Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 28 (1929)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES VECTEURS ET LES TENSEURS IMAGINAIRES
Autor: Dusl, Karel
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-22594

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR LES VECTEURS ET LES TENSEURS IMAGINAIRES[1]

PAR

Karel DUSL (Prague).

---

1. — *Notations et objet du mémoire.* — L'espace considéré dans le présent mémoire est l'espace euclidien à trois dimensions, avec un système de trois axes de repère: Ox, Oy, Oz rectangulaires et formant un trièdre de sens direct (positif) (c'est-à-dire les sens des angles (Ox, Oy), (Oy, Oz), (Oz, Ox) vus de l'intérieur du trièdre soit le sens positif de rotation autour d'un axe). Une portion de droite (appelée « support » ou axe du vecteur) comprise entre deux points, sur laquelle on distingue une origine (A) et une extrémité (B) s'appelle *vecteur*. Nous représenterons un vecteur par deux lettres désignant, la première l'origine, la seconde l'extrémité, ces lettres seront surmontées d'une flèche:

$$\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{OM}, \quad \text{etc.}$$

Quelquefois, nous emploierons une seule lettre, surmontée d'une flèche, pour abréger:

$$\vec{u}, \quad \vec{U}, \quad \vec{a}, \quad \vec{A}, \quad \text{etc.}$$

Tous les vecteurs, qui ont même direction, même sens (par exemple de A à B) et même grandeur (module, mesure de longueur) et qui ne diffèrent que par leurs supports sont dits « *équipollents* ». Au lieu du mot équipollence on emploie couramment « égalité vectorielle » ou tout simplement « égalité » parce que

---

[1] Je suis heureux de remercier Monsieur le Professeur J. KAMPÉ DE FÉRIET des conseils qu'il a bien voulu me donner pendant la rédaction de ce travail.

l'équipollence possède les mêmes propriétés que l'égalité algébrique. On exprime l'équipollence par le signe =, comme en algèbre.

Dans ce qui suit, je considérerai presque partout des vecteurs menés de l'origine O du système de repère à un point quelconque M de l'espace.

Vecteurs unitaires. Composantes du vecteur. — On choisit trois vecteurs unités (c'est-à-dire les vecteurs dont la longueur est prise pour l'unité) sur les trois axes issus de l'origine et dont le sens définit le sens de trois axes et on les désigne par: $\vec{i_1}$, $\vec{i_2}$, $\vec{i_3}$.

Les projections rectangulaires du vecteur quelconque sur chaque axe s'appellent les composantes du vecteur. Soit $\overrightarrow{OM}$ le vecteur considéré et x, y, z les mesures de ses composantes, on a

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i_1} + y\vec{i_2} + z\vec{i_3} \ . \tag{1}$$

Dans cette égalité le signe + désigne l'addition géométrique [1] et les mesures x, y, z sont les coordonnées rectangulaires du point-extrémité M par rapport au système d'axes de repère définis par les vecteurs unitaires.

Produits des vecteurs. — J'emploie la notation:

$$\overrightarrow{OM_1} \times \overrightarrow{OM_2}$$

pour le produit *intérieur*, ou *scalaire* de deux vecteurs, c'est-à-dire:

$$\overrightarrow{OM_1} \times \overrightarrow{OM_2} = \overline{OM_1} \, . \, \overline{OM_2} \cos (\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) \ , \tag{2}$$

où $\overline{OM_1}$, $\overline{OM_2}$ signifient les mesures des vecteurs.

Le produit intérieur de deux vecteurs est alors le nombre (ou scalaire) égal au produit de leurs mesures par le cosinus de l'angle des deux axes.

La notation:

$$\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{OM_2}$$

désigne *le produit extérieur* (vectoriel), défini par le vecteur:

$$\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{OM_2} = \overline{OM_1} \, . \, \overline{OM_2} \sin (\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) \vec{n} \ , \tag{3}$$

[1] A. Chatelet et J. Kampé de Fériet, *Calcul vecioriel,* Paris 1923, p. 10.

où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire, perpendiculaire au plan OM_1M_2 et tel, que le trièdre $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}, \vec{n})$ est de même sens que le trièdre de repère.

Les produits symboliques (d'ailleurs indéterminés) de deux vecteurs, par exemple:

$$\vec{A}\,\vec{B}$$

s'appellent *dyades* [1]. L'opérateur vectoriel formé par une somme de *trois dyades* est le tenseur [2] du second ordre (ou degré) J'emploierai la notation:

$$T = \vec{A}\vec{L} + \vec{B}\vec{M} + \vec{C}\vec{N}\ , \tag{4}$$

où en général les vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ et $\vec{L}$, $\vec{M}$, $\vec{N}$ constituent deux trièdres différents. Le tenseur, appliqué par la multiplication scalaire à un vecteur $\overrightarrow{OM}$ représente un vecteur transformé $\overrightarrow{OM'}$, de sorte que l'on a:

$$\overrightarrow{OM'} = T \times \overrightarrow{OM} = \vec{A}(\vec{L} \times \overrightarrow{OM}) + \vec{B}(\vec{M} \times \overrightarrow{OM}) + \vec{C}(\vec{N} \times \overrightarrow{OM})\ . \tag{5}$$

Si l'on pose, en coordonnées cartésiennes:

$$\vec{A} = A_1\vec{i_1} + A_2\vec{i_2} + A_3\vec{i_3}\ ,$$
$$\vec{B} = B_1\vec{i_1} + B_2\vec{i_2} + B_3\vec{i_3}\ ,$$
$$\vec{C} = C_1\vec{i_1} + C_2\vec{i_2} + C_3\vec{i_3}\ ,$$

et

$$\vec{L} = L_1\vec{i_1} + L_2\vec{i_2} + L_3\vec{i_3}\ ,$$
$$\vec{M} = M_1\vec{i_1} + M_2\vec{i_2} + M_3\vec{i_3}\ ,$$
$$\vec{N} = N_1\vec{i_1} + N_2\vec{i_2} + N_3\vec{i_3}\ ,$$
$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i_1} + y\vec{i_2} + z\vec{i_3}\ ,$$

l'équation (5) donne:

$$\overrightarrow{OM'} = x'\vec{i_1} + \vec{y'}\vec{i_2} + \vec{z'}\,i_3 \tag{6}$$

---

[1] GIBBS-WILSON, *Vectoranalysis*, 3me éd., p. 265.

[2] C'est-à-dire tenseur-opérateur au sens de GIBBS, RUNGE, SPIELREIN, BUDDE et d'autres. La même notion est l'« homografie » de MM. MARCOLONGO et BURALI-FORTI. La notion ci-dessus est un peu différente de celle du tenseur dans le calcul différentiel absolu (SCHOUTEN). Comparer: BOULIGAND, *Leçons de géométrie vectorielle*, p. 152 et 295.

et les composantes x', y' z' de ce vecteur transformé sont des fonctions linéaires et homogènes de trois composantes x, y, z du vecteur original, soit:

$$\begin{aligned} x' &= a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z \\ y' &= a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z \\ z' &= a_{3,1}x + a_{3,2}y + a_{3,3}z \; ; \end{aligned} \tag{7}$$

il résulte:

$$a_{i,k} = \mathrm{A}_i \mathrm{L}_k + \mathrm{B}_i \mathrm{M}_k + \mathrm{C}_i \mathrm{N}_k \; , \quad i, k = 1, 2, 3 \; .$$

Le vecteur transformé $\overrightarrow{\mathrm{OM}'}$ est alors une fonction *linéaire et homogène*[1] du vecteur original $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.

On a d'ailleurs

$$\begin{aligned} &\vec{\mathrm{A}}(\vec{\mathrm{L}} \times \overrightarrow{\mathrm{OM}}) + \vec{\mathrm{B}}(\vec{\mathrm{M}} \times \overrightarrow{\mathrm{OM}}) + \vec{\mathrm{C}}(\vec{\mathrm{N}} \times \overrightarrow{\mathrm{OM}}) \\ &= (\overrightarrow{\mathrm{OM}} \times \vec{\mathrm{L}})\vec{\mathrm{A}} + (\overrightarrow{\mathrm{OM}} \times \vec{\mathrm{M}})\vec{\mathrm{B}} + (\overrightarrow{\mathrm{OM}} \times \vec{\mathrm{N}})\vec{\mathrm{C}} \; . \end{aligned} \tag{8}$$

D'après (5) nous pouvons écrire symboliquement:

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}'} = \mathrm{T} \times \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \times \mathrm{T}_c \tag{9}$$

et T_c signifie le tenseur:

$$\mathrm{T}_c = \vec{\mathrm{L}}\vec{\mathrm{A}} + \vec{\mathrm{M}}\vec{\mathrm{B}} + \vec{\mathrm{N}}\vec{\mathrm{C}} \tag{10}$$

que nous appellerons — en le rapprochant du tenseur (4) — *tenseur conjugué* au tenseur T.

