

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 28 (1929)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE  
  
**Rubrik:** BIBLIOGRAPHIE

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 20.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## BIBLIOGRAPHIE

---

Hermann WEYL. — **Gruppentheorie und Quantenmechanik.** — Un vol. grand in-8° de VIII-288 pages. Prix: Broché, Rm. 20; relié toile, Rm. 22. S. Hirzel, Leipzig, 1928.

Nous avons à signaler ce magistral ouvrage et d'autres qui suivent immédiatement, bref une foule d'exposés qui mettent la Physique théorique au premier rang des préoccupations scientifiques. Et c'est Einstein, toujours le prodigieux Einstein qui a mis tout cela en branle non pas tant en faisant des créations mathématiques qu'en montrant l'utilisation physique possible d'instruments créés par Riemann, Pfaff, Grassmann, Lie, ..., instruments qui, auparavant, n'étaient guère maniés que dans le domaine mathématique pur. Ne nous lassons pas de revenir sur ces prémisses.

Ici encore un pont de lumière s'établit entre deux théories. Malgré ses  $ds^2$ , dont les coefficients peuvent contenir des discontinuités, la Gravifique est encore presque partout une science du continu; peut-elle s'allier, dès lors, avec les discontinuités des quanta? Des travaux directs, dus surtout à M. Th. De Donder, ont déjà répondu affirmativement mais M. H. Weyl prouve la chose d'une autre manière. La Mécanique des quanta s'allie avec la Théorie des groupes et la Gravifique peut être presque entièrement calquée sur cette dernière théorie. Toutefois, ici, il ne s'agit pas seulement de groupes au sens de Lie, mais aussi de ceux qui les ont précédés dans le domaine algébrique. Manier des billes c'est faire, à l'échelle vulgaire, une expérience d'où l'on peut tirer les premières connaissances arithmétiques, puis d'autres plus complexes, puis l'Algèbre et l'Analyse couramment employées. Considérer des atomes ou, mieux encore, les corpuscules qu'on peut leur arracher et les manifestations énergétiques qui se produisent alors, c'est tout différent. Cela crée notamment une sorte d'Algèbre non commutative dont l'esprit se poursuit avec les symboles de non commutativité de la Théorie des groupes. L'expérience, on le voit, est encore à la base des constructions algorithmiques, mais il ne faut pas que ce soit l'expérience des billes dans un domaine où il s'agit de tout autre chose.

C'est avec tristesse que l'on constate qu'un tel raisonnement, cependant, à notre avis, si évident, est encore loin de s'imposer à nombre d'hommes de science, lesquels paraissent croire que toute connaissance peut être atteinte par le jeu d'un petit nombre de postulats acceptés jadis une fois pour toutes. Mais M. H. Weyl est plein d'espoir; il veut être le messager d'entente, le constructeur d'une arche d'alliance entre mathématiciens et physiciens et, comme il est encore fort jeune, nous ne doutons point qu'il n'assiste au triomphe complet de sa magnifique thèse.

Le volume présent est, en tout cas, d'un aspect bien séduisant. Le

Chapitre premier est consacré à une géométrie unitaire dans laquelle, conformément à ce que nous disions plus haut, on ne postule point l'existence d'une multiplication à loi commutative; les considérations métriques, plus générales que les transformations réelles du théorème de Pythagore, sont conditionnées par les formes quadratiques de Ch. Hermite à éléments complexes conjugués; l'influence de la transformation infinitésimale sur le fini se manifeste par la loi exponentielle, pour laquelle le savant auteur n'a pas hésité à donner d'abord l'exemple ultra-élémentaire des intérêts composés.

Le Chapitre II expose sommairement l'idée de quantum, accompagnant l'émission lumineuse, telle qu'elle fut d'abord présentée par Einstein en 1905; elle peut conduire rapidement — beaucoup plus rapidement même que cela n'a eu lieu au point de vue historique — à concevoir la nature corpusculaire de la lumière compatible cependant avec une image de propagation ondulatoire; d'où l'onde de Louis de Broglie accompagnant tout corpuscule. Ceci mène aussi à l'équation de Schrödinger plus générale que celle de la théorie ondulatoire classique. L'étude des solutions de cette équation entraîne celle des polynomes d'Hermite et des fonctions sphériques. Puis des équations fondamentales apparaissent sous la forme canonique d'Hamilton, notamment dans le problème des perturbations où l'énergie se scinde en deux parties dont la seconde entre de ligne de compte comme la fonction perturbatrice en Mécanique céleste. Des équations canoniques aux groupes il n'y a pas loin; les équations de Maxwell permettent d'analyser le champ électromagnétique.

Le Chapitre III est consacré aux groupes proprement dits. Il situe les géométries avec Klein et son fameux Programme d'Erlangen mais n'hésite pas à remonter jusqu'aux plus anciennes conceptions ornementales des Egyptiens en certaines desquelles on retrouve un usage plus ou moins conscient de la notion de groupe. Léonard de Vinci montra des connaissances analogues. L'examen moderne des cristaux impose des conceptions de même nature; l'atome et ses composants corpusculaires devaient faire mieux encore. C'est ici que M. Weyl expose sa notion des groupes *clos* et l'analyse, qui caractérise ses travaux sur le sujet, d'après laquelle la théorie est plutôt rattachée à des équations intégrales qu'à des équations différentielles.

Le Chapitre IV est une application de la Théorie des groupes à la Mécanique quantique. L'électron a ses groupes de rotation. Ses mouvements de translation sont assujettis au groupe de Lorentz né de la théorie ondulatoire. Tout ceci est compatible avec des équations, plus générales que l'équation ondulatoire classique, équations données par Dirac.

Le Chapitre V traite des représentations du groupe de permutations symétrique et de celles du groupe unitaire. Les considérations d'algèbre et de géométrie algébrique dominent. Ce sont sans doute celles qui sembleraient particulièrement naturelles au démon de Maxwell jugeant des choses à l'échelle atomique ou corpusculaire et il est clair qu'elles peuvent exister à l'état abstrait, de même que l'Arithmétique apprise avec des billes peut se constituer ensuite en théorie abstraite.

Le génie entrevoit des mondes dont la structure est fort différente de celle des modèles que le bon sens vulgaire a bien le droit de créer dans les régions où il joue d'ordinaire mais qu'il a le grand tort de vouloir ensuite transporter partout.

J. FRENKEL. — **Einführung in die Wellenmechanik.** — Un vol. grand in-8° de VIII-318 pages. Prix: Broché, Rm. 26; relié, Rm. 27,60. J. Springer, Berlin, 1929.

Ce livre, non moins beau que celui de M. H. Weyl est rédigé, au moins quant à ses débuts, dans un esprit différent. Il veut s'adresser aux physiciens et même aux chimistes. Le premier Chapitre, intitulé « Lumière et Matière », forme, à lui seul, un exposé complet assez comparable à celui par lequel M. Louis de Broglie a inauguré le « Mémorial des Sciences physiques ». Trois autres Chapitres suivent et approfondissent la théorie. L'exposition, d'une grande limpidité, se développe non à partir de définitions mathématiques mais à partir de constatations physiques, ce qui n'empêche pas que la fin du chapitre initial révèle déjà le symbolisme non commutatif qui paraît présider aux ultimes désagrégations de la matière quand elle se résoud en corpuscules et en ondes faisant très bon ménage, bien que la science du siècle précédent ait crû mettre en évidence une antinomie irréductible entre l'émission de Newton et les conceptions ondulatoires d'Huyghens et de Fresnel.

Le Chapitre I du remarquable ouvrage de M. Frenkel part donc des considérations géométriques très élémentaires qui semblent opposer théorie émissive et théorie ondulatoire. Puis vient un rappel bref de l'électromagnétisme de Maxwell et de la relativité d'Einstein qui d'abord « restreint » semblait cependant déjà promettre un accord, jusqu'au moment où Einstein « eût le courage » (je traduis mot à mot l'expression employée par M. Frenkel, p. 9) de lancer la Théorie corpusculaire et les quanta de lumière. C'est alors qu'arrive, au point de vue logique, la conception de M. Louis de Broglie, qu'il fallut attendre jusqu'en 1924 au point de vue historique: la matière accompagnant l'onde impliquait l'onde accompagnant la matière. Aucune mécanique n'était complète sans considérations ondulatoires. Il y avait des « ondes de matière » avec une « vitesse de groupe » égale à celle de corpuscules. Toute radiation était de nature dualistique. Des expériences sur les rayons cathodiques confirmaient cette manière de voir. Les nœuds, les « paquets d'ondes » de Schrödinger et les singularités de M. L. de Broglie devenaient des images sensiblement équivalentes. Quant aux quanta proprement dits, ce furent des éléments discontinus sans lesquels les accords précédents ne pouvaient exister. Au point de vue mathématique, ceci permet d'arriver très naturellement à l'équation de Schrödinger et aux nombreux résultats qui en dépendent.

Le Chapitre II reprend, en général, les équations fondamentales de la Mécanique ondulatoire. Il s'agit de reconstituer celle-ci dans un ordre d'idées analogue à celui qui élabore l'optique ondulatoire à la suite de l'optique géométrique. C'est ici qu'apparaissent les équations de Dirac, après une étude préliminaire des équations de Maxwell, et les équations canoniques de Jacobi-Hamilton qui jettent alors un véritable pont entre la mécanique corpusculaire et la mécanique ondulatoire; l'équation aux dérivées partielles de Jacobi, qui est du premier ordre, s'allie de façon intime à l'équation ondulatoire qui est du second.

Le Chapitre III développe les rapports de la mécanique ondulatoire et de la théorie des quanta. Voici la fameuse théorie des matrices indéfinies, physiquement utilisées par Heisenberg, mais dont l'idée mathématique essentielle remonte à Hermite. Parmi les opérations employées, les multiplications non commutatives sont la règle générale et c'est ce qui pourrait

permettre de retomber sur les opérateurs de la Théorie des groupes ou sur ceux de la dérivation covariante. Et c'est vraiment une grande et admirable chose que de voir l'analyse hermitienne, jugée généralement si abstraite et pour laquelle l'illustre auteur n'a jamais recherché d'applications physiques qui ne pouvaient d'ailleurs exister il y a quarante ou cinquante ans, s'adapter maintenant et même dominer les conceptions d'aujourd'hui sur la constitution de la lumière et de la matière.

Le Chapitre IV est consacré à des problèmes spéciaux de mécanique ondulatoire, tentant notamment de rechercher ce que l'on peut transporter de celle-ci du domaine de l'atome dans le domaine de la molécule. Relevons un long et intéressant paragraphe sur la théorie relativistique de l'atome dont le type est l'atome d'hydrogène. Sommerfeld, Bohr, Dirac, Pauli, ... sont plus que jamais mis à contribution. Je ne sais si les chimistes de valeur moyenne suivront jusque là mais n'oubliions pas qu'ils auront toujours le premier chapitre du livre comme résumé des plus accessibles et des plus adroits. Il faut croire aussi qu'un tel ouvrage sera grandement apprécié des mathématiciens; il pourrait préparer à celui de Weyl, précédemment analysé, et probablement aussi à celui de Wintner que nous allons examiner maintenant. Enfin ne terminons pas sans signaler que M. J. Frenkel est professeur à l'Institut polytechnique de Leningrad. Si son œuvre, imprimée en Allemagne, a pu cependant être conçue dans la capitale soviétique, ceci prouve que la Russie tend à reprendre son rang parmi les grandes nations honorant la Science.

