me semble d'une extrême importance. Je suis d'avis que tous les cours d'analyse devraient la présenter d'une façon très détaillée. C'est en l'examinant sous des points de vue toujours nouveaux que l'on en hâtera la solution définitive.

Louvain, le 21 décembre 1928.

Marcel WINANTS.

Sur un point remarquable du triangle.

A propos d'un article de M. G. FRANKE.

Le travail que M. G. FRANKE publie dans l'*Enseignement mathématique* (28me année, 1929, pp. 91-110) sous le titre *Sur un point remarquable du triangle* n'étant accompagné d'aucune référence, les jeunes lecteurs de la Revue pourraient croire que cette question est nouvelle. A notre connaissance, elle est âgée de plus d'un demi-siècle.

La revue mathématique belge *Mathesis*, dirigée actuellement par M. Ad. MINEUR, s'en est occupé de nombreuses fois depuis 1922, et NEUBERG y a publié des renseignements bibliographiques (*Bibliographie du triangle et du tétraèdre*, 1922, pp. 50, 117, 161, 209, 353; 1923, pp. 5, 49, 97, 145, 193, 241, 289, 337, 401, 449; 1924, pp. 5, 97, 193, 241, 289, 337, 385) qui vont nous permettre d'esquisser l'histoire de la question, sans prétendre être complet.

1. — La terminologie de M. STREIT, traducteur de M. FRANKE, n'étant pas celle qu'adoptent généralement les géomètres, nous rappelons quelques définitions.

Etant donnés un triangle ABC et un point quelconque P de son plan, les droites AP, BP, CP sont les *céviennes* du point P; elles rencontrent les côtés BC, CA, AB aux points A_1, B_1, C_1 qui sont les sommets du *triangle pédal* $A_1B_1C_1$ du point P, tandis que les projections orthogonales A′, B′, C′ de P sur BC, CA, AB sont les sommets du *triangle podaire* A′B′C′ de P.

Si les perpendiculaires abaissées des sommets d'un premier triangle A′B′C′ sur les côtés BC, CA, AB d'un second triangle ABC concourent en un point P, les perpendiculaires abaissées de A, B, C sur B′C′, C′A′, A′B′ concourent également en un point P′. Deux tels triangles sont appelés *orthologiques*; les points P, P′ sont les *centres d'orthologie* (STEINER, *Crelle*, II-287; EBERTY, *id.*, V-107; E. LEMOINE, *Association française pour l'avancement des Sciences*,1890-111; NEUBERG, *Mathesis*, 1901-157; R. BRICARD, *Nouvelles annales de mathématiques*, 1920-240; THÉBAULT, *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1922-128).

Lorsque deux triangles sont à la fois homologiques et orthologiques, ils sont dits *bilogiques*. Les deux centres d'orthologie et le centre d'homologie se trouvent sur une même droite normale à l'axe d'homologie (SONDAT, *Intermédiaire des mathématiciens*, 1894-10; SOLLERTINSKY, *id.*, 1894-44; FUHRMANN, *Dissertation*, Kœnigsberg, 1902; CL. SERVAIS, *Nouvelles Annales de mathématiques*, 1919-260 et *Bulletin de l'Académie royale de Belgique, classe des Sciences*, 1921-211).

2. — Si le triangle podaire A'B'C' d'un point P correspond au triangle ABC dans une homologie de centre Q, il est dit *bilogique*. La conique circonscrite au triangle A'B'C' et inscrite au triangle ABC est dite *conique de* THOMSON ou *trinormalement inscrite au triangle* ABC; soit ω son centre.

Les lieux (P), (Q), (ω) des points P, Q, ω ont été proposés respectivement par DARBOUX sous une forme un peu différente (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1866-95), par ED. LUCAS (*Id.*, 1876-240 et *Nouvelle Correspondance mathématique*, 1876-94), ainsi que par LAGUERRE (*Id.*, 1879-144), et par THOMSON (*Id.*, 1865-144, question extraite de *Educational Times*, 1864); ils sont du troisième ordre, et NEUBERG les appelle cubiques de DARBOUX, de LUCAS, de THOMSON ou des dix-sept points.