Le tenseur T, comme premier facteur [dans le premier membre de (8)] et le tenseur T_c comme le second facteur [dans le second facteur de (8)] donnent le même résultat cartésien (6) et (7).

2. — *Objet du mémoire.*

α) Pour les nombres imaginaires:

$$\begin{aligned} w &= u + iv \\ dz &= dx + i\,dy \end{aligned} \tag{11}$$

---

[1] BOULIGAND, *Leçons de géométrie vectorielle.* 1924. Paris, Vuibert, p. 152 et 295.

l'expression wdz est une différentielle d'une fonction de la variable complexe z, quand la partie réelle u et imaginaire pure v satisfont aux conditions bien connues de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\,^{1}. \tag{I}$$

β) D'autre part GIBBS [2] a introduit les vecteurs imaginaires (bivecteurs) $\vec{u} + i\,\vec{v}$, où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs réels et il a énoncé quelques théorèmes et des règles concernant ceux-ci.

J'introduis dans le présent mémoire, d'une part, des vecteurs imaginaires $\vec{u}_1 + i\vec{u}_2$ comme fonctions d'un vecteur imaginaire indépendant, c'est-à-dire de $\overrightarrow{OM}_1 + i\overrightarrow{OM}_2$ et, d'autre part, des tenseurs imaginaires $T_1 + iT_2$, qui ne paraissent pas avoir encore été introduits dans l'analyse vectorielle et dont les propriétés géométriques sont très curieuses (voir n° 3).

C'est surtout l'étude des dérivées de ces fonctions qui fera l'objet du mémoire présent.

γ) Pour arriver à la notion de fonctions (vectorielles ou tensorielles) de la variable vectorielle et imaginaire je dois introduire des fonctions scalaires vectorielles et tensorielles, qui ont deux ou plusieurs variables vectorielles et réelles. C'est pour de telles fonctions de deux variables réelles et indépendantes $\overrightarrow{OM}_1$, $\overrightarrow{OM}_2$ que j'ai établi la formule:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \overrightarrow{OM}_1\, \partial \overrightarrow{OM}_2} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \overrightarrow{OM}_2\, \partial \overrightarrow{OM}_1}\right)_c \qquad \text{(XIII) n° 8}$$

et l'analogue pour la fonction vectorielle $\vec{U}$. Pour le sens précis de cette formule, voir n° 8 (XIII) et (XIX).

δ) La condition nécessaire et suffisante, pour que les expressions différentielles:

$$\vec{u} \times d\overrightarrow{OM}, \qquad d\overrightarrow{OM} \times T,$$

dans lesquelles $\vec{u}$ et T signifient un vecteur et un tenseur du second ordre respectivement, qui sont tous les deux fonctions du

---

1 Sous lesquelles w est « une fonction complexe de la variable z ».
2 J. B. GIBBS-E. B. WILSON, *Vector analysis*. Yale, 1913, 3me éd., p. 429.

vecteur réel $\overrightarrow{OM}$, soient différentielles d'une fonction scalaire U, ou vectorielle $\vec{U}$ respectivement du même vecteur $\overrightarrow{OM}$ est depuis longtemps connue. C'est la question fondamentale pour considérer le champ de scalaires [1] et celui de vecteurs [2].

C'est M. F. Jung (« Ableitungsbildung im räumlichen Grössenfelde », *Zeitschrift f. Mathematik*, T. 56, 1908) qui appelle ces dérivées: « dérivées et différentielles dans l'espace ».

ε) J'ai établi dans le présent mémoire en premier lieu les conditions nécessaires et suffisantes pour que les expressions diffé rentielles, soit :

$$(\vec{u}_1 + i\vec{u}_2) \times (d\overrightarrow{OM}_1 + id\overrightarrow{OM}_2)$$

soit:

$$(T_1 + iT_2) \times (d\overrightarrow{OM}_1 + id\overrightarrow{OM}_2)$$

soient des différentielles d'une fonction scalaire et imaginaire et d'une fonction vectorielle et imaginaire respectivement de la variable indépendante $\overrightarrow{OM}_1 + i\overrightarrow{OM}_2$. Pour de telles dérivées j'ai trouvé les formules (n° 9, 10):

$$\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial \overrightarrow{OM}_1} = \left(\frac{\partial \vec{u}_2}{\partial \overrightarrow{OM}_2}\right)_c, \quad \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial \overrightarrow{OM}_2} = -\left(\frac{\partial \vec{u}_2}{\partial \overrightarrow{OM}_1}\right)_c \qquad \text{(XXII, n° 9)}$$

et

$$\frac{\partial T_1}{\partial \overrightarrow{OM}_1} = \left(\frac{\partial T_2}{\partial \overrightarrow{OM}_2}\right)_c, \quad \frac{\partial T_1}{\partial \overrightarrow{OM}_2} = -\left(\frac{\partial T_2}{\partial \overrightarrow{OM}_1}\right)_c, \qquad \text{(XXXIV, n° 10)}$$

qui ont la forme de formules de Cauchy-Riemann (I) et dont le sens sera précisé au n° 9 et 10. Je crois que ces équations sont originales et que leur interprétation géométrique et analytique est avantageuse. Voir n°s 9 et 10 pour les détails.

3. — *Algèbre des vecteurs et des tenseurs imaginaires.*

α) *Bivecteurs.* — Gibbs [3] appelle « bivecteurs » des vecteurs imaginaires de la forme

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + i\vec{u}_2$$

---

1 A. Chatelet et J. Kampé de Fériet, *Calcul vectoriel*, p. 369, 374.
2 G. Bouligand, *Leçons de géométrie vectorielle*, p. 181.
3 J. B. Gibbs-E. B. Wilson, *loc. cit.*, p. 429.

dans laquelle $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ signifient deux vecteurs réels et i l'unité imaginaire. Pour calculer avec de tels bivecteurs il faut garder les mêmes règles, qui concernent les nombres imaginaires scalaires (biscalaires, au point de vue de Gibbs).

En premier lieu, l'égalité de deux bivecteurs:

$$\vec{u} = \vec{v} ,$$

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + i\vec{u}_2 , \qquad \vec{v} = \vec{v}_1 + i\vec{v}_2 \tag{12}$$

entraîne deux égalités réelles:

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 , \qquad \vec{u}_2 = \vec{v}_2 . \tag{13}$$

Un bivecteur est nul, lorsque les parties réelle et imaginaire sont nulles.

Pour faire le produit (n'importe lequel) de deux bivecteurs, il faut garder la règle distributive et tenir compte qu'on a toujours:

$$i \, . \, i = i^2 = -1 \tag{14}$$

n'importe quelle manière de multiplication vectorielle étant en question, par exemple:

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= (\vec{u}_1 + i\vec{u}_2) \times (\vec{v}_1 + i\vec{v}_2) = \\ &= \vec{u}_1 \times \vec{v}_1 - \vec{u}_2 \times \vec{v}_2 + i(\vec{u}_1 \times \vec{v}_2 + \vec{u}_2 \times \vec{v}_1) , \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= (\vec{u}_1 + i\vec{u}_2) \wedge (\vec{v}_1 + i\vec{v}_2) = \\ &= \vec{u}_1 \wedge \vec{v}_1 - \vec{u}_2 \wedge \vec{v}_2 + i(\vec{u}_1 \wedge \vec{v}_2 + \vec{u}_2 \wedge \vec{v}_1) . \end{aligned} \tag{16}$$

Le produit du bivecteur $\vec{u}_1 + i\vec{u}_2$ par un facteur circulaire $e^{iq} = \cos q + i \sin q$ donne un bivecteur $\vec{u}_1' + i\vec{u}_2'$ dont les parties réelles $\vec{u}_1'$ et imaginaire pure $\vec{u}_2'$ sont:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1' &= \vec{u}_1 \cos q - \vec{u}_2 \sin q , \\ \vec{u}_2' &= \vec{u}_1 \sin q + \vec{u}_2 \cos q . \end{aligned} \tag{17}$$

Lorsque $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ représentent deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse, les vecteurs $\vec{u}_1'$, u_2' constituent une autre paire de demi-diamètres conjugués de la même ellipse, de sorte que la

paire $\vec{u}_1'$, $\vec{u}_2'$ est tournée dans le sens de $\vec{u}_2$ à $\vec{u}_1$ et l'aire de l'ellipse balayée par les rayons vecteurs $\vec{u}_1'$ ou $\vec{u}_2'$ fait une partie $\frac{q}{2\pi}$ de l'ellipse totale [1]. Chaque bivecteur correspond ainsi à une ellipse dite « directionnelle », dont les demi-diamètres conjugués sont les deux vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

Pour le vecteur réel ($\vec{u}_2 = 0$), cette ellipse se réduit à un segment de droite et dans un autre cas l'ellipse devient une circonférence, ce qui se présente, quand l'équation:

$$\vec{u} \times \vec{u} = (\vec{u}_1 + i\vec{u}_2) \times (\vec{u}_1 + i\vec{u}_2) = \vec{u}_1^2 - \vec{u}_2^2 + 2i\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = 0 \qquad (18)$$

subsiste.