A. BUHL (Toulouse).

**Aurel WINTNER.** — **Spektraltheorie der unendlichen Matrizen.** Einführung in den analytischen Apparat der Quantenmechanik. Mit einer Einleitung von Leon Lichtenstein. — Un volume in-8° de XII-280 pages. Prix : Broché, Rm. 21 ; relié, Rm. 22,50. S. Hirzel, Leipzig, 1929.

Cette œuvre, enfantée par un excellent esprit mathématique, paraît surtout s'adresser aux mathématiciens. Ce n'est point l'arche d'alliance de Weyl ni la perche adroïtement tendue, aux confrères du camp expérimental, par Frenkel; c'est la théorie logique, le squelette symbolique qui ne risque pas de s'endommager ni de connaître les vicissitudes qu'un revêtement physique n'évitera certainement pas. La première ligne de la première page contient déjà une inégalité et une parenthèse à deux indices; toutes les lignes, toutes les pages suivantes sont à l'avenant. Et cependant c'est clair, très clair et, c'est le cas de le dire, d'un style hermitien. On comprend tout de suite que la matrice ici définie est une sorte de nombre complexe à  $n^2$  éléments, s'écrivant en tableau carré; la définition de l'égalité de deux matrices fait immédiatement accepter cette idée, car cette égalité n'a lieu que lorsque les éléments, de même situation dans les deux matrices, sont individuellement égaux. Puis arrive le fait fondamental: les matrices sont susceptibles d'addition ordinaire mais leur multiplication, en général, n'est pas commutative. Dès lors elles sont fatalement des instruments constructifs ordonnant, de haut, toutes les non commutativités, celles du Calcul tensoriel, celles de la Théorie des groupes et tant d'autres. Il me semble qu'il n'y a pas besoin d'en dire plus pour exciter, au plus haut point, un intérêt qu'une étude attentive ne laissera jamais faiblir. Et combien l'on

devrait être attentif, en France surtout, à de telles publications. Certes M. Wintner s'est naturellement documenté chez ses compatriotes. Il cite et utilise Frobenius, Hurwitz, Minkowski, Hilbert, Schmidt, Hellinger, ...; mais, presque partout, dans ce livre, nous trouvons Hermite. Qui connaît bien, chez nous, l'analyse des matrices hermitiennes ? Qui sait quelles jolies choses elles donnèrent à Stieltjes, Français d'adoption et précurseur de Lebesgue. C'est grâce à M. Aurel Wintner que nous allons mieux connaître nos richesses ignorées et enfouies jusque dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, car je ne veux pas perdre cette nouvelle occasion de rappeler que Stieltjes, le grand Stieltjes fut un de mes prédécesseurs dans la chaire d'Analyse mathématique de l'Université toulousaine.

Revenons au volume. Il me semble impossible d'analyser, rien qu'avec des mots, les six grands chapitres qu'il contient. Mais on peut faire une sorte de catalogue des nombreux et vastes sujets qu'il englobe. D'abord observons que le titre seul indique qu'il s'agit surtout du cas de  $n$  infini; entre la matrice finie et la matrice infinie, il y a une différence plus grande encore que celle qui existe entre le polynôme et la fonction analytique quelconque.

Aux matrices, on attache aisément des déterminants et, à ceux-ci, des équations *séculaires* (terme emprunté à la Mécanique céleste); c'est l'ensemble des racines d'une équation séculaire qui forme un *spectre* (terme emprunté à la Physique). Ceci rappelle, reprise sur des bases beaucoup plus larges, la Théorie des Groupes fondée sur l'équation caractéristique. Les matrices sont d'ailleurs susceptibles de transformations qui se notent comme celles obtenues à l'aide de groupes; elles ont des formes canoniques en relation avec des équations intégrales dont les plus simples ont le type de Fourier. Elles peuvent aussi conduire aux développements en fraction continue. Les formules intégrales d'inversion données par Stieltjes permettent d'atteindre des résultats plus généraux dus à Hilbert. Ceci ne va pas sans de profonds aperçus relevant de la Théorie des fonctions et des séries asymptotiques de Poincaré. Toutes les formules intégrales, tous les critères intégraux peuvent être conçus au sens général de Stieltjes et de Lebesgue.

L'ensemble de la trame précédente est généralisable dans le cas où  $n$  devient infini, sous réserve qu'il reste à discuter de nombreuses questions de convergence. Hilbert, Hilb, Tœplitz, ..., ont prolongé des méthodes déjà étudiées par Poincaré à propos de la Théorie de la Lune de Hill. Après les généralités, il faut étudier les matrices particulières, à éléments liés par quelque loi fonctionnelle, encore, le plus souvent, de nature intégrale. Le Calcul fonctionnel fait vraiment merveille dans la structure et les arrangements matriciels. Quant au point de vue physique, aisément à retrouver dans ce livre où l'auteur le passe souvent sous silence, il me semble qu'on peut le caractériser en remarquant que la Gravifique d'Einstein, ayant pour instrument analytique le Calcul différentiel absolu, ne fait appel, de ce fait, qu'à un calcul qui tient de très près à la Théorie des déterminants. Mais, si l'on veut aller plus avant, traiter notamment des ondes et des quanta, les déterminants ne suffisent plus et il faut les matrices. Que M. Wintner soit un bon mathématicien, voilà, à coup sûr, une affirmation bien superflue, mais, étant donnée la manière dont il traite des matrices, je ne suis pas éloigné de le ranger parmi les savants auxquels la Physique devra beaucoup.

A. BÜHL (Toulouse).

George BIRTWISTLE. — **La nouvelle Mécanique des Quanta.** Traduction augmentée de quatre Appendices par les traducteurs: M. Ponte et Y. Rocard. Préface de M. Jacques Hadamard (Collection de Monographies scientifiques étrangères publiées sous la direction de M. G. Juvet. N° XIII). — Un volume gr. in-8° de XII-336 pages. Prix: 75 francs. A. Blanchard, Paris, 1929.

Il m'est bien difficile d'écrire, en langage ordinaire, une analyse intéressante de cette belle traduction. M. Jacques Hadamard m'a devancé dans une étincelante préface; que dire après lui? Si je commençais par le remercier du plaisir qu'il m'a fait. Ce n'est pas superflu.

On sait que, surtout en France, les universitaires enthousiasmés par les théories physiques nouvelles ont rencontré, dans leurs Universités mêmes, les incompréhensions les plus inattendues et les oppositions les plus bizarres. Aussi, est-ce une grande joie de voir un maître incontesté se placer à l'avant-garde des idées de l'heure présente tout en se rendant compte, mieux que personne, du caractère aussi fragile que formidable de certaines d'entre elles. Et puis, si nous ne pouvons évidemment pas nous croire absolument à l'abri de quelque retour offensif de l'esprit réactionnaire, il semble bien cependant que celui-ci ait battu en retraite. L'audace de la Gravifique apparaît comme presque insignifiante à côté de celle des Théories ondulatoires et quantiques; on accusait Einstein de modifier les mètres pour obtenir, contre la vérité, des coïncidences de longueurs mais on n'est tout de même pas allé jusqu'à l'accuser de truquer les formules algébriques ou les règles arithmétiques. On aurait beau jeu maintenant puisque, comme justement l'ouvrage de Birtwistle le montre dès la première page, nous avons des grandeurs quantiques qui n'obéissent plus à la multiplication commutative,  $xy$  étant différent de  $yx$ . Cependant les clameurs des Béotiens ne se font point entendre. Enregistrons le progrès.

M. J. Hadamard nous rappelle d'ailleurs des opinions que de grands philosophes seuls peuvent se permettre d'exprimer, celle d'Emile Boutroux, envisageant la possibilité d'un libre arbitre existant dans les profondeurs intimes de l'atome, et la sienne, d'après laquelle la lumière, la matière, le monde physique, en général, sont sans rapport avec tout ce que nous pouvions en imaginer.

Quant à la description du texte de Birtwistle je crains d'être amené à répéter bien des choses écrites à propos des ouvrages de Weyl, de Frenkel ou de Wintner. Toutefois l'arrangement des matières est différent et semble d'abord fait pour intéresser plus particulièrement les physiciens. Des trente-deux chapitres du livre, les sept premiers ne décrivent guère que les effets spectraux car ce n'est guère que par les spectres que nous connaissons l'intimité de l'atome. Quand nous abordons, vraiment et pour la première fois, une grande théorie mathématique c'est celle de la cinématique quantique et matricielle d'Heisenberg dans ses rapports avec la théorie, plus maniable, de Dirac, fondée sur les équations canoniques et les crochets de Poisson. Au fond c'est l'identité de Poisson qui supporte cette Mécanique, de même que l'identité de Bianchi supporte la Gravifique et les deux théories ont leurs opérateurs non permutable d'ailleurs bien faciles à unir. Mais il convient d'obtenir plus de précision en une algèbre et en une analyse quantiques dont les fondements sont très simples; il y a là notamment (p. 130) une curieuse règle de différentiation pour  $1: x$ . Naturellement il ne faut point parler de multiplication sans préciser, sans cesse, si celle-ci est

faite à gauche ou à droite et ceci donne aux calculs exponentiels un aspect déjà obtenu par Henri Poincaré dans ses célèbres Mémoires sur la Théorie des groupes. Les « nombres quantiques », dans l'équation de Schrödinger, apparaissent aussi aisément que les entiers dans l'équation des cordes vibrantes ; en coordonnées polaires, on peut aborder l'étude du spectre de l'hydrogène par l'intermédiaire d'une équation de Laplace.

Mais où le présent et magnifique ouvrage atteint véritablement à la clarté transcendante dont parle M. Hadamard c'est, semble-t-il, quand, avec le Chapitre XVIII, il aborde la Mécanique ondulatoire proprement dite. Ceci est tout naturel. Ce qui précède le point de vue de Schrödinger ne semble pas d'une cohésion absolument suffisante tant que les ondes ne sont pas à la base de tout. Un système mécanique ordinaire s'étudie avec des variables  $p$  et  $q$ , en nombre  $2n$ . Il correspond à une trajectoire ponctuelle ou « rayon » dans l'espace à  $2n$  dimensions. A ces rayons correspondent des ondes, de même qu'au simple rayon lumineux correspond la simple onde lumineuse. Voilà bien l'idée transcendante, le prodigieux trait de génie pris sur le vif. Les phénomènes mécaniques de l'échelle vulgaire nous frappent grossièrement ; nous n'en percevons que des « signaux » ou « paquets d'ondes ». L'onde pure, essentielle et primitive est attachée au microcosme. L'idée donne ensuite de nombreux développements analytiques nouveaux. Les matrices de Heisenberg sont à calculer avec les conceptions fonctionnelles de Schrödinger non sans l'appui de la théorie de Dirac qui englobe la Mécanique relativiste. Signalons que M. Th. De Donder, de Bruxelles, a fait quelque chose d'analogique. Viennent les perturbations, les quanta de lumière, les ondes de Louis de Broglie équivalentes à celles de Schrödinger, la résonance dans les spectres de l'hélium (Heisenberg) avec l'effet de la rotation électronique. Puis c'est le tour de la Mécanique statistique avec les quanta de lumière de Bose et la théorie des gaz parfaits d'Einstein dont la théorie quantique classique est un cas limite. Ceci est l'occasion d'une nouvelle théorie de Dirac avec transformations de matrices.

