Σ: nous avons vu à ce moment que la droite RR_1 elle-même fournit une droite δ passant par d' et contenue dans le plan $(\bar{\Delta}, \Delta')$. Or, quand on prend les symétriques d'un point F par rapport à deux droites parallèles L et L_1, les symétriques dérivent l'un de l'autre par une translation équipollente au double de l'un des segments perpendiculaires à L et L_1; donc quand on remplace la droite RR_1 par une parallèle à RR_1 tracée dans le plan Π, la droite δ subit une translation parallèle à UU': elle reste donc bien dans le plan $\bar{\Delta}, \Delta'$.

Si Π est parallèle à yOz, A est ou bien l'une des parallèles à Oy menées dans Π ou bien l'une des perpendiculaires menées dans Π à la droite joignant les traces U et U' de Δ et Δ' sur Π. De même pour un plan Π parallèle à xOz.

Revenons maintenant au cas où Δ' et $\bar{\Delta}$ (relative à S ou à Π) ne sont pas concourantes et cherchons les conditions nécessaires pour que le cône lieu des droites A relatives au point S ou l'enveloppe des droites A relatives au plan Π se décomposent.

Le cône lieu des droites A issues d'un point S se décompose en deux plans si l'enveloppe des plans Q issus de S et relatifs à $\bar{\Delta}, \Delta'$ se compose de deux droites, c'est-à-dire si S est équidistant de $\bar{\Delta}$ et Δ': puisque S est équidistant de Δ et $\bar{\Delta}$, la condition nécessaire et suffisante est que S soit sur Σ; soient (ξ, η, ζ) les coordonnées de S; d'après ce que nous avons vu plus haut, le plan P relatif au point R (a, b, o) contient la génératrice (g) d'abscisse $\frac{a}{\cos^2\varphi}$, de sorte que toute droite joignant un point de la droite $x = a$ de xOy à un point de la génératrice (g) d'abscisse $\frac{a}{\cos^2\varphi}$ est une droite A; donc les droites A issues du point S de Σ sont contenues dans deux plans Q_1, Q_2 contenant S : Q_1 contient la droite d'abscisse $\xi\cos^2\varphi$ du plan xOy, Q_2 la droite d'éloignement $\eta\sin^2\varphi$ du plan xOy.

Cherchons maintenant l'enveloppe des droites A contenues dans un plan Π non tangent à Σ; on forme le paraboloïde $\bar{\Sigma}$ relatif à $\bar{\Delta}$ et Δ'; le cylindre Γ' de génératrices parallèles à la direction π perpendiculaire à Π ne se décompose que si π est parallèle à un plan directeur de $\bar{\Sigma}$, autrement dit, fait des angles égaux avec $\bar{\Delta}$ et Δ'; or π fait des angles égaux avec $\bar{\Delta}$ et Δ, de sorte que la condition nécessaire et suffisante est que π fasse des angles égaux avec Δ ou Δ', ou que Π soit parallèle à Ox ou Oy; supposons Π parallèle à Oy et soit a l'abscisse de la trace de Π sur xOy; d'après ce que nous avons vu, soit S le point où Π perce la génératrice (g) d'abscisse $\frac{a}{\cos^2\varphi}$: toutes les droites issues de S dans Π sont des droites A; d'autre part toutes les parallèles à Oy tracées dans Π sont une autre série de droites A.

Je signale rapidement les cas plus particuliers: S peut coïncider avec O et alors le cône lieu des droites A issues de O se réduit au plan xOy pris deux fois. S coïncidant avec le point à l'infini de Ox ou Oy, toute droite issue de ce point est droite A. Au point de vue analytique, on doit considérer toute droite du plan de l'infini comme droite A, car l'enveloppe des droites A d'un plan arbitraire est une parabole, courbe tangente à la droite de l'infini du plan en jeu. — Si le plan Π coïncide avec $x\mathrm{O}y$, toute droite de $x\mathrm{O}y$ est droite A. Si le plan Π est parallèle à $x\mathrm{O}y$, sans coïncider avec lui, les droites A de ce plan sont les parallèles à $\mathrm{O}x$ ou $\mathrm{O}y$ de ce plan.