DEWULF traite la question de LUCAS par les méthodes de la Géométrie supérieure (*Nouvelles annales*, 1876-550), et une solution analytique très développée a été donnée par H. VAN AUBEL (*Nouvelle correspondance*, 1876-276 et 335; 1878-261).

Ces cubiques sont des cas particuliers de la cubique anallagmatique déduite comme suit. Etant donnés un point O appelé *pivot* et un faisceau ponctuel de coniques circonscrites à un quadrangle RSTU, le lieu des points de contact des tangentes aux coniques et issues de O (ou encore le lieu des couples de points conjugués par rapport au faisceau et alignés sur O) est en général une cubique non singulière sur laquelle les deux quaternes RSTU, ABCO sont deux quadruples dont les tangentiels sont O et son conjugué O' par rapport au faisceau; le triangle pédal de O dans le triangle diagonal ABC du quadrangle RSTU est inscrit à la cubique et ses sommets forment avec O' un nouveau quadruple (AD. MINEUR, *Journal de Mathématiques spéciales*, 1894-14, et *Mathesis*, 1923-145; R. DEAUX, *Mathesis*, 1923-316). Suivant que R, S, T, U sont les centres des cercles tritangents au triangle ABC, ou le centre de gravité et les symétriques des sommets de ce triangle par rapport aux milieux des côtés opposés, la cubique est le lieu des couples de points isogonaux (inverses triangulaires) ou réciproques alignés sur le pivot O, et est anallagmatique en coordonnées normales ou barycentriques (NEUBERG, *Mathesis*, 1923-97).

Les cubiques de DARBOUX et de THOMSON sont anallagmatiques en coordonnées normales, et celle de LUCAS l'est en coordonnées barycentriques; leurs pivots sont le symétrique de l'orthocentre du triangle

ABC par rapport au centre du cercle circonscrit (point de Longchamps), le centre de gravité, le réciproque de l'orthocentre.

Les cubiques de Darboux et de Lucas ont été envisagées par M. Turrière au point de vue arithmogéométrique dans la 18^{me} année de cette Revue [1].

3. — Outre la bibliographie de Neuberg, voici les questions et articles publiés par *Mathesis* depuis 1923 et relatifs aux cubiques en cause:

1923. Question 2119 (Bresson); note de M. Bioche (p. 241) signalée par M. Hacken;
R. Goormaghtigh, *Sur l'orthopôle et sur un théorème de* Morley, pp. 257 et 300.

1924. Cl. Servais, *Sur la cubique de* Thomson, p. 145;
Question 2275 (Goormaghtigh);
R. Deaux, *Sur quelques lieux relatifs aux coniques de* Thomson, p. 220;
R. Deaux, *Sur les cubiques de* Darboux et de Lucas, pp. 395, 430;
J. Neuberg, *Sur les cubiques de* Darboux, *de* Lemoine *et de* Thomson dans le supplément de février.

1925. Barbalatt, *Transformations déduites de la construction de couples de points sur les côtés d'un triangle*, p. 449.

1926. Question 2370 (Micu Grünbaum);
R. Deaux, *Sur le lieu du centre du cercle circonscrit à un triangle podaire bilogique*, p. 393.

1927. R. Deaux, *Sur les coniques de* Thomson, p. 105; question 2411 (Lemoine); R. Goormaghtigh, *Sur un théorème relatif au triangle*, p. 444.

1928. R. Goormaghtigh, *Sur les théorèmes de* Kiepert *et de* Kariya, p. 53, et question 2527.

1929. Résolution de la question 2260 (P. de Lépiney).

Mons, 17 septembre 1929.

R. Deaux, *Professeur à l'Ecole des Mines.*

---

[1] On peut rapprocher cette citation de la remarque faite plus loin, dans la Bibliographie (p. 341), à la fin de l'analyse concernant le fascicule T. Nagell.

A. B.