Répétons que les conclusions philosophiques sont formidables. En cherchant à observer l'électron nous agissons fatalement sur lui ; quand on illumine une pièce obscure pour savoir ce qui s'y passe, on est renseigné sur l'état de la pièce *après et avec* l'éclairage. En microphysique, les choses semblent dépendre grandement des procédés d'observation qui tendent d'autant plus à se confondre avec ce que l'on veut observer qu'ils sont plus délicats. Cette plasticité, cette indétermination du microcosme ressemblent étrangement au libre arbitre dont nous parlait Emile Boutroux.

A. Buhl (Toulouse).

E. DE CAMAS. — **Réflexions sur la Mécanique ondulatoire.** Une ancienne Théorie dynamique ondulatoire. — Un volume in-8° de 98 pages. Prix ; 14 francs. A. Blanchard, Paris, 1929.

M. de Camas semble avoir ici pour objet principal de réattirer l'attention sur des développements qu'il publia, en 1902, et qui auraient déjà constitué, à cette époque, une Théorie ondulatoire générale. Voilà qui ne saurait paraître invraisemblable. On peut retrouver des notions quantiques et ondulatoires qui se perdent dans la nuit des temps. Anaxagore considérait déjà la compénétration mutuelle de tous les corps. Fermat paraissait croire à l'extension indéfinie des théories optiques et Laplace (*Œuvres*, 1846,

t. VI, p. 164) envisage la discontinuité possible de la pesanteur. L'auteur voudrait également ne point rompre le contact avec la Théorie de Fresnel ce qui doit être possible au moins partiellement. Personnellement j'ai toujours eu beaucoup plus de sympathie pour le respect des travaux passés que pour l'annonce de bouleversements en faisant par trop bon marché. Seulement — et M. de Camas lui-même semble en convenir — sa théorie de 1902, avec son analyse mathématique élémentaire, ne peut avoir la portée profonde des prodigieuses créations de ces dernières années.

De plus, les considérations de M. de Camas ne vont qu'avec quelques hypothèses qui ne sont pas plus étranges que beaucoup envisagées aujourd'hui mais qui ne semblent pas avoir dirigé la Science vers son état présent. Telle est, par exemple, son hypothèse des fractures de l'éther qui, par ailleurs, ne manque pas d'ingéniosité. L'éther s'emplirait facilement de failles et de fractures d'où le peu de chose qu'il nous transmettrait de certains phénomènes en créant, pour ainsi dire, d'autres phénomènes écrans qui, engendrés par le discontinu, seraient bien de la nature des ondes ou des quanta. En soi, ceci est même joli. Le philosophe n'est pas inférieur à l'homme de science. Il voit, lui aussi, que nous mettons de plus en plus, dans des observations qui modifient les objets observés, des qualités de notre entendement, de notre cerveau. L'Univers ressemblerait alors plus à un cerveau qu'à toute autre chose (p. 85).

Les rapports de la théorie de 1902 avec celle de la Relativité constituent également quelques pages intéressantes d'une œuvre qui, maintenant, présente encore, avec intérêt, des idées du début du siècle alors que tant d'autres, émises depuis, ont été mortes aussitôt que nées.

A. BUHL (Toulouse).

**Tullio Levi-Civita. — A simplified presentation of Einstein's unified field equations.** — Une brochure in-8° de 24 pages. Prix: Sh. 2. Blackie and Son Limited, Londres, 1929.

Ceci est une traduction anglaise, due à M. John Dougall, d'une Note de M. Levi-Civita insérée dans les *Sitzungsberichte* de l'Académie de Berlin (14 mars 1929) sous le titre de *Vereinfachte Herstellung der Einsteinschen Einheitlichen Feldgleichungen*, Note dont il a précisément été question, ici-même (ce volume, p. 131), à propos du VII<sup>e</sup> Centenaire de l'Université de Toulouse et du Doctorat *honoris causa* que cette Université conféra alors à M. Levi-Civita. J'avais sans doute raison d'attirer particulièrement l'attention sur ce Mémoire; la traduction qui vient d'en être faite prouve, une fois de plus, son importance.

Il s'agit de la nouvelle Théorie d'Einstein, publiée par l'illustre savant lui-même, également dans les *Sitzungsberichte*, tout au début de 1929. Cette nouvelle Théorie ne s'appuie plus sur l'identité de Bianchi mais sur une identité fort voisine ou intervient la torsion de l'espace selon M. Elie Cartan. Le premier déterminant qui se présente alors n'est plus le  $g$  des potentiels gravifiques  $g_{ik}$  mais un tétrapode  $h$  (*Vierbein. Orthogonal quadruplet*) formé de termes  $ih_{ik}$  et possédant des mineurs normés  $ih^k$ . Avec ces éléments de  $h$  on construit aisément ceux de  $g$  d'où la métrique de l'espace. Or, il existe une théorie des coefficients de Ricci, immédiatement associable au Calcul différentiel absolu de M. Levi-Civita qui donne quelque chose de tout à fait analogue, aux notations près. Aux  $n$ -podes d'Einstein on peut faire corres-

pondre un  $n$ -uple de congruences orthogonales d'où un tableau de coefficients directeurs  $\lambda_k^i$  et de moments  $\lambda_{i|k}$ . Ces moments sont des mineurs normés pour le tableau de coefficients directeurs et on aboutit à une métrique comme dans le cas précédent. Les dérivations covariantes des moments conduisent facilement aux coefficients de Ricci; il y a encore ici des questions de non-permutabilité qui, remarquons-le en passant, ont, avec celles de la Théorie des groupes, précédé celles de la Mécanique quantique mais qui n'étaient pas moins importantes et ouvraient la voie à ces dernières. Des non permutabilités de la théorie de Ricci naissent aisément les symboles de Riemann à quatre indices et, dès lors, la Gravifisque qui, ainsi, n'a pas eu besoin d'un recours à l'espace tordu. Faut-il conclure de là que les espaces incurvés non tordus sont plus physiques que les espaces incurvés et tordus? Une telle conclusion serait absurde. Ce qu'il faut montrer c'est précisément qu'il peut y avoir un certain mode de correspondance entre un espace général de Cartan et un espace simplement incurvé tel un espace de Riemann. C'est justement cela qui fait que la nouvelle Théorie d'Einstein est doublement intéressante.

A. BUHL (Toulouse).

Friedrich LEVI. — **Geometrische Konfigurationen**, mit einer Einführung in die kombinatorische Flächentopologie. — Un volume gr. in-8° de VIII-310 pages et 58 figures. Prix; Broché, Rm. 24; Relié, Rm. 26. S. Hirzel, Leipzig, 1929.

Les configurations géométriques avaient, jusqu'ici, une assez abondante littérature éparses, mais leurs propriétés essentielles et surtout leurs modes de représentation n'étaient réunis dans aucun ouvrage didactique, écrit à partir des définitions primordiales. Cette lacune est comblée par l'exposition de M. Friedrich Levi.

Je n'hésite pas à dire que ce livre me paraît avoir encore des liens de parenté avec les précédents, bien que, cette fois, il ne s'agisse pas du tout de Physique.

Les configurations sont des assemblages de points et de droites dont on considère particulièrement les *incidences* (points sur droite et droites passant par point). Et la meilleure manière de cataloguer et d'étudier ces incidences, de pouvoir, par exemple, en déterminer d'inconnues à partir de celles qui sont données, c'est de schématiser la question en des *matrices* à deux dimensions. Certes, ici, le mot matrice n'a pas exactement le même sens que plus haut; ces matrices ne sont pas forcément carrées mais, en général, rectangulaires et ce qu'il y a de vraiment utile, en elles, dans l'ordre d'idées indiqué, peut se mettre en évidence en les garnissant rien qu'avec des points et des petites croix toutes identiques; on obtient ainsi des *tableaux d'incidences* qui, eux-mêmes, tiennent peut-être plutôt de la figure que de la formule mais ces dispositions peuvent être justifiées par des considérations algébriques et, en fin de compte, on est en présence d'une de ces représentations, à deux dimensions, dont les déterminants furent d'abord les seuls types mais qui, maintenant, s'imposent sous des formes variées et nombreuses. Naturellement, les incidences et leurs tableaux deviennent de plus en plus intéressants sous l'influence des symétries, des

rotations, des déplacements et transformations diverses et nous retombons, une fois de plus, sur des groupes qui jouent de façon particulièrement aisée dans les configurations les plus remarquables. C'est ainsi, par exemple, que les groupes polyédraux et les fonctions polyédriques se rattachent élégamment au sujet.

Dans ces conditions, il semble tout naturel qu'un premier chapitre soit consacré aux fondements essentiels et assez abstraits de la Théorie des groupes.

Le Chapitre II est déjà consacré à la topologie combinatoire. C'est l'ancienne Géométrie de position qui élargit les choses avec des points, des segments (non obligatoirement rectilignes) et des cellules. A un certain point même, cette géométrie s'oppose à la géométrie infinitésimale; elle ordonne de région finie à région finie.

Le Chapitre III traite des configurations projectives les plus simples. Des choses essentielles et d'un prodigieux intérêt mais qui peuvent paraître obscures si on ne fait que les associer aux définitions du début, sont maintenant mises en évidence sur des exemples. Avec des configurations à existence tangible, on peut évidemment construire des tableaux d'incidences et reconnaître les propriétés fondamentales de ceux-ci. Mais, cela fait, on constate que ces dernières propriétés jouent encore et tout aussi aisément en des tableaux auxquels ne correspondent plus de configurations tangibles. Cependant ces dernières sont tout aussi nécessaires à une théorie générale des configurations que le sont les racines imaginaires dans une théorie des racines ou les points, branches ou nappes imaginaires dans une théorie des courbes ou des surfaces algébriques.

Comprend-on, par cette seule comparaison, quel extraordinaire moyen d'investigation spatiale est constitué par la théorie des configurations?

Avec le Chapitre IV nous venons aux configurations polyédrales dont la forme élémentaire dépend d'abord du théorème de Desargues. Avec le Chapitre V nous retrouvons l'hexagone de Pascal. Le Chapitre VI et dernier traite des polyèdres réguliers. De tels sujets ont toujours fait l'effet de joyaux géométriques, considérés comme d'autant plus précieux qu'ils étaient, en somme, fort rares et isolés. Nous savons maintenant qu'ils doivent être unis par des chaînes de joyaux analogues mais virtuels, qui ne sont pas faits pour notre champ visuel mais que nous atteignons par le mécanisme des groupes.

Tout ceci est prodigieux et semble de nature à changer jusqu'aux enseignements philosophiques fondamentaux sur lesquels notre jeunesse s'appuyait avec tant de confiance. On nous a inspiré un culte presque exclusif pour l'expérience; la Géométrie même, si elle n'était pas de nature absolument expérimentale, devait être homologuée par cette expérience, et voilà que les progrès de la Science montrent que celle-ci n'est pleinement compréhensible qu'avec l'adjonction de choses fondamentales qu'aucune expérience ne peut atteindre.

Répétons, sans nous lasser, qu'en avançant, la Science redevient hellène car indéniablement les Grecs tenaient incomparablement plus à l'harmonie des théories qu'à un appui expérimental qui, d'ailleurs, leur faisait à peu près défaut.

A. BUHL (Toulouse).

Léon LICHTENSTEIN. — **Grundlagen der Hydromechanik** (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band XXX). — Un volume gr. in-8° de xvi-508 pages. Prix: Broché, Rm. 26; relié, Rm. 39,60. J. Springer, Berlin, 1929.