Dans ce cas, $u_1 = u_2$ et $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = 0$, c'est-à-dire les deux vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ sont égaux en grandeur et perpendiculaires: l'ellipse devient une circonférence.

Le symbole:

$$\vec{u} \times \vec{u} = 0 \qquad (II)$$

n'a pas alors la seule conséquence:

$$\vec{u} = 0 \ ,$$

comme dans le cas réel. Plutôt l'équation (II) subsiste pour tous les vecteurs, considérés plus haut. Gibbs appelle de tels vecteurs vecteurs circulaires [2].

β) *Tenseurs imaginaires.* — Pour exposer la théorie des différentielles tensorielles imaginaires, il faut encore introduire des tenseurs imaginaires. On n'en a considéré jusqu'à présent que quelques formes très simples: (tenseurs i, $e^{i\varphi}$; Burali-Forti: « Eléments du calcul vectoriel », 1910, p. 47).

Le tenseur imaginaire a, en général, la forme:

$$T = T_1 + iT_2 \ , \qquad (III)$$

---

[1] Une telle rotation est dite « elliptique ».

[2] Tel est p. ex. le bivecteur:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{i}_1 + \varepsilon_1 \vec{i}_2 + \varepsilon_2 \vec{i}_3$$

où ε_1 et ε_2 sont les deux racines troisièmes imaginaires de l'unité. Puisqu'on a:

$$1 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 = 0$$

on a encore

$$\overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{OM} = 0 \ .$$

où T_1 et T_2 sont deux tenseurs (en particulier du second ordre) réels et i est l'unité imaginaire scalaire.

α) Les vecteurs réels $\vec{u}$ se transforment par le tenseur imaginaire (III) en des bivecteurs. On a, pour le vecteur $\vec{u}$ *réel*:

$$T \times \vec{u} = T_1 \times \vec{u} + i T_2 \times \vec{u} \ . \tag{19}$$

Le second membre de cette équation est un vecteur imaginaire (bivecteur).

Le tenseur conjugué au (III) a la forme:

$$T_c = (T_1)_c + i(T_2)_c \tag{20}$$

[voir n° 1 (8), (9)] et il résulte:

$$T \times \vec{u} = \vec{u} \times T_c = \vec{u} \times (T_1)_c + i\vec{u} \times (T_2)_c \ . \tag{21}$$

β) Les vecteurs *imaginaires* $\vec{u} = \vec{u}_1 + i u_2$ se transforment par le tenseur (III) toujours en des vecteurs imaginaires. Il vient:

$$\begin{aligned}(T_1 + i T_2) \times (\vec{u}_1 + i\vec{u}_2) \\ = T_1 \times \vec{u}_1 - T_2 \times \vec{u}_2 + i(T_1 \times \vec{u}_2 + T_2 \times \vec{u}_1) \ ,\end{aligned} \tag{22}$$

ce qui est un vecteur imaginaire.

L'équation:

$$T \times \vec{u} = \vec{u} \times T_c \tag{23}$$

subsiste, en vertu de (22) même dans le cas où le tenseur T et le vecteur $\vec{u}$ sont imaginaires.

D'ailleurs, un tenseur imaginaire peut se représenter sous une autre forme:

$$T = \vec{A}\vec{L} + \vec{B}\vec{M} + \vec{C}\vec{N} \ , \tag{24}$$

comme dans le cas réel (n° 1 (10)).

$\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$; $\vec{L}$, $\vec{M}$, $\vec{N}$ constituent deux triades de trois vecteurs imaginaires et arbitraires en général.

Si l'on pose:

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + i\vec{A}_2 \ , \qquad \vec{L} = \vec{L}_1 + i\vec{L}_2 \ , \quad \text{etc.},$$

il résulte dans le second membre de (24):

$$T = \left.\begin{array}{r} \vec{A}_1 \vec{L}_1 - \vec{A}_2 \vec{L}_2 \\ + \vec{B}_1 \vec{M}_1 - \vec{B}_2 \vec{M}_2 \\ + \vec{C}_1 \vec{N}_1 - \vec{C}_2 \vec{N}_2 \end{array}\right\} i + \left\{\begin{array}{r} \vec{A}_1 \vec{L}_2 + \vec{A}_2 \vec{L}_1 \\ + \vec{B}_1 \vec{M}_2 + \vec{B}_2 \vec{M}_1 \\ + \vec{C}_1 \vec{N}_2 + \vec{C}_2 \vec{N}_1 \end{array}\right\} \tag{25}$$

Le résultat, est évidemment de la forme (III).

Je vais établir maintenant que les tenseurs imaginaires ont quelques propriétés géométriques remarquables. En voici un exemple: Dans un mémoire « Sur les formules linéaires dans la théorie des fonctions théta » (*Bulletin de l'Académie des Sciences de Bohème*, Prague, 1925), j'ai fait une remarque sur un tenseur, dont la forme à neuf termes a pour déterminant:

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ 1, & \varepsilon_2, & \varepsilon_1 \end{vmatrix}, \tag{26}$$

où ε_1, ε_2 signifient les deux imaginaires racines troisièmes de l'unité. Voici quelques propriétés géométriques de ce tenseur:

Soient i_1, i_2, i_3 trois vecteurs-unités orthogonaux, nous pouvons donner au tenseur mentionné la forme:

$$T = \vec{i}_1(\vec{i}_1 + \vec{i}_2 + \vec{i}_3) + \vec{i}_2 \vec{r} + \vec{i}_3 \vec{r}' \tag{27}$$

où $\vec{r}$ et $\vec{r}'$ sont deux vecteurs imaginaires conjugués, c'est-à-dire:

$$\vec{r}_1 \pm i \vec{r}_2$$

et

$$\vec{r}_1 = \vec{i}_1 - \frac{\vec{i}_2}{2} - \frac{\vec{i}_3}{2}, \qquad \vec{r}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(\vec{i}_2 - \vec{i}_3) . \tag{28}$$

1. — Quand on écrit les deux vecteurs conjugués $\vec{r}$ et $\vec{r}'$ sous la forme:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{i}_1 + \varepsilon_1 \vec{i}_2 + \varepsilon_2 \vec{i}_3 , \\ \vec{r}' &= \vec{i}_1 + \varepsilon_2 \vec{i}_2 + \varepsilon_1 \vec{i}_3 , \end{aligned} \tag{29}$$

on voit immédiatement d'après le n° (3) qu'ils sont circulaires. D'ailleurs on tire de (28) directement:

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_1 = \vec{r}_2 \times \vec{r}_2 = \frac{3}{2}, \tag{30}$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = 0 . \tag{31}$$

2. — Pour le produit vectoriel $\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2$ il résulte:

$$\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2 = \vec{i}_1 + \vec{i}_2 + \vec{i}_3 , \tag{32}$$

c'est-à-dire, le plan du bivecteur $\vec{r}$ (le même plan correspond au bivecteur $\vec{r}'$) est perpendiculaire au vecteur $\vec{i}_1 + \vec{i}_2 + \vec{i}_3$, c'est-à-dire à la diagonale du cube $[\vec{i}_1\ \vec{i}_2\ \vec{i}_3]$ (produit mixte)

3. — Le tenseur (27) est alors de la forme:

$$\mathrm{T} = \vec{i}_1 \vec{u} + \vec{i}_2 \vec{r} + \vec{i}_3 \vec{r}' , \tag{33}$$

et

$$\vec{u} = \vec{i}_1 + \vec{i}_2 + \vec{i}_3 .$$

Le tenseur T, comme le premier facteur (la transformation $\vec{x}' = \mathrm{T} \times \vec{x}$) transforme tous les vecteurs $\vec{x}$ parallèles à $\vec{u}$ (c'est-à-dire perpendiculaires au plan de $\vec{r}[\vec{r}']$) en des vecteurs $\vec{x}'$ parallèles à $\vec{i}_1$; les vecteurs parallèles au plan de $\vec{r}'$ se transforment en des vecteurs parallèles au plan $(\vec{i}_2\ \vec{i}_3)$, qui est perpendiculaire à $\vec{i}_1$. La transformation $\vec{x}' = \vec{x} \times \mathrm{T}$ (le tenseur T y figure comme le second facteur) est analogue: les vecteurs parallèles à $\vec{i}_1$, se transforment en vecteurs parallèles à $\vec{u}$ et les vecteurs du plan $(\vec{i}_2\ \vec{i}_3)$ se transforment en vecteurs du plan de $\vec{r}$. Les deux vecteurs $\vec{i}_1$ et $\vec{u}$ et les deux plans $(\vec{i}_2\ \vec{i}_3)$ et $[\vec{r}]$ se correspondent.

