

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 27 (1928)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EQUIVALENCES DE FORMES ET D'ÉQUATIONS
DIFFÉRENTIELLES PAR LES TRANSFORMATIONS A VARIABLES
SÉPARÉES
Autor: Delens, P. C.
Kapitel: Deux équations de Pfaff.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-21879>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

faciles à former. Bornons-nous au cas des équations de Pfaff équivalentes (Σ_i) ; en posant $\sqrt{-1} = i$, et suivant une même détermination, on trouve

$$c_i = -\bar{c}, \quad g_i = \bar{g} + i\pi, \quad h_i = \bar{h} + i\frac{\pi}{2}, \quad k_i = \bar{k} + i\frac{\pi}{2}, \quad \alpha_i^* = -i\bar{\beta}^*, \quad \beta_i^* = -i\bar{\alpha}^*,$$

etc.

Les équations $\omega = 0$, $\omega_i = 0$, équivalentes (Σ_i) , correspondent donc aux relations

$$\alpha_i^* = -i\beta^*, \quad \beta_i^* = -i\alpha^*, \quad \omega_i^* = -\psi^*, \quad \gamma_i^* = -\gamma^*, \quad \psi_i^* = -\omega^*, \text{ etc.}, \quad (59)$$

et dans le cas général (α^* et β^* fonctions indépendantes de u, v) les conditions écrites sont suffisantes. On voit aussi que, dans ce cas, deux équations de Pfaff ne peuvent être simultanément équivalentes (Σ) et (Σ_i) : il faudrait en effet $\alpha^* = \beta^* = 0$, et on retombe alors sur le cas $c_{11} = 0$, où la chose est possible.

Les conditions d'équivalence (Σ_g) comportent le choix entre les équivalences (Σ) et (Σ_i) ; avec $\varepsilon = \pm 1$, on peut les écrire, pour deux formes ω et ω_g

$$\begin{cases} \alpha_g^* + i\beta_g^* = \alpha^* + \varepsilon i\beta^* & \beta_g^* + i\alpha_g^* = \beta^* + \varepsilon i\alpha^* \\ \omega_g^* + \psi_g^* = \varepsilon(\omega^* + \psi^*) & \omega_g^* - \psi_g^* = \omega^* - \psi^* & \gamma_g^* = \varepsilon\gamma^*, \text{ etc.} \end{cases} \quad (60)$$

DEUX ÉQUATIONS DE PFAFF.

25. — Soit à conserver, par les transformations Σ , l'ensemble des deux équations

$$\omega_1 = 0 \quad \omega_2 = 0 \quad (61)$$

les notations étant celles du n° 14. Ici encore, on peut assurer d'abord la conservation d'une des équations $\omega_1 = 0$, puis lui rattacher celle de l'autre $\omega_2 = 0$; on part alors, dans le cas général, des conditions

$$\delta c_1 = \xi' - \eta' \quad \delta(c_1 - c_2) = 0$$

On prévoit $n(n+1)$ invariants distincts jusqu'à l'ordre n , et en général $2n$ nouveaux invariants d'ordre n ; mais jusqu'à l'ordre n , il y a $(n+1)(n-2)$ invariants propres des deux

équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, donc on trouverait en outre $2(n+1)$ invariants mixtes pour ces deux équations. Et pour l'ordre $n > 2$, $2(n-1)$ invariants étant fournis séparément par les équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, on doit trouver deux nouveaux invariants. En fait, les choses ne se passent pas aussi régulièrement dès le début.

Il est préférable de traiter plus symétriquement le système (61), ce qui permet en particulier d'obtenir des formes normées plus simples pour les expressions de Pfaff; mais nous ne traiterons pas directement ce système, devant retrouver un système analogue dans le problème suivant, relatif à la conservation d'une équation quadratique.

CONSERVATION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE.

26. — Soit l'équation quadratique

$$\chi \equiv L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = 0 \quad (62)$$

qui sera conservée moyennant les conditions

$$\frac{\delta L - 2L\xi'}{L} = \frac{\delta M - M(\xi' + \eta')}{M} = \frac{\delta N - 2N\eta'}{N} \quad (63)$$

Dans le cas général $L \neq 0$, $M \neq 0$, $N \neq 0$, on pose

$$L = e^{2l} \quad M = e^m \quad N = e^{2n}$$

Comme nous venons de l'indiquer au cas précédent, $n(n+1)$ invariants distincts sont à prévoir jusqu'à l'ordre n , et $2n$ nouveaux pour cet ordre. Mais en posant

$$\mu = e^{2(m-l-n)} = \frac{M^2}{LN} \quad (64)$$

$$P = \frac{L}{N} = e^{2p} \quad p = l - n$$

on voit aussitôt que μ est un invariant d'ordre zéro; en effet, tout invariant de la forme χ , qui ne dépend que du rapport des coefficients de cette forme, est aussi invariant de l'équation $\chi = 0$. Les équations à écrire sont

$$\delta\mu = 0 \quad \delta p = \xi' - \eta' \quad [V, 0]$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \delta p_{10} = p_{10}\xi' + \xi'' & \delta p_{01} = p_{01}\eta' - \eta'' \\ \delta \mu_{10} = \mu_{10}\xi' & \delta \mu_{01} = \mu_{01}\eta' \end{array} \right. \quad [V, 1]$$