Ce beau volume, lors d'un premier examen, rappelle le tome III du *Traité de Mécanique* de M. Paul Appell, souvent cité d'ailleurs. Mais M. Lichtenstein est au courant des derniers progrès, ses méthodes sont tensorielles, ses recours à la Théorie des fonctions de variables réelles sont aussi tout ce qu'il y a de plus actuel et l'âme d'un philosophe transparaît sous l'esprit de l'hydromécanicien. Il a même une préférence marquée pour Emile Meyerson et commence sa préface en rappelant que les secrets du mouvement des fluides peuvent intéresser autant le chercheur épris de fantaisie que celui qui poursuit vraiment des buts mécaniques. Et puis M. Lichtenstein, Professeur à l'Université de Leipzig, y a pour assistant M. Aurel Wintner; il a écrit, pour l'ouvrage de ce dernier sur la Théorie des matrices, une sympathique introduction (voir plus haut). Voilà une Université où tout le monde paraît travailler dans un bel accord. Quant aux considérations philosophiques, c'est encore un signe des temps bien digne d'attention. L'époque n'est pas loin de nous où l'homme de science proprement dit, le technicien, considéraient la philosophie comme un inutile verbiage. Maintenant, il faut reconnaître que les prédictions des philosophes se réalisent et que tout le monde devait être considéré comme travaillant à un même et très général problème: celui de la Connaissance.

Dès son premier Chapitre, l'auteur insiste sur le grand avantage qu'il y a à se servir de l'espace-temps à quatre dimensions et, dans le second, il établit les généralités vectorielles comprenant notamment les formules de Stokes et de Green. Au fond, on n'utilise, en tout ceci, que les Principes mêmes du Calcul intégral; espaces-temps, identités intégrales, considérations vectorielles ou tensorielles sortent de là de manière automatique.

Le Chapitre III a trait au potentiel qui, vérifiant les équations de Laplace et de Poisson, conduira plus tard à la construction de solutions plus complexes intéressant des équations également plus complexes. Ici se placent des considérations dues à O. Hölder et à A. Liapounoff sur des surfaces frontières pour lesquelles l'existence de la normale n'entraîne pas forcément celle de courbures principales.

Les Chapitres IV et V (ce dernier, particulièrement cinématique, est de 110 pages) traitent des considérations générales qui permettent d'englober non seulement la Mécanique des fluides mais au moins toutes les formes classiques de la Mécanique. Les idées fondamentales sont celles de Kirchhoff; ce sont elles également qui ont inspiré M. Appell. Mais c'est surtout ici que l'on commence à sentir l'influence des conceptions fonctionnelles modernes; à ce point de vue, l'exposition de M. Lichtenstein est probablement unique aujourd'hui dans la littérature didactique du sujet. Me permettra-t-on de faire remarquer qu'à cette magnifique synthèse on pouvait, moyennant peut être une page de plus, adjoindre les équations électromagnétiques de Maxwell.

Le Chapitre VI traite des discontinuités ondulatoires entrevues par Riemann et Hugoniot mais qui ne furent définitivement codifiées que dans les exposés de M. Jacques Hadamard. Là encore l'espace-temps s'impose et il a fallu un effort spécial pour envisager les choses aussi bien avec les variables d'Euler qu'avec celles de Lagrange.

Le Chapitre VII traite spécialement des équations du mouvement; ce passage à la Dynamique n'est pas difficile, après une préparation telle celle effectuée aux Chapitres IV et V. Il peut être obtenu aussi bien pour les fluides visqueux que pour les fluides parfaits.

L'hydrostatique est l'objet du Chapitre VIII. L'atmosphère terrestre et l'équilibre des sphères gazeuses puis les figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation en sont les premiers objets non élémentaires. L'auteur montre ensuite comment l'hydrostatique peut se fonder sur le Principe des déplacements virtuels.

Le Chapitre IX est encore éminemment synthétique de par l'emploi fondamental du Principe d'Hamilton. Non seulement ce Principe redonne aisément les équations du mouvement mais les transformations d'intégrales qu'il comporte mettent en évidence les discontinuités qui doivent fatalement se produire au sein des fluides pour que ces équations soient vérifiables.

Le Chapitre X est consacré à la transformation des équations de l'hydrodynamique; dans ces transformations ce sont les tourbillons qui se mettent en évidence. Les considérations théoriques sont dues à Helmholtz et à Cauchy mais elles admettent des simplifications préliminaires qui n'ont été aperçues que beaucoup plus tard et appartiennent à Friedmann.

Le Chapitre XI et dernier traite des théorèmes d'existence. Ce qui précède est élégant au possible mais est bien loin de correspondre à une méthode générale d'intégration. Il est naturel de chercher à prouver que les intégrales existent même quand on ne peut les expliciter; c'est un problème général d'Analyse auquel les équations intégrales ont apporté un grand secours. Mais tous les paradoxes ne sont pas éliminés. Le plus célèbre est celui de D'Alembert sur le mouvement sans dépense d'énergie d'un solide immergé. Les ondes et les tourbillons n'arrangent pas tout. Toutefois M. Lichtenstein a certainement mis partout une grande ingéniosité et une esthétique parfaite. Nous savons déjà qu'il n'oublie pas les auteurs français: Appell, Hadamard. M. Henri Villat est également mis à contribution quant à ses belles recherches sur la résistance des fluides. Depuis la publication du tome III de M. P. Appell, déjà cité, nous n'avons peut-être pas eu, sur la Mécanique des fluides, d'ouvrage aussi attachant que celui de M. Lichtenstein.

A. BUHL (Toulouse).

Oliver Dimon KELLOGG. — **Foundations of Potential Theory** (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band XXXI). — Un volume gr. in-8° de x-384 pages. Prix: Broché, Rm. 19,60; relié, Rm. 21,40. J. Springer, Berlin, 1929.

Les progrès de la Gravifique n'ont retiré aucun attrait à la loi de Newton et à ses conséquences. On s'y laisse ramener avec plaisir par des exposés tels que celui de M. Kellogg et l'on se sent même alors toute l'agilité du coureur libéré des semelles de plomb avec lesquelles il avait cru bon de s'entraîner.

L'exposé commence de la manière, à la fois la plus élémentaire et la plus habile, par des attractions concernant des points, des lignes, des surfaces, avant d'arriver au cas général de l'attraction de corps à corps qui conduit à la considération d'intégrales sextuples. De même, avant de passer aux potentiels généraux, nous trouvons, par exemple, celui d'une circonférence

homogène qui nous conduit à l'élégante conception de la moyenne arithmético-géométrique.

Les actions superficielles, celles notamment des doubles couches ou feuillets magnétiques portent incidemment à réfléchir au caractère singulier des surfaces unilatères.

On ne pourrait guère aller plus loin sans les formules de Green et de Stokes lesquelles, quelle que soit la manière de les présenter, doivent obligatoirement jouer un rôle fondamental. Je m'étonne toujours qu'on ne donne pas à ces formules leur véritable physionomie d'identités; ce ne sont que des transformations et des combinaisons linéaires de

$$\int\limits_c X dY = \iint_A dX dY, \quad \iint_S X dY dZ = \iiint_V dX dY dZ, \dots$$

Ces identités donnent d'ailleurs tout aussi bien, dans l'espace temps, des formules stokiennes plus générales, telle celle qui contient les équations de Maxwell. Ainsi la possibilité de construire une Physique théorique, à partir des Principes du Calcul intégral, devient chose évidente.

Le théorème de la moyenne de Gauss donne deux énoncés très élégants sur l'évaluation, à la surface d'une sphère, du potentiel de masses complètement extérieures ou intérieures (p. 83). Toutes ces évaluations d'intégrales multiples, en domaines des plus variés, ne vont point sans théorèmes d'existence ni sans appels à la notion capitale d'uniformité. Le théorème de Heine-Borel semble jouer ici un rôle fondamental quant à l'exposition des propriétés des fonctions uniformément continues.

Nous arrivons à l'équation de Laplace et à une première recherche de solutions en coordonnées polaires qui livre les polynomes de Legendre. Il est aisé de passer de là aux fonctions sphériques.

Un chapitre entier, le sixième, est consacré aux propriétés du potentiel en des points occupés par des masses. C'est d'abord l'équation de Poisson et une suite de discussions serrées sur les discontinuités du potentiel ou de l'attraction quand le point potentiel fait partie du domaine potentiant. Plus loin, avec le secours de l'image électrostatique, et en utilisant la propriété laplacienne du potentiel, nous arrivons aux si élégants problèmes qui concernent l'ellipsoïde; ils exigent l'emploi des coordonnées elliptiques. Ici se placent d'intéressantes remarques sur le prolongement analytique du potentiel, prolongement qui peut être parfaitement possible, par continuité, au delà de surfaces massiques; seulement ce prolongement analytique n'est pas un prolongement physique du potentiel considéré en deçà. Suivent d'autres procédés pour trouver des solutions de l'équation de Laplace à deux variables, notamment celui à la fois élémentaire et gros de conséquences qui leur suppose la forme  $XY$ .

Avec la Théorie des fonctions harmoniques, nous rencontrons le développement de cette intéressante assertion: Une fonction harmonique quelconque est un potentiel. Le théorème de Gauss porte, de même, à rechercher inversement quelles fonctions sont leur moyenne arithmétique sphérique; sous des conditions générales de continuité, ce sont des fonctions harmoniques. Les transformations de l'équation de Laplace et notamment l'inversion de Lord Kelvin permettent d'aborder très naturellement la construction de la fonction de Green, puis les cas singuliers, étudiés notamment par M. Lebesgue, dans lesquels le Problème de Dirichlet est impossible.

Reste à étudier les séries de fonctions harmoniques et à s'assurer des cas où elles convergent bien vers des fonctions harmoniques puis à s'assurer aussi de théorèmes fondamentaux d'existence. Comme nous le disions, en analysant le précédent ouvrage de M. Lichtenstein, les équations intégrales s'imposent. Elles peuvent s'étudier ici de manière particulièrement aisée. Au point de vue historique, c'est même le Problème de Dirichlet qui a fait naître les premières équations intégrales. Mentionnons aussi l'intéressant procédé qui consiste à insérer la fonction harmonique entre une fonction *surharmonique* et une fonction *sousharmonique*. Dans un ordre d'idées voisin, on peut citer aussi le procédé des *barrières* de Poincaré.

Un dernier Chapitre est consacré au potentiel logarithmique et à ses relations immédiates avec les fonctions analytiques et la géométrie conforme.

Les si intéressants travaux de M. Georges Bouligand n'ont pas été oubliés.

Cette œuvre, d'un universitaire américain, publiée en anglais, mais en Allemagne après avoir été rédigée en Suisse française, a un caractère éclectique. Elle est simple et pleine du plus grand charme.

A. BUHL (Toulouse).

Georges BOULIGAND. — **Compléments et Exercices sur la Mécanique des Solides** (Cinématique. Frottement, systèmes non holonomes. Choc et percussions avec frottement, liaisons unilatérales). Publication faite avec la collaboration de M. Jean Dollon. — Un volume gr. in-8° de VIII-132 pages. Prix : 18 francs. Vuibert, Paris, 1929.