Le tenseur un peu plus général a la forme:

$$\mathrm{T} = \vec{\sigma}\vec{\rho} + \vec{r}\vec{s} + \vec{r}'\vec{s}' \tag{34}$$

dans laquelle $\vec{r}$, $\vec{r}'$; $\vec{s}$, $\vec{s}'$ sont bivecteurs conjugués (mais, en général non plus circulaires) de sorte que l'on a:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}_1 + i\vec{r}_2 , & \vec{s} &= \vec{s}_1 + i\vec{s}_2 \\ \vec{r}' &= \vec{r}_1 - i\vec{r}_2 , & \vec{s}' &= \vec{s}_1 - i\vec{s}_2 \end{aligned} \tag{35}$$

et les quantités dans les seconds membres sont réelles. $\vec{\sigma}$ et $\vec{\rho}$ représentent deux vecteurs réels et tels que:

$$\begin{aligned} \vec{\rho} \times \vec{s} &= \vec{\rho} \times \vec{s'} = 0 \,, \\ \vec{\sigma} \times \vec{r} &= \vec{\sigma} \times \vec{r'} = 0 \,, \end{aligned} \tag{36}$$

La transformation correspondante est facile à former.

4. — *Dérivées des fonctions scalaires et vectorielles de deux vecteurs réels ou d'un vecteur imaginaire. Dérivée d'un tenseur imaginaire par rapport à un vecteur imaginaire.*

A côté d'expressions vectorielles déjà mentionnées, j'emploie encore les notations suivantes:

Vecteur gradient [1] de la fonction scalaire:

$$\vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i_1} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{i_2} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{i_3} \,. \tag{IV}$$

Tenseur-gradient [2] de la fonction vectorielle:

$$\vec{\nabla} \vec{U} = \vec{\nabla} U_1 \vec{i_1} + \vec{\nabla} U_2 \vec{i_2} + \vec{\nabla} U_3 \vec{i_3} \tag{V}$$

où $\vec{U}$ signifie le vecteur:

$$\vec{U} = U_1 \vec{i_1} + U_2 \vec{i_2} + U_3 \vec{i_3} \,.$$

Tenseur-gradient conjugué:

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \vec{U})_c &= \vec{i_1} \vec{\nabla} U_1 + \vec{i_2} \vec{\nabla} U_2 + \vec{i_3} \vec{\nabla} U_3 \\ &\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \vec{i_1} + \frac{\partial \vec{U}}{\partial y} \vec{i_2} + \frac{\partial \vec{U}}{\partial z} \vec{i_3} \,. \end{aligned} \tag{37}$$

L'unité tensorielle [3] (idem factor de Gibbs):

$$I = \vec{i_1} \vec{i_1} + \vec{i_2} \vec{i_2} + \vec{i_3} \vec{i_3} \,. \tag{38}$$

On a pour un vecteur $\overrightarrow{OM}$ quelconque:

$$I \times \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} \times I = \overrightarrow{OM} \,. \tag{39}$$

Le tenseur I définit alors la transformation identique.

---

1 CHATELET-KAMPÉ DE FÉRIET, *Loc. cit.*, p. 376.
2 GIBBS-WILSON, *Loc. cit.*, p. 404. — SPIELREIN, *Vectorrechnung*, 2me éd. 1926, p. 354.
3 GIBBS-WILSON, *Loc. cit.*, p. 325.

5. — Avant d'exposer la théorie des expressions différentielles formées par les vecteurs imaginaires, il faut introduire et préciser les notions suivantes:

α) La différentielle d'une *fonction scalaire* U est un scalaire dU.

Pour que l'expression:

$$\vec{u} \times d\overrightarrow{OM} \tag{VI}$$

dans laquelle $\vec{u}$ signifie une fonction vectorielle du vecteur indépendant $\overrightarrow{OM}$ soit une différentielle d'une fonction scalaire U du même vecteur il faut et il suffit [1] que la fonction vectorielle $\vec{u}$ soit un vecteur-gradient de la fonction scalaire U, c'est-à-dire:

$$\vec{u} = \vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}_1 + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{i}_2 + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{i}_3 \ . \tag{40}$$

β) On peut écrire symboliquement sous la forme d'une dérivée par rapport à $\overrightarrow{OM}$

$$\frac{dU}{d\overrightarrow{OM}} = \vec{\nabla} U \ . \tag{41}$$

L'expression différentielle (VI) donne alors:

$$\vec{u} \times d\overrightarrow{OM} = \vec{\nabla} U \times d\overrightarrow{OM} = \frac{dU}{d\overrightarrow{OM}} \times d\overrightarrow{OM} = dU \tag{VII}$$

et la première dérivée (41) est un vecteur.

γ) La seconde dérivée: $\dfrac{d^2U}{d\overrightarrow{OM}^2} = \dfrac{d\vec{\nabla} U}{d\overrightarrow{OM}}$ est (voir n° 4 (IV) un tenseur du second ordre.

Il résulte:

$$\frac{d^2U}{d\overrightarrow{OM}^2} = \vec{\nabla}\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}_1 + \vec{\nabla}\frac{\partial U}{\partial y}\vec{i}_2 + \vec{\nabla}\frac{\partial U}{\partial z}\vec{i}_3 \tag{42}$$

et

$$\vec{\nabla}\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\vec{i}_1 + \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x}\vec{i}_2 + \frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x}\vec{i}_3 \ , \tag{43}$$

etc.

δ) La différentielle d'une *fonction vectorielle* $\vec{U}$ est le vecteur $d\vec{U}$.

---

[1] CHATELET-KAMPÉ DE FÉRIET, *Loc. cit.*, p. 377.

Le produit

$$d\overrightarrow{OM} \times T = T_c \times d\overrightarrow{OM} \tag{44}$$

dans lequel T signifie un tenseur du second ordre, dont T_c est le tenseur conjugué (voir n° 1 (10)) représente une différentielle d'une fonction vectorielle $\vec{U}$ du vecteur variable $\overrightarrow{OM}$ sous la condition nécessaire et suffisante, qu'on puisse exprimer le tenseur T comme tenseur-gradient (n° 4 (V)) de la fonction $\vec{U}$, c'est-à-dire:

$$T = \vec{\nabla}\vec{U} = \vec{\nabla}U_1\vec{i}_1 + \vec{\nabla}U_2\vec{i}_2 + \vec{\nabla}U_3\vec{i}_3 \tag{45}$$

$$\begin{aligned} T_c = (\vec{\nabla}U)_c &= \vec{i}_1\vec{\nabla}U_1 + \vec{i}_2\vec{\nabla}U_2 + \vec{i}_3\vec{\nabla}U_3 \\ &= \frac{\partial\vec{U}}{\partial x}\vec{i}_1 + \frac{\partial\vec{U}}{\partial y}\vec{i}_2 + \frac{\partial\vec{U}}{\partial z}\vec{i}_3 \end{aligned} \tag{46}$$

et

$$\vec{U} = U_1\vec{i}_1 + U_2\vec{i}_2 + U_3\vec{i}_3 \tag{47}$$

U_1, U_2, U_3 sont trois fonctions scalaires et indépendantes du même vecteur variable $\overrightarrow{OM}$ et dans les seconds membres (45) et (46) figurent leurs vecteurs-gradients.

On a de suite:

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{OM} \times T = T_c \times d\overrightarrow{OM} &= d\overrightarrow{OM} \times \vec{\nabla}\vec{U} \\ &= (\vec{\nabla}\vec{U})_c = d\overrightarrow{OM} = d\vec{U}\ . \end{aligned} \tag{VIII}$$

On développe les tenseurs (45) et (46) en leurs formes à neuf termes, si l'on prend pour les vecteurs-gradients $\vec{\nabla}U_1$, $\vec{\nabla}U_2$, $\vec{\nabla}U_3$ leurs expressions en coordonnées [n° 4 (IV)].

