Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 28 (1929)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: APPLICATION DES NOTATIONS TENSORIELLES DANS LE CALCUL VECTORIEL

Autor: Stoyanoff, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-22595

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 24.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

APPLICATION DES NOTATIONS TENSORIELLES DANS LE CALCUL VECTORIEL

PAR

A. STOYANOFF (Sofia).

§ 1. Soient a et b deux vecteurs de composantes a_m et b_m (ou bien a^m et b^m)[1]. On appelle *produit intérieur* de a et b l'invariant $a_m b^m$. On appelle *produit extérieur* de a et b le tenseur symétrique gauche du IIe ordre de composantes $\sigma^{ik} = a^i b^k - a^k b^i$.

Dans l'espace euclidien à 3 dimensions ce tenseur n'a que 3 composantes indépendantes différentes de zéro; dans le calcul vectoriel on le confond avec un vecteur. On pourrait employer pour ce vecteur la notation suivante

$$v_m = \varepsilon_{mnp} a^n b^p \ , \qquad \text{ou bien} \qquad v^m = \varepsilon^{mnp} a_n b_p \ ,$$

ε_{mnp} désignant un symbole à 3 indices[2] défini de la façon suivante:
$\varepsilon_{mnp} = 0$, si deux des indices sont égaux;

$\varepsilon_{mnp} = sgn\,(m, n, p)$, si les 3 indices sont différents[3] (par conséquent mnp représente une permutation des nombres 1,2,3).

Remarque. On peut se servir également de la formule de définition plus compliquée

$$\varepsilon_{mnp} = \frac{1}{2}(m - n)(n - p)(p - m) \ .$$

---

[1] Comme dans le calcul vectoriel on opère dans un espace euclidien à trois dimensions et qu'on n'emploie que des coordonnées cartésiennes rectangulaires, il n'y a pas lieu de faire de distinction entre les composantes covariantes et contrevariantes d'un tenseur.

[2] C'est un cas particulier d'un tenseur plus général introduit par MM. Ricci et Levi-Civita.

[3] Je rappelle que $sgn\,(m, n, p) = \pm 1$, suivant que la permutation mnp a un nombre pair ou impair d'inversions. Ex.: $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$, $\varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1$.

Par conséquent

$$\varepsilon_{mnp} = -\varepsilon_{mpn}\,, \quad \text{etc.} \qquad \varepsilon_{mnp} = \varepsilon_{npm} = \varepsilon_{pmn}\,.$$

Calculons par exemple v_1. On a $v_1 = \varepsilon_{1np}\, a^n\, b^p$ (cette somme ne contient que deux termes différents de zéro) $= \varepsilon_{123}\, a^2\, b^3 + \varepsilon_{132}\, a^3\, b^2 = a^2\, b^3 - a^3\, b^2$.

§ 2. Plus tard, nous rencontrerons le symbole à 4 indices

$$g^{rs}_{np} = \varepsilon_{mnp}\,\varepsilon^{mrs} = \varepsilon_{1np}\,\varepsilon^{1rs} + \varepsilon_{2np}\, e^{2rs} + \varepsilon_{3np}\,\varepsilon^{3rs}\,.$$

Propriétés de g^{rs}_{np}.

$$g^{rs}_{np} = -\,g^{rs}_{pn} = -\,g^{sr}_{np} = g^{sr}_{pn}\,;$$

par conséquent $g^{rs}_{np} = 0$, si $n = p$ ou $r = s$.

Cherchons les composantes de g^{rs}_{np} non nulles. Donnons à n et p deux valeurs distinctes choisies parmi les nombres 1, 2, 3; alors dans la somme précédente

$$\varepsilon_{1np}\,\varepsilon^{1rs} + \varepsilon_{2np}\,\varepsilon^{2rs} + \varepsilon_{3np}\, e^{3rs}$$

il ne reste qu'un seul terme obtenu en donnant à m la troisième valeur; on en déduit que r et s doivent avoir les mêmes valeurs que n et p; c'est-à-dire on doit avoir $r = n$, $s = p$, ou bien $r = p$, $s = n$. Dans le premier cas g^{rs}_{np} est égal à $+1$, dans le second à -1.

Application. Considérons la somme $g^{rs}_{np}\, A_{rs..}$ ($A_{rs..}$ désignant un tenseur à deux ou plusieurs indices, parmi lesquels se trouvent r et s). Effectuons la sommation indiquée; d'après les propriétés du symbole g, nous n'aurons que deux termes

$$g^{np}_{np}\, A_{np..} + g^{pn}_{np}\, A_{pn..} = A_{np..} - A_{pn..}\,;$$

par conséquent

$$g^{rs}_{np}\, A_{rs..} = A_{np..} - A_{pn..}$$

c'est-à-dire g^{rs}_{np} joue le rôle de signe de substitution.

On vérifie sans peine que $g^{rs}_{np} + g^{sp}_{nr} + g^{pr}_{ns} = 0$, quels que soient n, p, r, s.

§ 2'. On voit immédiatement que $\varepsilon_{mnp}\varepsilon^{mns} = 2g^s_p$, c'est-à-dire $+2$ ou 0 suivant que $s = p$ ou $s \neq p$.