Ce volume est une suite toute naturelle du *Précis de Mécanique rationnelle* (tome I) dont nous avons déjà rendu compte ici même (t. XXIV, 1924-25, p. 343) avec tous les éloges qui lui étaient dus et qui sont dus maintenant au volume complémentaire. Dans l'analyse bibliographique de 1925, nous parlions de l'idéalisme mathématique qui semblait se révéler supérieur à l'empirisme. Depuis quatre ans, l'idéalisme semble avoir gagné pas mal de terrain. Même dans les cours de Licence et d'Agrégation, les professeurs tels que M. Bouligand ne cherchent plus à pallier les faiblesses des théories; ils montrent ce que peut l'idéalisme mathématique le plus proche, persuadés que l'étude approfondie des discordances avec l'expérience est la meilleure incitation à la recherche et au progrès. N'est-ce pas, dit le sympathique auteur, une réussite trop marquée de la géométrie euclidienne à nous décrire les propriétés métriques des solides usuels qui l'a fait, pendant longtemps, regarder comme empreinte d'un caractère de vérité absolue, alors qu'elle n'est qu'une théorie physique particulière?

Le volume débute par une brève Première Partie consacrée à la Cinématique. Les problèmes plans sont traités, selon M. G. Koenigs, dans l'esprit du problème de l'équerre formée par la tangente et la normale à une courbe. Cela donne des combinaisons de plans mobiles, glissant tous les uns sur les autres, combinaisons avec lesquelles de simples relations d'alignement résolvent les questions fondamentales. Dans le cas du mouvement d'un solide, le roulement sans glissement est toujours un mouvement avec vitesse nulle pour une molécule de contact; des problèmes à considérations géométriques très esthétiques découlent de ce principe si simple.

La Seconde Partie, de beaucoup la plus importante, traite de la Dynamique. Les épineuses et paradoxales questions de frottement n'entraînent pas de difficultés sérieuses dans les mises en équations, ce qui prouve peut-

être l'insuffisance des idées préliminaires que nous avons sur le phénomène mais, d'autre part, il est intéressant de commencer par croire que nous allons pouvoir analyser l'effet du frottement dès que nous nous serons bien rendu compte de la nature des liaisons. Il y a là et il ne peut y avoir là qu'une dynamique liée, d'un caractère spécial. Si on ne la lie pas comme il faudrait pour être d'accord avec toutes les observations, accord dont la poursuite est probablement celle d'une chimère comme dans tant d'autres régions de la Physique, il faut se dire que notre insuffisante mécanique du frottement a au moins autant de droits à l'existence logique que celle dans laquelle ce frottement n'intervient pas du tout. Ces deux mécaniques sont comparées par M. Bouligand sur des exemples particulièrement suggestifs. Certes, il peut arriver que des systèmes à frottement, traités avec nos hypothèses simplistes, soient plus extraordinaires encore que dans les cas où le frottement est supprimé; c'est là vraiment le domaine du paradoxe, à la manière de M. Painlevé, paradoxe dont M. Bouligand nous a donné un bel exemple. Mais, en mathématiques, c'est le singulier qui ordonne le régulier. Attendons avec patience que la théorie du frottement soit ordonnée.

Le choc avec frottement de glissement donne encore de très curieux schèmes géométriques. Ici l'auteur dissipe élégamment sinon une erreur, du moins une prévention très commune. On croit souvent que le frottement complique les choses d'une manière dissymétrique et rébarbative; il n'en est rien. Nos hypothèses simplistes peuvent au moins avoir des résultats élégants; de plus, la découverte du paradoxe n'est nullement chose déplaisante. Ceci apparaît encore dans une Note sur les liaisons unilatérales, c'est-à-dire sur un sujet qui était cher à Etienne Delassus. Il s'agit de mouvements qui, dès le début ou à un certain instant, peuvent avoir lieu de plusieurs manières, en gardant notamment, avec des obstacles, des contacts en nombre indéterminé. C'est cette indétermination qui n'a pas toujours été reconnue mais qui permet cependant l'existence de « cas providentiels » où les signes des réactions ne sont pas douteux. Tous ces cas, qui vont de l'indétermination à la détermination providentielle, sont traités, dans l'ouvrage de M. Bouligand, en nombre de problèmes faisant tous excellemment image; ce sont souvent des questions d'agrégation fouillées au delà de ce que le meilleur des candidats pouvait faire en quelques heures mais non au delà de l'intérêt toujours très grand qu'elles comportent intrinsèquement.

A. BUHL (Toulouse).

Georges BOULIGAND. — **Cours de Géométrie analytique.** Préface de M. Elie Cartan. Deuxième édition mise au courant des méthodes vectorielles et accrue d'importants compléments. — Un volume in-8° de VIII-498 pages. Prix: 35 francs. Vuibert, Paris, 1928.

Signaler la seconde édition de cet ouvrage nous fait évoquer le souvenir de Charles Ange Laisant, l'un des fondateurs de notre Revue. Ce fut Laisant, en effet, qui signala dans *L'Enseignement mathématique* (t. XX, 1918-19, p. 390) la première édition du *Cours* de M. Bouligand et qui, après avoir reproduit un fragment de la Préface de M. Cartan, conclut au succès. La conclusion se trouve plus que vérifiée aujourd'hui.

Quant à l'analyse bibliographique, l'idée de Laisant était la meilleure; on ne saurait mieux faire que de reproduire la Préface de M. Cartan. J'essaierai

cependant de quelques remarques personnelles. M. Georges Bouligand est un savant qui connaît ou perçoit les conséquences lointaines des choses les plus élémentaires. Les éléments qu'il emploie semblent extrêmement réduits mais susceptibles de tout donner. Ainsi, à peine a-t-il parlé des transformations de coordonnées qu'il nous montre, en toute évidence, que les surfaces

$$yz + zx + xy = \pm a^2, \quad x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = a^3$$

sont de révolution. Il réunit, dès le début, les géométries à deux et trois dimensions et n'épouante personne avec les  $mn$  points communs à deux courbes algébriques d'ordres respectifs  $m$  et  $n$ . Il fait la théorie du lieu d'une ligne à côté de celle du lieu d'un point. Ses notions sur l'homographie, l'inversion, l'involution avec aboutissement au théorème de Desargues, ont un caractère aussi simple que profond. La corrélation conduit aux coordonnées tangentielles sans donner l'impression d'une discipline spéciale. La courbure d'une courbe gauche tient en une page. Ainsi entraîné le lecteur n'a pas non plus l'impression qu'il faut spécialement apprendre les propriétés des courbes et des surfaces du second ordre. Tout coule de source.

Dans les Compléments il faut relever des « Notions générales sur la détermination des figures ». Les applications aux coniques, avec les théorèmes de Desargues et de Pascal, pourraient être une excellente introduction aux « configurations » de M. Fr. Levi signalées plus haut. Les courbes et les surfaces des ordres 3 et 4, les cycliques et les cyclides, la cubique gauche et le complexe linéaire, les quartiques gauches, le conoïde de Plücker, les surfaces cubiques à nombre fini de génératrices rectilignes, l'unicursalité de toute surface du troisième ordre, les surfaces quartiques engendrées par les cordes d'une cubique gauche, les surfaces de Steiner, tout cela est présenté avec autant de talent que de brièveté. La théorie des courbes et des surfaces est récapitulée en notations vectorielles. Enfin des conseils concernant les problèmes sont donnés aux néophytes qui veulent vraiment devenir de bons géomètres. Un livre comme celui de M. Georges Bouligand peut décider de bien des vocations.

A. BUHL (Toulouse).

Georges BOULIGAND. — **Notions sur la Géométrie réglée et sur la Théorie du Complex quadratique** (Appendice au *Cours de Géométrie analytique*). — Un volume in-8° de 148 pages. Prix : 10 francs. Vuibert, Paris, 1929.

Cet Appendice, qui est encore un recueil de formules extrêmement esthétiques, n'est pas sans portée physique. En Mécanique, les complexes quadratiques se rencontrent plus fréquemment que les complexes linéaires. Et l'idée essentielle de cette géométrie réglée est qu'une droite peut être considérée soit comme une trajectoire lumineuse soit comme un axe de rotation. Une dualité des plus curieuses naît immédiatement; elle entraîne par exemple qu'une surface de troisième classe contient 27 droites comme une surface du troisième ordre. Ceci à la page 6 de l'Appendice.

Nous réétudions préliminairement les complexes linéaires, déjà entrevus dans le *Cours*, puis l'espace auxiliaire de Klein en lequel A, B, C, L, M, N sont les coordonnées homogènes d'un point. Cet espace a donc *cinq* dimensions. Le complexe quadratique le plus général dépend de 19 paramètres; une congruence (2,2) dépend de 18. On peut juger par cela de la plasticité

du sujet. Complexes et congruences peuvent provenir de rayons lumineux issus d'un point ou d'une fente d'où, par réflexions et réfractions diverses, de nouveaux assemblages de plus en plus variés. Un complexe quadratique engendre une congruence singulière, une surface singulière à points et plans doubles, une surface méridienne de Plücker lieu de coniques ou enveloppe de cônes.

Parmi les complexes les plus simples, il faut citer le complexe tétraèdral, remarquable à cause de nombreuses définitions purement géométriques, et le complexe de Battaglini, ou complexe harmonique, défini à l'aide de deux quadriques; ce dernier conduit au complexe de Painvin formé des droites d'où l'on peut mener à une quadrique deux plans tangents rectangulaires. Suivent quelques indications sur la surface de Kummer. L'exposé se termine par des exercices, des Problèmes d'Agrégation où sont notamment comparés, par M. Jacques Devisme, ceux de 1927 et de 1928. Ouverte ainsi, la question peut appeler les plus importants et les plus nouveaux développements. M. Bouligand lui-même, dans le présent numéro de *L'Enseignement mathématique* considère un groupe du complexe quadratique général. Les complexes, un peu délaissés malgré de brillants travaux, tels ceux de MM. Paul Mentré et Jules Richard, sont maintenant vraiment remis à l'ordre du jour.

A. BUHL (Toulouse).

**E. LAINÉ.** — **Premières leçons de Géométrie analytique et de Géométrie vectorielle**, à l'usage des Elèves de la Classe de Mathématiques et des Candidats aux Grandes Ecoles. — Un volume in-8° de 14-48 pages. Prix: 4 francs. Vuibert, Paris, 1929.

Ceci est presque encore du Bouligand, dont M. Lainé est un élève et un admirateur. C'est très dans la note actuelle et l'on sent tout de suite l'extrême souci des définitions.

Le Calcul *algébrique* est celui qui s'effectue sur les quantités *scalaires*. Un vecteur suppose une direction, une orientation; il peut entraîner deux notions de multiplication, l'une scalaire, l'autre vectorielle en laquelle on peut impliquer l'identité de Lagrange. Suit la dérivation vectorielle. Après les premiers principes déduits de ce qui précède nous venons aux vecteurs glissants, à leurs moments, à leur réduction, aux couples, au centre de vecteurs parallèles.

Des exercices montrent ensuite tout ce que l'on peut faire avec des points de départ aussi simples. Ces *Premières Leçons* sont bien, en effet, des leçons de début mais il serait certainement difficile de mieux débuter.

A. BUHL (Toulouse).

**G. VALIRON.** — **Familles normales et quasi normales de fonctions méromorphes** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. XXXVIII). — Un fascicule gr. in-8° de 56 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1929.