ε) On peut alors écrire symboliquement la première dérivée d'une fonction vectorielle $\vec{U}$ par rapport à $\overrightarrow{OM}$:

$$\frac{d\vec{U}}{d\overrightarrow{OM}} = \vec{\nabla}\vec{U} \tag{IX}$$

et cette dérivée, d'après cela, précède un tenseur du second ordre (dyadique, voir n° 1).

ζ) La seconde dérivée $\dfrac{d^2\vec{U}}{d\overrightarrow{OM}^2} = \dfrac{d\vec{\nabla}\vec{U}}{d\overrightarrow{OM}}$ se représente, en vertu

du n° 4 (V) et de l'équation (41), comme il suit:

$$\frac{d\vec{\nabla}\vec{U}}{d\overrightarrow{OM}} = \vec{\nabla}\vec{\nabla}U_1\vec{i}_1 + \vec{\nabla}\vec{\nabla}U_2\vec{i}_2 + \vec{\nabla}\vec{\nabla}U_3\vec{i}_3 \,. \qquad (X)$$

où figurent dans le second membre les gradients du second ordre, qui ne sont que les tenseurs de la forme:

$$\vec{\nabla}\vec{\nabla}U_1 = \vec{\nabla}\frac{\partial U_1}{\partial x}\vec{i}_1 + \vec{\nabla}\frac{\partial U_1}{\partial y}\vec{i}_2 + \vec{\nabla}\frac{\partial U_1}{\partial z}\vec{i}_3 \,, \qquad (48)$$

conformément à l'équation (V) n° 4.

La seconde dérivée d'une fonction vectorielle par rapport au vecteur $\overrightarrow{OM}$ est alors un tenseur du troisième ordre. (Tenseur triadique [1]).

Tenant compte de (43), (48) et (40), on exprime tout simplement les tenseurs $\frac{d^2U}{d\overrightarrow{OM}^2}$ et $\frac{d^2\vec{U}}{d\overrightarrow{OM}^2}$ en leurs formes développées respectivement en 9 et en 27 termes, ce qui serait superflu ici.

6. — *Les fonctions scalaires et vectorielles de plusieurs variables vectorielles indépendantes.*

Dans le calcul vectoriel, surtout dans la théorie des surfaces, on se sert de fonctions scalaires et vectorielles de deux variables scalaires indépendantes. Pour exposer la théorie de fonctions de vecteurs imaginaires (bivecteurs [2] voir n° 3), il faut introduire les fonctions de deux et plusieurs vecteurs indépendants. Ces fonctions doivent être tantôt scalaires, tantôt vectorielles et même tensorielles, comme dans le cas d'une seule variable vectorielle. Nous emploierons la notation $\overrightarrow{OM}_1$, $\overrightarrow{OM}_2$ pour les deux variables, ce que signifie par exemple deux vecteurs, menés de l'origine, et indépendants d'ailleurs.

La mesure de la distance de deux points (ou son carré) est une fonction scalaire de deux vecteurs menés de l'origine aux points respectifs. La force, que produisent deux courants linéaires l'un sur l'autre, est une fonction vectorielle de deux intensités-variables vectorielles.

---

[1] Gibbs appelle des expressions comme: $\vec{u}\,\vec{v}\,\vec{w}$ triades. *Vectoranalysis*, 281.
[2] GIBBS-WILSON, *Loc. cit.*, 428.

7. — *Définition.* — On dit qu'une fonction scalaire U (vectorielle $\vec{U}$) de deux variables vectorielles $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ est définie pour un domaine Ω des champs de vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ (c'est-à-dire pour tous les vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ menés de l'origine, dont les points extrémités se trouvent dans la région donnée Ω[1], qui d'ailleurs peut se composer de deux parties distinctes pour chacun de deux vecteurs) s'il existe une règle faisant correspondre à toute paire de vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ appartenant à la région Ω une valeur de la fonction scalaire U (ou une détermination à une équipollence près de la fonction vectorielle $\vec{U}$).

Chemin. — Nous pouvons définir un chemin à peu près, comme dans le cas de variables scalaires. On se donne « une suite continue » de variables $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ en prenant pour $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ des fonctions simultanées et continues d'une même variable scalaire (t) par exemple du temps.

Les deux points-extrémités, c'est-à-dire M_1 et M_2 décrivent alors deux courbes gauches à l'intérieur du domaine de définition — ce sont les chemins de deux points M_1 et M_2.

Limites et continuité. — La fonction scalaire $U(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2})$ ou vectorielle $\vec{U}(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2})$ a *une limite* $U_0(\vec{U_0})$ lorsque $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ tendent vers $\overrightarrow{OM_{1,0}}$, $\overrightarrow{OM_{2,0}}$ quand le scalaire $U(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2})$ (le vecteur $\vec{U}(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2})$) a pour limite $U_0(\vec{U_0})$ lorsque les points M_1, M_2 se déplacent sur les deux chemins envisagés et passant par $M_{1,0}$, $M_{2,0}$ et tendent vers $M_{1,0}$, $M_{2,0}$ et si cette limite est la même (ou équipollente) sur n'importe quels chemins passant par les points $M_{1,0}$, $M_{2,0}$.

La fonction $U(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2})$ $[\vec{U}(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2})]$ est *continue* pour un couple $\overrightarrow{OM_{1,0}}$, $\overrightarrow{OM_{2,0}}$ lorsque sa valeur est égale (ou lorsque elle est équipollente, dans le cas vectoriel) à la limite, quand $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ tendent vers $\overrightarrow{OM_{1,0}}$, $\overrightarrow{OM_{2,0}}$.

Les considérations analogues touchent les fonctions tensorielles de deux variables $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$.

8. — On appelle une *dérivée partielle* de la fonction scalaire $U(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2})$ [vectorielle $\vec{U}(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2})$] par rapport à $\overrightarrow{OM_1}$ pour

[1] Et pour des vecteurs équipollents.

les valeurs $\overrightarrow{OM_{1,0}}$, $\overrightarrow{OM_{2,0}}$ la dérivée de $U(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_{2,0}})$ [$\vec{U}(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_{2,0}})$], considérée comme fonction de $\overrightarrow{OM_1}$, seul, cette dérivée étant prise pour la valeur $\overrightarrow{OM_{1,0}}$ de la variable vectorielle (voir no 5: β), ε)). Cette dérivée est alors représentée par la limite

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \overrightarrow{OM_1}}\right)_{\overrightarrow{OM_{1,0}}} = \lim_{\overrightarrow{OM_1} \to \overrightarrow{OM_{1,0}}} \frac{U(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_{2,0}}) - U(\overrightarrow{OM_{1,0}}, \overrightarrow{OM_{2,0}})}{\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_{1,0}}} \qquad \text{(XI)}$$

et l'analogue pour l'autre variable. Pour la fonction vectorielle il faut surmonter la lettre U dans (XI) d'une flèche. Ces dérivées sont alors vecteurs-gradients partiels (n° 5, β) ou tenseurs gradients partiels (n° 5, ε) selon qu'il s'agit de la fonction scalaire ou vectorielle.

α) Soit $U(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2})$ une *fonction scalaire* de deux vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$. Nous poserons:

$$dU = \vec{\nabla}_1 U \times d\overrightarrow{OM_1} + \vec{\nabla}_2 U \times d\overrightarrow{OM_2} \qquad \text{(XII)}$$

et $\vec{\nabla}_1 U$, $\vec{\nabla}_2 U$ sont vecteurs-gradients partiels [1]:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_1 U &= \frac{\partial U}{\partial \overrightarrow{OM_1}} = \frac{\partial U}{\partial x_1}\vec{i}_1 + \frac{\partial U}{\partial y_1}\vec{i}_2 + \frac{\partial U}{\partial z_1}\vec{i}_3 , \\ \vec{\nabla}_2 U &= \frac{\partial U}{\partial \overrightarrow{OM_2}} = \frac{\partial U}{\partial x_2}\vec{i}_1 + \frac{\partial U}{\partial y_2}\vec{i}_2 + \frac{\partial U}{\partial z_2}\vec{i}_3 , \end{aligned} \qquad (49)$$

où l'on a posé:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM_1} &= x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{i}_2 + z_1\vec{i}_3 , \\ \overrightarrow{OM_2} &= x_2\vec{i}_1 + y_2\vec{i}_2 + z_2\vec{i}_3 . \end{aligned}$$

Les secondes dérivées:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial \overrightarrow{OM_1}^2} &= \nabla_{1,1} U , & \frac{\partial^2 U}{\partial \overrightarrow{OM_1}\,\partial \overrightarrow{OM_2}} &= \nabla_{1,2} U , \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \overrightarrow{OM_2}\,\partial \overrightarrow{OM_1}} &= \nabla_{2,1} U , & \frac{\partial^2 U}{\partial \overrightarrow{OM_2}^2} &= \nabla_{2,2} U \end{aligned} \qquad (50)$$

sont, comme il résulte du n° 5, γ), tenseurs du second ordre.