Cherchons maintenant les droites A parallèles à une direction donnée L (si L est la direction $\mathrm{O}x$, ou $\mathrm{O}y$, toute parallèle à cette direction est une droite A). Si la direction L est parallèle à $x\mathrm{O}y$, toutes les parallèles à cette direction, contenues dans le plan $x\mathrm{O}y$, sont des droites A et il n'y a pas d'autre droite A parallèle à L, comme on le voit aussitôt d'après la relation géométrique simple existant entre les symétriques d'une même droite par rapport à deux droites parallèles. Supposons donc la direction L quelconque et soit une droite A parallèle à L: elle perce le plan $x\mathrm{O}y$ en un point unique R, à distance finie; la sécante $\mathrm{R}dd'$ commune à Δ et Δ' issue de R est parallèle au plan λ perpendiculaire à L: donc le point R (remarque du début au n° 1) admet pour lieu une droite l du plan $x\mathrm{O}y$ et réciproquement à tout point R de cette droite l correspond un plan P parallèle à L, contenant une droite A parallèle à L issue de R; le lieu de ces droites A est donc le plan Π mené par l parallèlement à L (ces deux droites déterminent bien un plan, car L n'est pas parallèle à $x\mathrm{O}y$); il est facile de vérifier que ce plan Π est un plan P; car parmi les droites $\mathrm{R}dd'$, il y en a une, $\mathrm{R}^0 d^0 d'^0$ qui est perpendiculaire à Π: or le plan Π contient le milieu R_0 de cette sécante, c'est donc un plan P particulier. — On retrouve un résultat établi directement au n° 2: il s'agit de trouver l'enveloppe des plans P parallèles à une direction donnée L: quand le point R décrit la droite l du plan $x\mathrm{O}y$, le plan P, relatif à R, médiateur de dd', reste parallèle à L et le point R_1 décrit une section plane de Σ qui est une parabole: le cylindre Γ' ayant cette parabole comme base, et ses génératrices parallèles à L est l'enveloppe des plans P. La droite $\mathrm{R}^0\,\mathrm{R}_1^0$ est parallèle à L et tangente à Σ en R_1^0; si $(a,\ b,\ o)$ sont les coordonnées de R^0, les paramètres directeurs de $\mathrm{R}^0\,\mathrm{R}_1^0$ sont

$$\frac{a\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi},\qquad \frac{b\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi},\qquad \frac{ab}{h\sin\varphi\cos\varphi}.$$

En désignant par α, β, γ les paramètres directeurs de L, qui sont proportionnels à ceux de $\mathrm{R}^0\,\mathrm{R}_1^0$, on trouve aussitôt pour R^0 les coordonnées

$$a = \frac{h\cos^3\varphi}{\sin\varphi}\,\frac{\gamma}{\beta},\qquad b = \frac{h\sin^3\varphi}{\cos\varphi}\,\frac{\gamma}{\alpha}$$

et pour R_1^0 les coordonnées

$$\frac{h \cos \varphi}{\sin \varphi} \frac{\gamma}{\beta}, \qquad \frac{h \sin \varphi}{\cos \varphi} \frac{\gamma}{\alpha}, \qquad h \sin \varphi \cos \varphi \frac{\gamma^2}{\alpha\beta}$$

dont les deux premières donnent l'abscisse de la génératrice (g) contenue dans Π ou l'éloignement de la génératrice (h) contenue aussi dans Π.

4. — Nous avons vu que par chaque droite A_0 il passe un premier plan P_1 obtenu en prenant la trace R de A_0 sur xOy, menant par R la sécante commune dd' à Δ et Δ', puis élevant en R le plan perpendiculaire à dd' ; dans ce plan P_1 particulier, il y a deux séries de droites A: les unes concourantes en R, les autres parallèles à RR_1; la droite A_0 appartient à la première catégorie.

D'autre part, le lieu des droites A parallèles à A_0 est un second plan, soit P_2, contenant A_0; dans ce plan P_2, comme pour P_1, il y a deux catégories de droites A et cette fois la droite A_0 appartient à la catégorie des droites parallèles.