§ 3. Nous pouvons maintenant aborder l'algèbre vectorielle et déduire avec une grande facilité les formules les plus compliquées. Par exemple

$$\vec{a} \times \vec{b} \,.\, \vec{c} = \vec{v} \,.\, \vec{c} = v_m c^m = \varepsilon_{mnp} a^n b^p c^m = \varepsilon_{npm} a^n b^p c^m$$

$$= sgn\,(n\,,\,p\,,\,m)\, a^n b^p c^m = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} .$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{v} = \varepsilon_{mnp} a^n v^p = \varepsilon_{pmn} a^n \varepsilon^{prs} b_r c_s = g^{rs}_{mn} a^n b_r c_s$$

$$= a^n b_m c_n - a^n b_n c_m = (\vec{a} \,.\, \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \,.\, \vec{b})\vec{c}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \,.\, (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{u} \,.\, \vec{v} = u_m v^m = \varepsilon_{mnp} a^n b^p \varepsilon^{mrs} c_r d_s = g^{rs}_{np} a^n b^p c_r d_s$$

$$= a^n b^p c_n d_p - a^n b^p c_p d_n = (\vec{a} \,.\, \vec{c})(\vec{b} \,.\, \vec{d}) - (\vec{a} \,.\, \vec{d})(\vec{b} \,.\, \vec{c})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{u} \times \vec{v} = \varepsilon_{mnp} u^n v^p = \varepsilon_{npm} \varepsilon^{nrs} a_r b_s \varepsilon^{pik} c_i d_k$$

$$= g^{rs}_{pm} \varepsilon^{pik} a_r b_s c_i d_k = \varepsilon^{pik} a_p b_m c_i d_k - \varepsilon^{pik} a_m b_p c_i d_k$$

$$= (\vec{a} \times \vec{c} \,.\, \vec{d})\,\vec{b} - (\vec{b} \times \vec{c} \,.\, \vec{d})\,\vec{a} \,.$$

§ 4. *Notations.* Nous désignerons par $x^m (m = 1, 2, 3)$, les coordonnées d'un point quelconque de l'espace, par $\Delta_m \mathrm{F}$ ou $\Delta^m \mathrm{F}$ la dérivée par rapport à x^m d'une fonction de point, c'est-à-dire

$$\Delta_m \mathrm{F} \quad \text{ou} \quad \Delta^m \mathrm{F} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x^m} .$$

On a par définition, φ étant un scalaire, $\vec{u}$ un vecteur,

grad φ = le vecteur de composantes $\varphi_m = \Delta_m \varphi$,

div $\vec{u}$ = le scalaire $\Delta_m u^m$,

rot $\vec{u}$ = le vecteur $\mathrm{R}^{(\vec{u})}_m = \varepsilon_{mnp} \Delta^n u^p$.

Ceci posé, on obtient sans peine toutes les formules de l'analyse vectorielle

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \Delta_m \varphi^m = \Delta_m \Delta^m \varphi = \Delta\varphi \text{ (opérateur de Laplace)}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = \varepsilon_{mnp}\Delta^n \varphi^p = \varepsilon_{mnp}\Delta^n\Delta^p\varphi \equiv 0$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{u} = \Delta^m \mathrm{R}_m = \Delta^m \varepsilon_{mnp}\Delta^n u^p = \varepsilon_{mnp}\Delta^m\Delta^n u^p \equiv 0 \ .$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u} = \varepsilon_{mnp}\Delta^n \mathrm{R}^p = \varepsilon_{pmn}\Delta^n \varepsilon^{prs}\Delta_r u_s = g_{mn}^{rs}\Delta^n\Delta_r u_s$$

$$= \Delta^n\Delta_m u_n - \Delta^n\Delta_n u_m = \Delta_m(\Delta^n u_n) - \Delta u_m = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u} - \Delta\vec{u} \ .$$

$$\operatorname{div}(\varphi\vec{u}) = \Delta_m(\varphi u^m) = \varphi_m u^m + \varphi\Delta_m u^m = \operatorname{grad}\varphi\,.\,\vec{u} + \varphi\operatorname{div}\vec{u}$$

$$\operatorname{rot}(\varphi\vec{u}) = \varepsilon_{mnp}\Delta^n(\varphi u^p) = \varepsilon_{mnp}\varphi^n u^p + \varphi\varepsilon_{mnp}\Delta^n u^p$$

$$= \operatorname{grad}\varphi \times \vec{u} + \varphi\operatorname{rot}\vec{u}$$

$$\operatorname{div}(\vec{u}\times\vec{v}) = \operatorname{div}\vec{w} = \Delta^m w_m = \Delta^m \varepsilon_{mnp} u^n v^p$$

$$= v^p \varepsilon_{mnp}\Delta^m u^n + u^n \varepsilon_{mnp}\Delta^m v^p$$

$$= v^p \varepsilon_{pmn}\Delta^m u^n - u^n \varepsilon_{nmp}\Delta^m v^p = v^p \mathrm{R}_p^{(\vec{u})} - u^n \mathrm{R}_n^{(\vec{v})}$$

$$= \vec{v}\,.\operatorname{rot}\vec{u} - \vec{u}\,.\operatorname{rot}\vec{v} \ .$$