---

[1] Les indices correspondent aux points en question.

A cause du n° 5 (43) et (49) on démontre aisément, comme dans le cas de variables scalaires, l'égalité remarquable:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \overrightarrow{OM_1}\, \partial \overrightarrow{OM_2}} = \nabla_{1,2} U = (\nabla_{2,1} U)_c = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \overrightarrow{OM_2}\, \partial \overrightarrow{OM_1}}\right)_c, \qquad \text{(XIII)}$$

dans laquelle l'indice c signifie le tenseur conjugué (n° 1 (9)).

En vertu de cette égalité, on a:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \overrightarrow{OM_1}\, \partial \overrightarrow{OM_2}} \times d\overrightarrow{OM_2}\right) \times d\overrightarrow{OM_1} =$$

$$d\overrightarrow{OM_1} \times \left(d\overrightarrow{OM_2} \times \frac{\partial^2 U}{\partial \overrightarrow{OM_2}\, \partial \overrightarrow{OM_1}}\right). \qquad \text{(XIV)}$$

Les équations (XIII) et la conséquence (XIV) mettent en relief la différence entre les dérivées par rapport aux variables scalaires et vectorielles, elles sont de grande importance pour le calcul différentiel avec des variables vectorielles.

En coordonnées rectangulaires (XIII) prend la forme:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial \overrightarrow{OM_1}\, \partial \overrightarrow{OM_2}} &= \vec{\nabla}_1 \frac{\partial U}{\partial x_2} \vec{i}_1 + \vec{\nabla}_1 \frac{\partial U}{\partial y_2} \vec{i}_2 + \vec{\nabla}_1 \frac{\partial U}{\partial z_2} \vec{i}_3 \\ &= \vec{i}_1 \vec{\nabla}_2 \frac{\partial U}{\partial x_1} + \vec{i}_2 \vec{\nabla}_2 \frac{\partial U}{\partial y_1} + \vec{i}_3 \vec{\nabla}_2 \frac{\partial U}{\partial z_1} \\ &= \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \overrightarrow{OM_2}\, \partial \overrightarrow{OM_1}}\right)_c, \qquad \text{(XV)}\end{aligned}$$

où pour la forme développée de la dérivée dans le second membre résulte:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial \overrightarrow{OM_2}\, \partial \overrightarrow{OM_1}} = {} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_2\, \partial x_1} \vec{i}_1 \vec{i}_1 + \frac{\partial^2 U}{\partial y_2\, \partial x_1} \vec{i}_2 \vec{i}_1 + \frac{\partial^2 U}{\partial z_2\, \partial x_1} \vec{i}_3 \vec{i}_1 \\ & + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2\, \partial y_1} \vec{i}_1 \vec{i}_2 + \frac{\partial^2 U}{\partial y_2\, \partial y_1} \vec{i}_2 \vec{i}_2 + \frac{\partial^2 U}{\partial z_2\, \partial y_1} \vec{i}_3 \vec{i}_2 \\ & + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2\, \partial z_1} \vec{i}_1 \vec{i}_3 + \frac{\partial^2 U}{\partial y_2\, \partial z_1} \vec{i}_2 \vec{i}_3 + \frac{\partial^2 U}{\partial z_2\, \partial z_1} \vec{i}_3 \vec{i}_3 \qquad \text{(XVI)}\end{aligned}$$

et l'analogue pour le premier membre: les indices des coordonnées sont échangés entre eux; la validité de l'équation (XIII) saute aux yeux.

Un exemple. — Pour le carré de la distance de deux points-extrémités de deux vecteurs menés d'origine, on a :

$$\begin{aligned} U = d^2 &= (\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}) \times (\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}) \\ &= \overrightarrow{OM_1} \times \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} \times \overrightarrow{OM_2} - 2\overrightarrow{OM_1} \times \overrightarrow{OM_2} . \end{aligned} \tag{51}$$

De là résulte:

$$dU = 2(\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}) \times d\overrightarrow{OM_1} + 2(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}) \times d\overrightarrow{OM_2} \tag{52}$$

et les vecteurs-gradients partiels sont:

$$\begin{aligned} \nabla_1 U &= 2(\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}) , \\ \nabla_2 U &= 2(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}) . \end{aligned} \tag{53}$$

Les secondes dérivées:

$$\nabla_{1,1} U = \nabla_{2\,2} U = 2I , \tag{54}$$

$$\nabla_{1.2} U = \nabla_{2,1} U = -2I \tag{55}$$

et I représente l'unité tensorielle, idem-factor (voir n° 4 (38)) un tenseur, qui est symétrique d'ailleurs (c'est pourquoi $\nabla_{2,1} U = (\nabla_{2,1} U)_c$ dans ce cas) et de la forme:

$$I = \vec{i}_1 \vec{i}_1 + \vec{i}_2 \vec{i}_2 + \vec{i}_3 \vec{i}_3 . \tag{XVII}$$

En général, une fonction:

$$\Phi(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}, \ldots \overrightarrow{OM_n}) = 0$$

doit représenter une liaison scléronome dans un système de n-points.

β) Par analogie, pour *une fonction vectorielle* $\vec{U}$ de deux variables indépendantes $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, il vient:

$$d\vec{U} = d\overrightarrow{OM_1} \times \frac{\partial \vec{U}}{\partial \overrightarrow{OM_1}} + d\overrightarrow{OM_2} \times \frac{\partial \vec{U}}{\partial \overrightarrow{OM_2}} \tag{XVIII}$$

(voir n° 1 et n° δ, ε). Les dérivées partielles qui y figurent sont des tenseurs du second ordre aisés à développer à l'aide du n° 4 et n° 5. — Les secondes dérivées partielles d'une fonction vectorielle par rapport aux vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ sont (n° 5, ζ)) des

tenseurs du 3me ordre [1] (triadiques) dont les termes, qui correspondent sont par exemple:

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial z_2\, \partial x_1} \vec{i}_3\, \vec{i}_1\, \vec{i}_i\,, \qquad \frac{\partial^2 U_i}{\partial z_1\, \partial x_2} \vec{i}_3\, \vec{i}_1\, \vec{i}_i\,, \qquad i = 1, 2, 3\,.$$

Les indices, qui se rapportent aux coordonnées sont échangés entre eux dans les deux dérivées. On peut exprimer cette circonstance symboliquement:

$$\frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial \overrightarrow{OM_1}\, \partial \overrightarrow{OM_2}} = \left(\frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial \overrightarrow{OM_2}\, \partial \overrightarrow{OM_1}} \right)_c \qquad \text{(XIX)}$$

ce qu'on peut prouver en outre en tenant compte de (ζ) n° 5.

9. — *Dérivées par rapport à une variable vectorielle imaginaire. Fonctions vectorielles de la variable vectorielle, imaginaire.*

α) Considérons l'expression différentielle de la forme:

$$(\vec{u}_1 + i\,\vec{u}_2)\,(d\,\overrightarrow{OM_1} + i\,d\,\overrightarrow{OM_2})\,. \qquad \text{(XX)}$$

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ soit un bivecteur:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + i\,\overrightarrow{OM_2}$$

les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ soient deux fonctions vectorielles réelles de deux variables vectorielles $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$. Dans quelle condition l'expression (XX) est-elle une différentielle d'un bivecteur ?; c'est-à-dire cherchons la condition, sous laquelle le bivecteur $\vec{u}_1 + i\,\vec{u}_2$ est une fonction du bivecteur $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + i\,\overrightarrow{OM_2}$. N'importe quel produit (scalaire ou vectoriel) représente l'expression (XX); on a toujours $i_1 = -1$ et le résultat de la multiplication est dans tous les cas:

$$(\vec{u}_1 + i\,\vec{u}_2)\,(d\,\overrightarrow{OM_1} + i\,d\,\overrightarrow{OM_2}) = (\vec{u}_2 + i\,\vec{u}_2)\,d\,\overrightarrow{OM_1} + (\vec{u}_1' + i\,\vec{u}_2')\,d\,\overrightarrow{OM_2} \qquad \text{(XXI)}$$

et

$$\vec{u}_1' = -\,\vec{u}_2\,, \qquad \vec{u}_2' = \vec{u}_1\,. \qquad (56)$$

[1] N° 5, ζ).