Savant fascicule très difficile à analyser en peu de mots. Il s'agit toujours de développements vraiment extraordinaires se greffant sur des énoncés simples dont les prototypes furent les théorèmes de Liouville et de Picard. Aux fonctions entières, méromorphes, uniformes, ..., qui ne pou-

vaient faire ni ceci ni cela dans un domaine et se réduisaient alors à des constantes ou à des fonctions moins générales que celles que l'on croyait définir, on substitue maintenant des suites de fonctions qui ne peuvent complètement exister quand on veut les astreindre à de certaines impossibilités mais qui se réduisent alors à des *familles normales*. On conçoit qu'en précisant cette idée on arrive encore à des définitions simples et fondamentales pour ces familles. Et comme c'est *une suite* de fonctions que l'on étudie dans un certain domaine, il y a déjà tout un enchaînement fonctionnel à considérer en *un point* du domaine. Les notions de continuité, de convergence uniforme montrent ici une souplesse des plus intéressantes. La sphère de Riemann, substituée au champ complexe plan, fait disparaître nombre de difficultés à l'infini.

Les familles de fonctions méromorphes non partout normales proviennent de *points de Julia* pouvant former un *ensemble de Julia*; à ces points s'attachent des suites exceptionnelles dont toute suite extraite peut avoir deux valeurs interdites. Il est aisé de redescendre de là au théorème de M. Emile Picard. Il est curieux de constater que les généralisations de ce théorème obtenues maintenant et même tout le sujet traité par M. Valiron donnent surtout une impression de classification. D'abord la Théorie des ensembles, qui est le substratum de ces profondes considérations, laisse jouer ici tout son merveilleux pouvoir ordonnateur. Ensuite les correspondances d'ensembles à suites, à familles, à systèmes limites, ..., dans des champs simples ou feuilletés, font surgir des théorèmes qui sont repérés avant d'être démontrés; pour beaucoup la recherche d'une démonstration directe peut être un joli sujet d'étude bien que ce soit abandonner la promenade en forêt, si bien conduite par l'auteur, pour s'attacher à l'examen d'un arbre. Outre MM. Picard, Julia, Valiron, je citerai rapidement, sans rien apprendre à personne, Bloch, Bohr, Borel, Fatou, Lévy, Milloux, Montel (créateur de la notion de famille normale), Schottky, ...; il faut particulièrement insister sur les jeunes et redire que les jeunes esprits s'accoutumant aisément à cette manière de comprendre la Théorie des fonctions.

A. BUHL (Toulouse).

T. NAGELL. — **L'analyse indéterminée de degré supérieur** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. XXXIX). — Un fascicule gr. in-8° de 64 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1929.

Le sujet est bien connu, trop connu même à de certains points de vue. Il est exploité par une foule de gens qui envisagent l'arithmétique avec les idées de l'école primaire, ignorent, à part cela, tout des mathématiques et cependant écrivent sur la possibilité ou l'impossibilité de résoudre en nombre entiers des équations qu'aucun mathématicien digne de ce nom n'a encore pu arithmétiser complètement. On ne peut compter les élucubrations, touchant à la folie et même poursuivies dans les asiles d'aliénés, qui ont été engendrées par l'équation de Fermat

$$x^n + y^n = z^n .$$

Ceci tient évidemment à l'apparence simple des problèmes d'analyse

indéterminée alors qu'au fond ces problèmes sont d'une énorme difficulté compliquée d'embûches qu'un bon esprit peut reconnaître dès les premiers pas. De plus, pour avancer véritablement dans le sujet, il faut bien connaître de nombreuses branches de la Science: courbes algébriques, transformations birationnelles, fonctions elliptiques et extensions, théorie des corps, groupes de substitutions.

M. Nagell nous présente tout ceci avec beaucoup d'art, particulièrement à partir de la méthode de *descente infinie* due à Fermat, mais reprise et perfectionnée, il n'y a pas vingt ans, par Mordell. Parmi les équations les plus importantes, traitées dans ce bref fascicule, citons

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= Az^3, & x^3 + 1 &= Dy^2, & ax^4 + b &= cy^2 \\ x^4 + ax^2 + b &= cy^2, & ax^3 + by^3 + cz^3 + dxyz &= 0 \\ 2x^4 - y^4 &= z^2, & x^p + y^p &= cz^p. \end{aligned}$$

Ici se placent les belles recherches de Thue et de Siegel liées à l'approximation des nombres algébriques par des nombres rationnels.

Quant à la bibliographie générale du sujet, elle va de Diophante, fort bien étudié de nos jours par Dickson, jusqu'à Weil avec d'importants travaux, publiés en 1928 et relatifs à l'arithmétique sur les courbes algébriques. On y trouve Cauchy, Euler, Fermat, Gauss, Hermite, Jacobi, Kummer, Legendre, Poincaré, Sylvester pour citer d'abord les géants disparus. Puis viennent des modernes dont plusieurs sont encore incomplètement mis en lumière: Delaunay (B.), Dörge, Fueter, Hilbert, Hurwitz, Skolem. Il y a eu des méconnus presque totalement, comme Lucas, partiellement comme Maillet. Le sujet est si vaste qu'on y voit évoluer des intelligences étrangement disparates, mais il faut reconnaître que M. Nagell l'a harmonisé avec le plus grand talent. Si je complétais un peu en signalant M. Emile Turrière qui a eu souvent recours à *L'Enseignement mathématique* pour publier ses réflexions sur les arithmopoints des courbes algébriques<sup>1</sup>.

A. BUHL (Toulouse).

G. RIBAUD. — **Le rayonnement des corps non noirs** (Mémorial des Sciences physiques dirigé par Henri Villat et Jean Villey; fasc. IX). — Un fascicule gr. in-8° de 84 pages et 20 figures. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1929.

Comme le remarque d'abord M. G. Ribaud, le rayonnement des corps non noirs n'a pas eu jusqu'ici d'étude monographique tant soit peu complète. Le cas n'a pas l'élégance théorique de ce qui concerne le corps noir mais, d'autre part, le corps non noir est l'être pratique intervenant, à chaque instant, dans une foule de réalisations industrielles.

On a cherché à représenter les lois du rayonnement des corps non noirs par des formules à structure exponentielle; leur seul aspect semble leur interdire une bien grande généralité. Mais de simples graphiques de brillances spectrales, avec courbe de comparaison pour le cas du corps noir, relatifs au tungstène et au platine, sont déjà fort suggestifs. Ce qui ne semble pas faciliter ici la représentation mathématique, c'est la grandeur des températures d'expérimentation.

<sup>1</sup> Voir, plus haut, la note de la page 304.

A ce propos, disons que de telles expériences n'allant point sans la production de très hautes températures (2000 degrés et plus) il y a déjà un puissant intérêt du côté de cette production et surtout du côté évaluation. Les méthodes se sont singulièrement affinées avec les progrès de la simple lampe électrique à incandescence d'où, par exemple, le pyromètre à disparition de filament. Il y a aussi des pointés pyrométriques à effectuer dans de menus tubes, de menues hélices du métal à étudier, dans des conditions de visée créant un véritable corps noir. De tels procédés sont aussi ingénieux que délicats. Le rayonnement du tungstène a été particulièrement travaillé justement à cause des avantages que présente son emploi dans l'éclairage par incandescence. Une question des plus intéressantes, au point de vue géométrique, est celle de la variation du pouvoir émissif avec l'angle d'émission.

La « température de couleur » fait intervenir le spectre visible qui, composé de rouge aux premières émissions, s'enrichit progressivement vers le violet. Il y a des « spectropyromètres », mais les méthodes dites « de l'identité de couleur » ne nécessitent que des comparaisons photométriques.

L'aperçu historique, relatif à la question, avec Angström, Leder, Morris, Stroude, Ellis, Hyde, ... montre un caractère aussi moderne qu'important. Il y a encore, toujours dans le spectre visible, une pyrométrie, par intersections d'isochromatiques logarithmiques, qu'on peut préciser par la méthode des moindres carrés.

Deux courts chapitres, sur le pouvoir émissif total et l'émission de lumière visible, complètent, c'est le cas de le dire, la « brillance » de ce fascicule véritablement original.

A. BUHL (Toulouse).

**Augustin MESNAGER.** — **Détermination expérimentale des efforts intérieurs dans les solides** (Mémorial des Sciences physiques dirigé par Henri Villat et Jean Villey; fasc. X). — Un fascicule gr. in-8° de 82 pages et 72 figures. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1929.

La lecture de ce fascicule est chose curieusement attachante pour qui ne connaît la Théorie de l'Elasticité qu'à travers ses équations. On est émerveillé de l'ingéniosité avec laquelle le praticien peut repérer les tensions produites dans les solides naturels justement quand la théorie se montre insuffisante ou d'un maniement trop difficile. Et l'ingénieur n'a même pas besoin, le plus souvent, de s'ingénier personnellement. Il trouve des appareils à cadran, à tambour enregistreur, à combinaisons optiques, tous plus remarquables les uns que les autres, qui le renseignent sur tensions, flexions et petits déplacements de toutes sortes.

M. Mesnager commence par nous rappeler la grosse conception mécanique qui va de la notion moléculaire à celle de continuité, c'est-à-dire qui va juste à l'inverse des idées « subtiles » sur la constitution de la matière; mais le praticien n'a pas à s'occuper de cette constitution et n'a à considérer que des effets relativement gros qu'il peut analyser avec cette notion de continuité si traîtresse en des domaines voisins.

Les directions, les tensions principales de Lamé sont à la fois du domaine théorique et du domaine pratique; on peut les indiquer, les tracer sur des éléments en déformation. D'autres méthodes peuvent rendre un service analogue, telle celle du cercle de Mohr. Les tensions principales enveloppent,

pour ainsi dire, des lignes isostatiques. Quant à la valeur de ces tensions, elle peut être déterminée par l'emploi de milieux transparents auxiliaires en lesquels joue la double réfraction accidentelle. Des phénomènes de polarisation permettent même d'observer des colorations dont les combinaisons variées forment de saisissantes et esthétiques images trahissant tous les détails de déformations à peu près inaccessibles à la mesure géométrique proprement dite.

En possession de toutes ces jolies méthodes, on peut examiner les bases de la résistance des matériaux. Des graphiques d'une grande élégance apparaissent alors et peuvent donner à cette élasticité appliquée un intérêt spéculatif véritablement très grand. Le praticien, bien entendu, ne peut que gagner à cet état d'esprit. Il y a finalement une Résistance des matériaux qui, comme l'hydromécanique de M. Léon Lichtenstein (voir plus haut) peut intéresser autant le chercheur épris de fantaisie que celui qui poursuit des buts pratiques.

A. BUHL (Toulouse).

Raoul BRICARD. — **Le Calcul vectoriel** (Collection Armand Colin). — Un volume in-16 de 200 pages et 27 figures. Prix: broché, 9 francs; relié, 10 francs 50. Armand Colin. Paris, 1929.

Ce traité de Calcul vectoriel est certainement dans la note du jour. Le Chapitre premier, qui traite des vecteurs libres et de leurs produits scalaires et vectoriels, aboutit à une douzaine d'exercices de géométrie, de trigonométrie plane ou sphérique, qui montrent tout de suite qu'un symbolisme, un peu complexe au début, est fait pour régir des problèmes ordinaires.

