

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 28 (1929)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES SURFACES DE NIVEAU DU POTENTIEL
Autor: Brunner, William
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-22593>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

$U(x)$ étant croissante. On en déduit sans peine que, à partir d'une valeur r , on a aussi

$$U(x) < x^{\rho+\varepsilon}$$

et

$$\log M(R) < \log M(r) + R^{\rho+\varepsilon} \log \frac{R}{r},$$

donc

$$\log M^1(r) < \log M(r) + R^{\rho+\varepsilon} \log \frac{R}{r} + \log \frac{1}{R-r}.$$

En prenant

$$R = r + r^{1-\rho-\varepsilon},$$

on obtient

$$\log M^1(r) < \log M(r) + \log r^{\rho-1+\varepsilon} + K,$$

K étant fini. Par suite, si petit que soit ε , on a, à partir d'une valeur de r

$$M^1(r) < r^{\rho-1+\varepsilon} M(r).$$

C'est l'inégalité que je voulais établir.

SUR LES SURFACES DE NIVEAU DU POTENTIEL

PAR

William BRUNNER (Zurich).

Soit S_1 une surface fermée entourant le point O et S_2 une autre surface fermée entourant S_1 . Supposons que S_1 et S_2 soient des surfaces de niveau de la fonction harmonique $U(x, y, z)$, régulière dans la partie de l'espace comprise entre S_1 et S_2 . Si S_1 et S_2 jouissent de la propriété qu'une demi-droite quelconque issue du point O ne les coupe qu'une fois, toutes les surfaces de niveau de U comprises entre S_1 et S_2 jouissent de la même propriété¹.

¹ Les surfaces jouissant de ladite propriété s'appellent « sternförmig » en allemand. Le théorème analogue pour le cas du plan (potentiel logarithmique) est bien connu, voir par ex. G. PÓLYA et G. SZEGÖ, *Aufgaben und Lehrsätze I* (1925), p. 145. Le théorème énoncé m'a été indiqué sans démonstration par M. G. Pólya, à l'occasion de mon travail de diplôme, ensemble avec un autre analogue, relatif aux surfaces de niveau convexes.

Les surfaces S_1 , S_2 étant des surfaces de niveau de U , leurs équations sont de la forme

$$U(x, y, z) = c_1, \quad U(x, y, z) = c_2,$$

où c_1, c_2 sont des constantes; nous supposons $c_1 < c_2$. La normale extérieure à ces surfaces de niveau est un vecteur dont les composantes sont proportionnelles à

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Supposons que le point O est situé à l'origine. Alors le cosinus de l'angle formé par la normale extérieure au point x, y, z et par une demi-droite issue de O et passant par ce point, est du même signe que l'expression

$$x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} + z \frac{\partial U}{\partial z} = V.$$

Par hypothèse, l'angle en question est *aigu* en chaque point de S_1 et de S_2 , donc la fonction V est *positive* sur ces surfaces. Mais la fonction V est harmonique, puisque

$$\Delta V = 2\Delta U + x \frac{\partial \Delta U}{\partial x} + y \frac{\partial \Delta U}{\partial y} + z \frac{\partial \Delta U}{\partial z} = 0.$$

La fonction harmonique V étant positive sur S_1 et S_2 , reste positive dans la partie de l'espace comprise entre ces deux surfaces. C.q.f.d.