La transformation ci-dessus correspond à une rotation elliptique (voir n° 3) d'un angle de $\frac{\pi}{2}$ dans l'ellipse directionnelle. Les deux bivecteurs:

$$\vec{u}_1 + i\vec{u}_2 , \qquad \vec{u}'_1 + i\vec{u}'_2 \tag{57}$$

peuvent être regardés comme « parallèles », parce que les conditions:

$$\vec{u}_1 + i\vec{u} = i(\vec{u}'_1 + i\vec{u}'_2)$$
$$(\vec{u}_1 + i\vec{u}_2) \wedge (\vec{u}_2 - i\vec{u}_1) = 0 \tag{58}$$

sont remplies.

L'expression (XXI) se compose de deux parties plus simples, dont nous ferons l'objet de nos considérations.

β) *Différentielles scalaires.* — Que le produit dans le premier membre de (XX) soit le produit *scalaire.* Dans le second membre il résulte:

$$(\vec{u}_1 + i\vec{u}_2) \times d\overrightarrow{OM}_1 + (\vec{u}'_1 + i\vec{u}'_2) \times d\overrightarrow{OM}_2$$

laquelle expression, en accord au n° 8 (XII) est la différentielle totale d'une fonction imaginaire scalaire $U_1 + i\,U_2$ sous les conditions suivantes [(XII) et (49) n° 8]:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 + i\vec{u}_2 &= \vec{\nabla}_1(U_1 + iU_2) , \\ \vec{u}'_1 + i\vec{u}'_2 &= \vec{\nabla}_2(U_1 + iU_2) . \end{aligned} \tag{59}$$

Partageons les deux parties: réelle et imaginaire de ces équations en vue de (13) n° 3. On obtient:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \vec{\nabla}_1 U_1 , & \vec{u}_2 &= \vec{\nabla}_1 U_2 , \\ -\vec{u}'_2 &= \vec{\nabla}_2 U_1 , & \vec{u}'_1 &= \vec{\nabla}_2 U_2 . \end{aligned} \tag{60}$$

En considération du n° 8 (XIII) nous avons le résultat remarquable:

$$\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial \overrightarrow{OM}_1} = \left(\frac{\partial \vec{u}_2}{\partial \overrightarrow{OM}_2}\right)_c , \qquad \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial \overrightarrow{OM}_2} = -\left(\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial \overrightarrow{OM}_1}\right)_c . \tag{XXII}$$

Ce sont encore les équations différentielles partielles de la forme Cauchy-Riemann (I) n° 3, comme dans le cas scalaire, mais, les

dérivées qui y figurent sont des tenseurs du second ordre (n° 5, ε)), l'indice c signifie le tenseur conjugué. On les développe en forme à neuf termes à l'aide du n° 5 (45), (46) et (47) comme il suit.

En coordonnées cartésiennes les formules (XXII) prennent une forme assez curieuse.

Si l'on pose:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= u_{1,1}\vec{i}_1 + u_{1,2}\vec{i}_2 + u_{1,3}\vec{i}_3 , \\ \vec{u}_2 &= u_{2,1}\vec{i}_1 + u_{2,2}\vec{i}_2 + u_{2,3}\vec{i}_3 , \end{aligned} \tag{61}$$

on a d'une part:

$$\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial \overrightarrow{OM_1}} = \vec{\nabla}_1 \vec{u}_1 = \vec{\nabla}_1 \vec{u}_{1,1}\vec{i}_1 + \vec{\nabla}_1 u_{1,2}\vec{i}_2 + \vec{\nabla}_1 u_{1,3}\vec{i}_3 \tag{62}$$

et d'autre part:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \vec{u}_2}{\partial \overrightarrow{OM_2}}\right)_c &= (\vec{\nabla}_2 \vec{u}_2)_c = \vec{i}_1 \vec{\nabla}_2 u_{2,1} + \vec{i}_2 \vec{\nabla}_2 u_{2,2} + \vec{i}_3 \vec{\nabla}_2 u_{2,3} \\ &= \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial x_2}\vec{i}_1 + \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial y_2}\vec{i}_2 + \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial z_2}\vec{i}_3 . \qquad [\text{n}^\circ\ 5\ (45),\ (46)]. \end{aligned} \tag{63}$$

Les indices des opérateurs vectoriels se rapportent aux points-extrémités de deux vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$. En rapprochant les seconds membres de (62) et (63) en vertu de (XXII), il vient:

$$\vec{\nabla}_1 u_{1,1} = \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial x_2}, \qquad \vec{\nabla}_1 u_{1,2} = \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial y_2}, \qquad \vec{\nabla}_1 u_{1,3} = \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial z_2}. \tag{XXIII}$$

De la seconde équation (XXII) résultent par un calcul analogue trois équations:

$$\vec{\nabla}_2 u_{1,1} = -\frac{\partial \vec{u}_2}{\partial x_1}, \qquad \vec{\nabla}_2 u_{1,2} = -\frac{\partial \vec{u}_2}{\partial y_1}, \qquad \vec{\nabla}_2 u_{1,3} = -\frac{\partial \vec{u}_2}{\partial z_1}. \tag{XXIV}$$

Le système de six équations justement trouvées est équivalent au système de $3 \times 6 = 18$ équations en coordonnées rectangulaires de la forme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{1,1}}{\partial x_1} &= \frac{\partial u_{2,1}}{\partial x_2}, & \frac{\partial u_{1,1}}{\partial x_2} &= -\frac{\partial u_{2,1}}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial u_{1,1}}{\partial y_1} &= \frac{\partial u_{2,2}}{\partial x_2}, & \frac{\partial u_{1,1}}{\partial y_2} &= -\frac{\partial u_{2,2}}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial u_{1,1}}{\partial z_1} &= \frac{\partial u_{2,3}}{\partial x_2}, & \frac{\partial u_{1,1}}{\partial z_2} &= -\frac{\partial u_{2,3}}{\partial x_1} \end{aligned} \tag{XXV}$$

et 12 analogues, dont les premiers membres sont formés par des dérivées partielles de fonctions scalaires $u_{1,2}$, $u_{1,3}$ par rapport aux variables x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2.

Les six équations du système ci-dessus forment trois systèmes d'équations de Cauchy-Riemann, que voici (comparez n° 1 (I)):

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u_{1,1}}{\partial x_1} = \frac{\partial u_{1,2}}{\partial x_2}, \qquad \frac{\partial u_{1,2}}{\partial y_1} = \frac{\partial u_{2,2}}{\partial y_2}, \\
\frac{\partial u_{1,1}}{x_2} = -\frac{\partial u_{2,1}}{\partial x_1}; \qquad \frac{\partial u_{1,2}}{\partial y_2} = -\frac{\partial u_{2,2}}{\partial y_1}; \\
\frac{\partial u_{1,3}}{\partial z_1} = \frac{\partial u_{2,3}}{\partial z_2}, \\
\frac{\partial u_{1,3}}{\partial z_2} = -\frac{\partial u_{2,3}}{\partial z_1};
\end{gathered} \tag{XXVI}$$

γ) En vue de (XIX) n° 8 et n° 5 ζ) on peut écrire de (XXII) les équations du second ordre:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 \vec{u}_1}{\partial \overrightarrow{OM}_1^2} + \left(\frac{\partial^2 \vec{u}_1}{\partial \overrightarrow{OM}_2^2}\right)_c = 0, \\
\frac{\partial^2 \vec{u}_2}{\partial \overrightarrow{OM}_1^2} + \left(\frac{\partial^2 \vec{u}_2}{\partial \overrightarrow{OM}_2^2}\right)_c = 0,
\end{gathered} \tag{XXVII}$$

conformément au cas réel. Les premiers membres de ces équations sont des tenseurs du troisième ordre et l'indice c a la signification expliquée au n° 8 (XIX).

En coordonnées rectangulaires résultent de (XXVII) les équations du second ordre:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u_{1,1}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_{1,1}}{\partial x_2^2} = 0, \\
\frac{\partial^2 u_{2,1}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_{2,1}}{\partial x_2^2} = 0
\end{gathered} \tag{XXVIII}$$

et quatre analogues pour des fonctions $u_{1,2}$, $u_{2,2}$ ($u_{1,3}$, $u_{2,3}$) et pour les variables indépendantes y_1, y_2 (z_1, z_2).