Nous avons établi au nº 2 qu'il y a 2, 1, 0 plans P passant par une droite donnée quelconque (non génératrice de Σ), ici nous les avons trouvés chacun séparément (et par suite rationnellement); l'équation du second degré $A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0$, à laquelle se ramènerait le problème, jouit de cette particularité que $B^2 - AC$ est un carré parfait.

Il est bon de différencier le rôle des plans P_1 et P_2 d'une façon nouvelle, qui nous donne d'ailleurs une construction plus simple de P_2; δ étant la symétrique de Δ par rapport à A_0, nous avons montré, au nº 2, que la symétrique de Δ par rapport à tout plan Π issu de A_0 rencontre à la fois Δ et δ: or si le plan Π devient plan P, la symétrique Δ_1 de Δ relativement à P doit rencontrer non seulement δ mais encore Δ' : d' étant le point commun à δ et Δ', Δ_1 doit ou passer par d' ou être située dans le plan (δ, Δ'); P_1 correspond à la première hypothèse, P_2 à la seconde; inutile de revenir sur le raisonnement complet, qui a déjà été fait, pour ce plan P_2; remarquons simplement que Δ_1 rencontre Δ en un point situé dans le plan (δ, Δ'); si donc U est ce point, connu dès que A_0 est donné, le plan P_2 est le plan déterminé par A_0 et U; la vérification est immédiate, car la symétrique de Δ relativement à ce plan passe en U et rencontre δ, elle est donc dans le plan (U, δ) qui n'est autre que le plan (δ, Δ'), donc elle rencontre bien Δ' et le plan P_2 est bien plan P. Remarquons que cette détermination de P_2 est en défaut si A_0 rencontre Δ; mais alors, comme une droite A ne peut rencontrer simultanément Δ et Δ', il suffit d'intervertir les rôles de Δ et Δ': nous avons donc retrouvé ce qui a été expliqué au nº 2, sur le plan P général et les droites UU′ et RR_1 correspondantes.

Les droites A particulières pour lesquelles les deux plans P_1 et P_2 sont confondus sont les droites RR_1: le plan tangent à Σ en R_1 est le plan double P; et en effet dans ce plan, la droite RR_1 appartient simultanément aux deux classes de droites A de ce plan.

Comme le problème: trouver les plans P issus d'une droite L, revient au problème: trouver les points communs à L et à Σ, nous avons à vérifier que pour une droite A_0 donnée, le second problème se résoud rationnellement; il suffit de prendre le pied R (a, b, o) de A_0 sur xOy et de couper A_0 par le plan $x = \frac{a}{\cos^2 \varphi}$, puis par le plan $y = \frac{b}{\sin^2 \varphi}$.

Supposons maintenant que la droite A varie dans un plan donné Π: elle enveloppe une parabole γ; sa trace sur xOy décrit une droite (l); donc la sécante Rdd' commune à Δ, Δ' et (l) reste parallèle à un plan fixe Q et le plan P_1, perpendiculaire sur dd' en R, reste parallèle à la direction (q) perpendiculaire sur (Q).

D'autre part, menons le plan Π_1 tangent à Σ et parallèle à Π: il suffit pour cela de construire la sécante commune dd' à Δ et Δ', perpendiculaire à Π; une droite A quelconque, soit A_0, étant menée dans Π, menons par R, milieu de dd', la parallèle A_1 à A_0; A_1 est perpendiculaire à dd', c'est donc une droite A particulière: donc le plan $A_0 A_1$ est le second plan P_2 mené par A_0; ce plan passe par le point R qui ne dépend pas du choix de A_0 dans Π: la proposition est donc démontrée. Nous voyons même que R reste le même pour les divers plans Π parallèles entre eux: mais alors cette remarque prouve aussitôt que l'enveloppe des droites A contenues dans un plan Π donné est une parabole, car c'est la trace sur Π du cône Γ circonscrit à Σ d'un point, non plus quelconque, mais placé dans xOy; les enveloppes relatives aux divers plans parallèles à Π sont homothétiques entre elles par rapport à R et c'est ce qui explique pourquoi la parabole relative à Π_1 se réduit à deux points, dont l'un est R, l'autre étant le point à l'infini sur la génératrice de contact de Π_1 et du cône Γ, droite qui est la droite RR_1 indiquée plus haut.