Après les vecteurs glissants et les torseurs (Ch. II) nous venons aux applications à la Géométrie analytique (Ch. III) puis à la Géométrie infinitésimale (Ch. IV). La notion de dérivée vectorielle conduit à une formule de Taylor vectorielle. Des courbes gauches, on passe à la surface réglée avec plan asymptote, point central, plan central, ligne de striction, formule de Chasles. Sur les surfaces quelconques, on considère les lignes de courbure, les asymptotiques, les géodésiques. Les congruences de normales sont l'occasion de parler de congruences quelconques.

La Mécanique (Ch. V) débute par de la cinématique poussée jusqu'au théorème de Coriolis. On rapproche ensuite la statique du fil et la dynamique du point. La dynamique des systèmes commence par la géométrie des masses. Après la quantité de mouvement, le torseur cinétique, le moment cinétique, on peut écrire les équations générales du mouvement.

Puis viennent avec les fonctions de points (Ch. VI), le gradient, la divergence, le rotationnel, le nabla. Combien il serait naturel de s'élever au-dessus de tout cela pour faire de la Gravifique ! Ce ne serait pas plus difficile que d'arriver (Ch. VII) à l'hydrodynamique, aux feuillets magnétiques, au potentiel vecteur. Ces énumérations montrent que l'auteur n'est pas un fétichiste du symbolisme qu'il expose; il écrit, dans le style vectorialiste, en géomètre ou en mécanicien.

Les idées émises dans la Préface révèlent que la discipline vectorielle n'est pas encore une chose ayant partout un même et indiscutable droit de cité. Devons-nous plus, dans le domaine en question, à Hamilton ou à Grassmann ? M. Bricard penche pour Hamilton. Je pencherais volontiers pour Grassmann et j'en appellerais aux travaux de MM. Ed. Goursat et Elie

Cartan. La bibliographie du sujet est épineuse. Je suis étonné de n'y point trouver le nom de M. Henri Fehr, un des précurseurs quant à l'emploi des méthodes symboliques en Géométrie infinitésimale; sa Thèse sur ce sujet est devenue une monographie bien connue ayant eu une seconde édition en 1907. M. R. Leveugle est également oublié avec un *Précis de Calcul géométrique* justement préfacé par M. Fehr dont, dit M. P.-C. Delens, l'action personnelle a déjà, dans cette Revue, tant contribué à la diffusion des méthodes de calcul direct (*L'Ens. math.*, t. XXI, 1920, p. 238).

Pour ce qui est du flottement, auquel fait allusion M. Bricard lui-même, portant sur la forme à donner à des formules essentielles, rien n'est plus suggestif que ce qui concerne la formule de Stokes. Le lecteur jugera s'il aime mieux, dit M. Bricard (p. 6),

$$\int_C \vec{u} \cdot dM = \iint_S (\vec{n} \cdot \operatorname{rot} \vec{u}) d\sigma$$

que

$$\int_C P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left[ \alpha \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \dots \right] d\sigma .$$

Or, il n'y a pas ici que deux appréciations possibles en présence. Il y a à compter avec la forme supérieurement esthétique

$$\int_C P dx + Q dy + R dz = \iint_S \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} d\sigma .$$

Il y a aussi l'opinion qui ne voit dans la formule de Stokes qu'une transformation de l'identité

$$\int_C X dY = \iint_A dX dY$$

relative à une aire *plane* A. Cette dernière identité peut d'ailleurs prendre immédiatement la forme grassmannienne

$$\int_C P_i dx_i = \iint_S [dP_i dx_i] .$$

Voilà qui conduit facilement aux équations de Maxwell et à leurs compléments gravifiques. Mais, avant que tout le monde sache voir tout ceci à la fois, il passera encore, sans doute, beaucoup d'eau sous les ponts.

A. Buhl (Toulouse).

J. HAAG. — **Cours complet de Mathématiques élémentaires.** Tome VI : *Géométrie descriptive*. — Un volume in-8° de 80 pages et 78 figures. Prix : 15 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1929.

Ce sixième et élégant volume continue le Cours destiné aux Candidats au Baccalauréat. Le programme, fort bien respecté, ne peut permettre de grands envols dans le domaine créé par Monge. Voyons la table des matières :

Chapitre I: Représentation du point, de la droite et du plan. — Chap. II: Rabattements; changements de plan; rotations. — Chap. III: Angles et distances. — Chap. IV: Le cercle. — Chap. V: La sphère. — Chap. VI: Surfaces topographiques.

Les figures, bien faites, sont toutes dans le texte. Pas d'album, pas de planches séparées; or ceci est excellent pour un premier ouvrage de Géométrie descriptive. On ne donne pas aux élèves l'impression d'une science spéciale ayant besoin d'être exposée autrement que les autres disciplines constituant les Mathématiques élémentaires. On peut espérer de l'exposition de M. Haag une meilleure compréhension de tracés, qui ont aussi une note d'art, ainsi qu'un développement de la faculté de voir dans l'espace l'objet étudié en épure.

Tome VII: *Cosmographie*. — Un volume in-8° de 124 pages et 84 figures.

Prix: 15 francs.

Ce septième volume termine le Cours. Il est plus que suffisant pour le Baccalauréat et il est visible que l'auteur, en maints endroits, a laissé se développer l'attrait naturel du sujet. Reproduisons la table:

Chapitre I: La sphère céleste. — Chap. II: La Terre. — Chap. III: Le Soleil. — Chap. IV: La mesure du temps. — Chap. V: Orbite du Soleil. — Chap. VI: Les planètes. — Chap. VII: Les étoiles. — Chap. VIII: La lune.

Ainsi, dans l'étude de la Terre et des cartes, nous examinons les projections orthographique et stéréographique, la Carte d'Etat-Major, les projections de Ptolémée, de Lambert, de Flamsteed, de Mercator. Le mouvement du Soleil est détaillé avec grand soin. Des incompréhensions extraordinaires se produisent souvent ici chez des élèves qui considérant, par exemple, le point  $\gamma$  et son symétrique  $\gamma'$  déclarent que ce sont là les points *vernaux*. La mesure du temps ne va point sans une teinte de philosophie. La loi de Newton est classiquement magnifiée. Einstein a une petite note élogieuse au bas de la page 94. Il mérite mieux. J'aurais aimé un beau paragraphe qui pouvait être écrit dans l'excellent style de tous les autres. Cela viendra. Et beaucoup plus avec. Bravo pour Le Verrier et sa découverte de Neptune.

L'univers stellaire est parcouru par années de lumière. Les principales révolutions lunaires sont définies aussi bien qu'on pouvait le faire, dans un livre élémentaire, étant données les singulières difficultés du sujet.

Vraiment ce Cours complet de Mathématiques élémentaires, en sept volumes, se termine dans de belles conditions.

H. F.

D. HILBERT und W. ACKERMANN. — **Grundzüge der theoretischen Logik.** — Un vol. in-8° de VIII-120 p.; RM. 8,80. Julius Springer, Berlin, 1928.

Ce livre fait partie de la collection Springer « Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen » B. XXVII. C'est une rédaction très soignée faite par M. A. Ackermann des leçons sur la logique mathématique que M. Hilbert fit à Göttingen au cours des années 1917-1922. Cet ouvrage doit être considéré comme une introduction à un autre livre que M. Hilbert se propose de publier en collaboration avec M. P. Bernays sur le sujet si important et si actuel, depuis les travaux de

M. Brouwer, des fondements logiques des mathématiques. Nombreux sont les mathématiciens et philosophes qui attendent impatiemment cet ouvrage où M. Hilbert exposera le résultat de ces profondes réflexions.

Le présent livre, court et clair, a en lui-même un grand intérêt. On y reconnaît partout la main des mathématiciens de profession et je crois que dans la ligne ouverte par Boole, Jevons, Peirce, Couturat, le calcul des propositions et celui des classes n'ont jamais été traités avec autant de profondeur algébrique. La sagacité de l'école de Göttingue y apparaît dans la manière nouvelle et vraiment satisfaisante d'exposer une matière déjà ancienne.

Le premier chapitre traite de la logique des propositions « Aussagenkalkül »; on y remarquera une interversion heureuse des sommes et produits de la logique ordinaire des propositions et une introduction fructueuse d'une forme normale canonique à laquelle peut se réduire toute formule de ce calcul spécial.

Le second chapitre traite du sujet parallèle de la logique des classes « Klassenkalkül » et de la logique aristotélicienne qui en dérive.

Le troisième chapitre « Der engere Functionenkalkül » a trait à ce que l'on appelle logique des relations et logique des fonctions propositionnelles et enfin, le dernier chapitre « Der erweiterte Funktionenkalkül » est une logique des relations où les propositions et relations logiques peuvent être prises pour arguments ou variables.

Mais on sait qu'en procédant ainsi, sans réserve, on aboutirait à des paradoxes, il faut restreindre dans une certaine mesure le champ des relations qu'on serait, semble-t-il, en droit d'envisager; en tout cas faut-il procéder avec précaution. On connaît, en effet, l'antinomie de l'ensemble de tous les ensembles...

A la page 92 on voit à merveille pourquoi et comment les paradoxes classiques sont apparus. Pour les éviter on est obligé de restreindre la formation des fonctions de fonction logique ou plus exactement de les classer en types séparés. C'est la théorie des types de Russel que MM. Hilbert et Ackermann nomment « Stufenkalkül ». Elle permet en principe d'éviter les paradoxes mais elle est trop restreinte et elle interdirait certaines opérations, cependant nécessaires pour traduire logiquement les démarches les plus fondamentales de la théorie des ensembles de nombre réels (coupure de Dedekind, borne supérieure, ...).

Il faut donc s'accorder un certain droit, consigné dans un axiome « axiome der Reduzierbarkeit » ou axiome de réductibilité de la théorie de Russel qui permet, en quelque sorte, de passer dans certains cas d'un degré ou type à l'autre.

Mais, comme le montre M. Hilbert, cet axiome n'est pas à l'abri de toute critique, il peut même conduire à une contradiction. Pour scruter la nature logique des raisonnements de l'analyse moderne il faut d'autres méthodes, qui conservent l'idée fondamentale des types, et qui soient plus puissantes. Cette nouvelle manière de fonder logiquement l'analyse et la théorie des ensembles a déjà été exposée dans quelques articles par M. Hilbert et P. Bernays; c'est elle qui fera l'objet d'une partie du second volume.

A propos des types ou des classifications prédictives et des paradoxes, on sait l'importance de la critique de Poincaré; je regrette que le nom de Poincaré ne figure à aucune page du présent livre.

Dans cette brève analyse j'ai omis volontairement un sujet très important

abordé à plusieurs pages 29-34, 65-82; c'est celui des trois conditions qu'un corps d'axiome doit satisfaire: l'absence de contradiction « *Widerspruchlosigkeit* », l'indépendance « *Unabhängigkeit* » et le caractère complet « *Vollständigkeit* ».

Ces trois conditions ont un sens précis dans le calcul des propositions et des classes, on peut démontrer qu'elles sont réalisées. On admirera à ce propos la substitution très habile de nombre à la place des formules et valeurs logiques. Ces conditions ne sont plus satisfaites dans le calcul des relations et elles se ramènent d'ailleurs à un seul et même problème dont on parle beaucoup ces temps-ci: l'*Entscheidungsproblem*. Il consiste à déterminer si une relation logique est une identité, c'est-à-dire reste vraie quels que soient les êtres représentés par les arguments, ex.: A ou non-A ou s'il existe des êtres qui y satisfont et quels sont ces derniers. Ces deux aspects de la question concernent l'« *Allgemeingültigkeit* » et l'« *Erfüllbarkeit* ». Ce problème est central et la question de savoir si une proposition donnée peut être déduite d'axiomes donnés s'y ramène. Il est clair que la logique symbolique est l'instrument approprié au traitement axiomatique des questions fondamentales de la théorie des nombres et des ensembles comme de la géométrie.