Quand les conditions (XXII) et (XXVII) respectivement sont remplies l'expression considérée (XX) est une différentielle totale d'une fonction scalaire imaginaire, c'est-à-dire:

$$(\vec{u}_1 + i\vec{u}_2) \times (d\overrightarrow{OM}_1 + i\,d\overrightarrow{OM}_2) = d(U_1 + iU_2). \tag{XXIX}$$

δ) Considérons encore une autre expression différentielle, plus simple, où figure une différentielle imaginaire d'un seul vecteur. Tandis que dans la différentielle considérée au 9 n° α), β): $d\overrightarrow{OM_1} + id\overrightarrow{OM_2}$ jouent un rôle deux vecteurs indépendants, nous pouvons former une autre différentielle $d_1\overrightarrow{OM} + id_2\overrightarrow{OM}$ à l'aide de deux différentielles distinctes du même vecteur $\overrightarrow{OM}$, c'est-à-dire $d_1\overrightarrow{OM}$ et $d_2\overrightarrow{OM}$. Considérons une différentielle formée conformément à (XX) du n° 9 mais à l'aide de la différentielle justement définie:

$$d'V = (\vec{u}_1 + i\vec{u}_2) \times (d_1\overrightarrow{OM} + i\,d_2\overrightarrow{OM}) \ . \qquad \text{(XXX)}$$

Les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont deux fonctions vectorielles d'une seule variable $\overrightarrow{OM}$. Après la multiplication, le second membre de (XXX) prend la forme:

$$d'V = (\vec{u}_1 + i\vec{u}_2) \times d_1\overrightarrow{OM} + (-\vec{u}_2 + i\vec{u}_1) \times d_2\overrightarrow{OM} \ . \qquad (64)$$

En vue du n° 5 α) on trouve aisément les conditions nécessaires et suffisantes, pour que l'expression (XXX) soit une différentielle d'une fonction imaginaire, scalaire.

Les voici:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 + i\vec{u}_2 &= \nabla(U_1 + iU_2) \ , \\ -\vec{u}_2 + i\vec{u}_1 &= \nabla(-U_2 + iU_1) \ ; \end{aligned} \qquad \text{(XXXI)}$$

U_1 et U_2 sont deux fonctions scalaires du vecteur $\overrightarrow{OM}$, le vecteur gradient se rapporte au point-extrémité M. D'ailleurs, les deux équations (XXXI) sont identiques et elles fournissent des conditions:

$$\vec{u}_1 = \nabla U_1 \ , \qquad \vec{u}_2 = \nabla U_2 \ . \qquad \text{(XXXII)}$$

Les conditions intéressantes (XXII) et (XXVII) du n° 9 n'ont pas d'analogie dans le cas actuel, les conditions ci-dessus, beaucoup plus simples, les remplacent.

Quand les équations (XXXII) sont satisfaites nous pouvons mettre la différentielle (XXX) sous la forme:

$$\begin{aligned} d'V &= \nabla(U_1 + iU_2) \times d_1\overrightarrow{OM} + (-U_2 + iU_1) \times d_2\,OM \\ &= d_1(U_1 + iU_2) + d_2(-U_2 + iU_1) \ . \end{aligned} \qquad (65)$$

10. — *Fonctions tensorielles de la variable vectorielle imaginaire.*

α) Considérons alors une expression différentielle:

$$(d\overrightarrow{OM_1} + i\,d\overrightarrow{OM_2}) \times (T_1 + iT_2) = d\overrightarrow{OM_1} \times (T_1 + iT_2) + d\overrightarrow{OM_2} \times (T_1' + iT_2') \qquad \text{(XXXIII)}$$

dans laquelle (voir n° 9 (56))

$$T_1' = -T_2\,, \qquad T_2' = T_1\,. \qquad (66)$$

Pour que l'expression (XXXIII) soit une différentielle d'une fonction bivectorielle $\overrightarrow{U_1} + i\overrightarrow{U_2}$ composée de deux $\overrightarrow{U_1}$ et $\overrightarrow{U_2}$, qui sont fonctions réelles vectorielles de deux vecteurs réels, variables $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$, il est nécessaire et suffisant qu'il soit (n° 5, δ)

$$\begin{aligned} T_1 + iT_2 &= \vec{\nabla}_1(\vec{U}_1 + i\vec{U}_2)\,, \\ T_1' + iT_2' &= \vec{\nabla}_2(\vec{U}_1 + i\vec{U}_2)\,. \end{aligned} \qquad (67)$$

De là résulte, comme au n° 9:

$$\begin{aligned} T_1 = T_2' &= \vec{\nabla}_1\vec{U}_1 = \vec{\nabla}_2\vec{U}_2\,, \\ T_2 = -T_1' &= \vec{\nabla}_1\vec{U}_2 = -\vec{\nabla}_2\vec{U}_1\,. \end{aligned} \qquad (68)$$

Les tenseurs-gradients, qui figurent ci-dessus sont des gradients partiels (n° 8 (XI); les égalités, en vue du n° 8 (XIII) prennent la forme remarquable:

$$\frac{\partial T_1}{\partial \overrightarrow{OM_1}} = \left(\frac{\partial T_2}{\partial \overrightarrow{OM_2}}\right)_c\,, \qquad \frac{\partial T_1}{\partial \overrightarrow{OM_2}} = -\left(\frac{\partial T_2}{\partial \overrightarrow{OM_1}}\right)_c\,, \qquad \text{(XXXIV)}$$

analogue à celle du n° 9 (XXII) et du n° 1 (I), mais les tenseurs, qui y figurent sont du troisième ordre (voir n° 8 β) et l'indice c a la signification expliquée dans le même numéro 8 (XIX).

Si l'on pose:

$$\begin{aligned} T_1 &= \vec{A}_1\vec{L}_1 + \vec{B}_1\vec{M}_1 + \vec{C}_1\vec{N}_1\,, \\ T_2 &= \vec{A}_2\vec{L}_2 + \vec{B}_2\vec{M}_2 + \vec{C}_2\vec{N}_2\,, \end{aligned} \qquad (69)$$

il vient pour les dérivées (n° 5, ζ))

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial \overrightarrow{OM_1}} &= \vec{\nabla}_1\vec{A}_1\vec{L}_1 + \vec{A}_1\vec{\nabla}_1\vec{L}_1 + \ldots \\ \frac{\partial T_2}{\partial \overrightarrow{OM_2}} &= \vec{\nabla}_2\vec{A}_2\vec{L}_2 + \vec{A}_2\vec{\nabla}_2\vec{L}_2 + \ldots \end{aligned} \qquad (70)$$

Si l'on écrit les deux tenseurs du troisième ordre (70) en des formes :

$$\frac{\partial T_1}{\partial \overrightarrow{OM_1}} = {}^2T_1 \vec{i}_1 + {}^2T_2 \vec{i}_2 + {}^2T_3 \vec{i}_3 ,$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \overrightarrow{OM_2}} = {}^2T_1' \vec{i}_1 + {}^2T_2' \vec{i}_2 + {}^2T_3' \vec{i}_3 , \qquad \text{(XXXV}$$

où ${}^1T_1$, ${}^2T_2$, ${}^3T_3$ et c signifient des « composantes » c'est-à-dire des tenseurs du second ordre on a:

$$\left(\frac{\partial T_1}{\partial \overrightarrow{OM_2}}\right)_c = ({}^2T_1')_c \vec{i}_1 + ({}^2T_2')_c \vec{i}_2 + ({}^2T_3')_c \vec{i}_3 . \qquad \text{(XXXVI)}$$

L'indice c dans le second membre de (XXXVI) indique des tenseurs (du second ordre) conjugués (voir n° 1, (9)). En même temps dans le premier membre, il signifie un tenseur du troisième ordre « conjugué » d'après le sens du n° 8 (XIX).

En rapprochant la première équation (XXXV) et (XXXVI) en vertu de (XXXIV) on obtient des systèmes d'équations en coordonnées rectangulaires analogues à ceux du numéro précédent.

β) Beaucoup plus simple est la condition désirée pour une expression différentielle de la forme (voir n° 9, δ))

$$(d_1 \overrightarrow{OM} + i\, d_2 \overrightarrow{OM}) \times (T_1 + i T_2) .$$

Les conditions (68) sont dans ce cas:

$$T_1 = \vec{\nabla} \vec{U}_1 , \qquad T_2 = \vec{\nabla} \vec{U}_2 .$$

Les tenseurs du second ordre T_1 et T_2 doivent représenter deux tenseurs-gradients distincts par rapport au vecteur variable $\overrightarrow{OM}$. Ce qui est en accord avec le n° 9, δ.

Prague, novembre 1927.