Il faut espérer que ce livre si bien fait, si suggestif et en même temps si profond contribuera à faire adopter ses notations et sa terminologie par la plupart de ceux qui s'occupent de la logique mathématique, car elles évoluent chaque jour, à moins qu'on ne s'en tienne au formulaire de Peano. Ce serait déjà un gros point d'acquis.

Rolin WAVRE (Genève).

L. BERZOLARI, G. VIVANTI e D. GIGLI. — **Enciclopedia delle Matematiche Elementari.** — Vol. 1, Première partie. — Un vol. in-8° de 450 pages, avec 19 figures, 68 l. Ulrico Hoepli, Milan, 1930.

L'initiative d'une encyclopédie des mathématiques élémentaires est due au géomètre italien R. Bonola. Son projet reçut l'approbation de la Section lombarde de la Société « *Mathesis* » et fut transmis à une commission présidée par M. L. Berzolari et comprenant en outre quatre autres membres de la Section lombarde au nombre desquels figurait le regretté Bonola, enlevé prématurément à la science le 16 mai 1911.

Le but de cette encyclopédie est de présenter sous une forme concise et dans leurs éléments essentiels les principales théories des mathématiques élémentaires et de leurs applications. L'ouvrage comprendra trois volumes: I. Analyse; II. Géométrie; III. Applications des mathématiques. Histoire des mathématiques. Questions didactiques. Il est publié sous la direction de MM. L. Berzolari, C. Vivanti et D. Gigli, avec la collaboration de nombreux professeurs de l'enseignement secondaire et supérieur.

Voici la liste des monographies qui ont été réunies dans la première partie du Tome I:

I. Logique, par A. Padoa, Gênes. — II. Arithmétique générale, par D. Gigli, Pavie. — III. Arithmétique pratique, par E. Bortolotti (Bologne) et D. Gigli, Pavie. — IV. Théorie des nombres, Analyse indéterminée, par M. Cipolla, Palerme. — V. Progrès, par A. Finzi, Naples. — VI. Logarithmes, par A. Finzi, Naples. — VII. Calcul mécanique, par G. Tacchella, Gênes.

Documenté avec soin, cet ouvrage est appelé à rendre de grands services aux professeurs et aux étudiants.

H. F.

C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO. — **Analisi vettoriale generale e applicazioni.** Volume Primo. **Trasformazioni lineari.** Seconda edizione interamente rifatta. — 1 vol. in-8° de 271 p., 65 l. Nicola Zanichelli, Bologne, 1929.

Le traité d'analyse vectorielle de MM. Burali-Forti et Marcolongo est suffisamment connu pour qu'il suffise de signaler ici la nouvelle édition entièrement revue et complétée du premier volume. Il est intitulé « Transformations linéaires », et comprend les chapitres suivants: Introduction. — Homographie vectorielle. — Fonctions de points. Opérateurs différentiels. — Intégrales et équations différentielles.

On sait l'influence qu'ont exercé sur le développement du calcul vectoriel les travaux des deux géomètres faisant école, l'un à Turin, l'autre à Naples. Leur effort tendant à faire adopter un système de notations rationnelles a été couronné de succès, tout au moins en Italie. Nos lecteurs n'ont pas oublié la série des articles publiés sous ce titre dans cette Revue de 1909 à 1911.

H. F.

G. FANO e A. TERRACINI. — **Lezioni di Geometria analitica e proiettiva.** (Biblioteca di Scienze fisiche matematiche e naturali.) — Un vol. in-8° de 630 pages et 211 figures, 100 l.; G. B. Paravia & Co., Turin, 1930.

Ce traité est principalement destiné aux étudiants de l'Université et de l'Ecole polytechnique de Turin. Suivant le système inauguré en Italie vers 1890 par Cremona, les enseignements de géométrie analytique et de géométrie projective sont réunis en un cours unique.

Les deux premières parties de l'ouvrage initient l'étudiant à la méthode analytique dans le plan et dans l'espace. Puis vient, dans la troisième partie, l'étude de la géométrie projective présentée en faisant usage successivement de la méthode synthétique et de la méthode analytique. Ces notions une fois acquises, le lecteur peut aborder, à ce double point de vue, l'étude des coniques et des quadriques (3<sup>me</sup> et 4<sup>me</sup> parties).

Ordonnées avec soin, toutes ces matières sont exposées sous une forme à la fois claire et concise, sans développements inutiles dans une première étude.

H. F.

SOPHUS LIE. — **Gesammelte Abhandlungen**, herausgegeben von dem norwegischen math. Verein durch F. ENGEL u. P. HEEGAARD. Vierter Band. — F. ENGEL: *Abhandlungen zur Theorie der Differentialgleichungen.* — Un vol. in-8° de 448 p. avec un supplément intitulé: *Anmerkungen zum vierten Band* du même auteur. Un vol. in-8° de 236 p., B. G. Teubner, Leipzig et H. Aschehoug & Co., Oslo, 1929.

Les tomes III et IV des œuvres complètes de Lie ont été réservés aux travaux sur les équations différentielles. Le premier a paru en 1922. Ce nouveau volume débute par les trois grands mémoires publiés dans les *Mathem. Annalen* de 1874 à 1877. Il comprend au total onze mémoires

annotés avec soin par M. Engel. Ces annotations font l'objet d'un supplément dans lequel on trouvera un grand nombre d'intéressantes remarques destinées à faciliter l'étude approfondie des travaux du grand géomètre norvégien.

Ainsi que nous le disions précédemment les jeunes mathématiciens trouveront dans les œuvres de Lie de nombreux sujets de recherches.

H. F.

**LOBACEVSKY.** — **Ad annum MCMXXVI centesimum a geometra Kasaniensi N. J. Lobacevsky non-euklidiae geometriae systematis inventi concelebrandum.** Le Centenaire de la Géométrie non euclidienne de Lobacevsky (en russe). — Un volume gr. in-8° de 112 pages. Edition de la Société physico-mathématique de l'Université de Kasan, 1927.

Le 26 février 1926, la Société physico-mathématique et l'Université de Kasan ont célébré, en présence de nombreux délégués officiels, le centenaire de la découverte de la géométrie non euclidienne par N. J. Lobacevsky. A cette occasion, la plupart des Académies des sciences et des Sociétés savantes russes et étrangères ont envoyé à la Société physico-mathématique de Kasan des adresses et des télégrammes de félicitations, et en rendant hommage à la mémoire du grand géomètre russe se sont associées à la cérémonie par laquelle sa découverte a été glorifiée. Dans un discours éloquent, le regretté A. W. Wassilieff, dont nous venons d'apprendre la mort récente, retraça en termes émus la vie de l'illustre mathématicien, ses débuts, ses luttes, ses déboires, son activité scientifique et administrative au sein de l'Université de Kasan. MM. Parfentieff, Kagan et Stekloff analysèrent son œuvre, et en soulignant sa portée énorme, dirent le rôle que la géométrie et les conceptions hardies de Lobacevsky ont joué et jouent encore dans le développement des sciences physico-chimiques, en philosophie et dans la théorie de la connaissance.

Le volume du centenaire, dont l'aspect rappelle les meilleures éditions russes d'avant guerre, contient la reproduction de ces discours, adresses, télégrammes, procès-verbaux. On y trouve de plus deux portraits de Lobacevsky datant d'époques différentes et des reproductions photomécaniques de plusieurs documents curieux, notamment de la requête de Lobacevsky adressée à l'Université de Kasan en février 1826, lors de la présentation de son ouvrage « Exposition succincte des principes de la Géométrie », document qui fixe la date de la découverte de la géométrie non euclidienne.

Victor Hugo avait dit en parlant du centenaire de Dante: « Une solennité comme celle-ci est un magnifique symptôme. C'est la fête de tous les hommes célébrée par une nation à l'occasion d'un génie... Chaque nation donne aux autres une part de son grand homme. L'union des peuples s'ébauche par la fraternité des génies. »

Ne pourrait-on pas appliquer ces paroles au centenaire de l'une des plus grandes découvertes du XIX<sup>e</sup> siècle ? D. MIRIMANOFF (Genève).

**Gino LORIA.** — **Curve piane speciali algebriche e trascendenti. Teoria e Storia.** Vol. I: *Curve algebriche*. Prima Edizione Italiana. — Un vol. in-8° de 573 pages avec 122 figures; Lires 75; Ulrico Hoepli, Milan, 1930.

Aux lieux géométriques déjà étudiés par les géomètres grecs sont venus s'ajouter, au cours des siècles, un grand nombre de courbes algébriques et

transcendantes possédant des propriétés fort remarquables. Quelques-unes de ces courbes ont été redécouvertes à plusieurs reprises. Il y avait donc un réel intérêt à faire un exposé d'ensemble des propriétés des courbes planes en donnant des indications bibliographiques et historiques aussi complètes que possible. C'est ce qu'a fait M. Gino Loria dans l'ouvrage dont la première édition a paru en langue allemande chez Teubner en 1902 et dont une édition, revue et complétée, vient de paraître en italien chez Hoepli à Milan.

La première partie du volume I est consacrée aux courbes algébriques planes. Après avoir examiné les lieux géométriques se rattachant à la droite, à la circonference et aux coniques, l'auteur passe aux courbes du troisième ordre, il donne leur classification, et passe en revue les courbes classiques dont quelques-unes ont déjà été étudiées par les Anciens. Puis viennent les courbes du quatrième ordre, leur classification, l'étude des quartiques spéciales. Les livres IV et V sont consacrés à des courbes spéciales d'un ordre supérieur au quatrième.

Il fallait un géomètre possédant l'érudition de M. Loria pour traiter un sujet aussi vaste. Tous ceux qui s'intéressent aux courbes planes lui seront très reconnaissants d'avoir mis à jour l'édition de 1902 dont le texte primitif remonte à près de trente ans.

H. F.

David Eugène SMITH. — **A Source Book in Mathematics** (Source Books in the History of Sciences). — Un vol. gr. in-8° de 701 pages, relié, avec de nombreuses figures: McGraw-Hill Book Co., New-York, 1929.

La collection des « Sources Books in the History of Sciences » a pour but de fournir aux professeurs et aux étudiants des extraits, traduits en anglais, des mémoires ou des ouvrages fondamentaux qui ont le plus contribué aux progrès de la science.

Le présent volume est consacré aux mathématiques. Il permet aux lecteurs d'entrer en contact avec des mémoires originaux empruntés aux grands géomètres, depuis la Renaissance jusqu'en 1900. L'ouvrage est divisé en cinq parties: Arithmétique et théorie des nombres. — Algèbre. — Géométrie. — Probabilités. — Calcul différentiel et intégral. Théorie des fonctions. Calcul vectoriel.

Dans chacun de ces domaines M. Smith a fait une sélection parmi les ouvrages classiques de manière à ce que les principales théories soient représentées par les mémoires fondamentaux.

Ce beau recueil ne peut manquer d'intéresser tous ceux qui sont curieux de l'évolution de la pensée mathématique. En se chargeant de le rédiger M. D. E. Smith a rendu un service de plus à l'Histoire des sciences mathématiques.

H. F.