Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 27 (1928)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EQUIVALENCES DE FORMES ET D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES PAR LES TRANSFORMATIONS A VARIABLES SÉPARÉES

Autor: Delens, P. C.

Kapitel: Deux équations de Pfaff.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21879

faciles à former. Bornons-nous au cas des équations de Pfaff équivalentes (Σ_i); en posant $\sqrt{-1} = i$, et suivant une même détermination, on trouve

$$c_i = -\bar{c}\,, \quad g_i = \bar{g} + i\pi\,, \quad h_i = \bar{k} + i\frac{\pi}{2}\,, \quad k_i = \bar{h} + i\frac{\pi}{2}\,, \quad \alpha_i^* = -i\bar{\beta}^*\,, \quad \beta_i^* = -i\bar{\alpha}^*\,,$$

etc.

Les équations $\varpi = 0$, $\varpi_i = 0$, équivalentes (Σ_i), correspondent donc aux relations

$$\alpha_i^* = -i\beta^*\,, \quad \beta_i^* = -i\alpha^*\,, \quad \omega_i^* = -\psi^*\,, \quad \gamma_i^* = -\gamma^*\,, \quad \psi_i^* = -\omega^*\,, \text{ etc.,} \tag{59}$$

et dans le cas général (α^* et β^* fonctions indépendantes de u, v) les conditions écrites sont suffisantes. On voit aussi que, dans ce cas, deux équations de Pfaff ne peuvent être simultanément équivalentes (Σ) et (Σ_i): il faudrait en effet $\alpha^* = \beta^* = 0$, et on retombe alors sur le cas $c_{11} = 0$, où la chose est possible.

Les conditions d'équivalence (Σ_g) comportent le choix entre les équivalences (Σ) et (Σ_i); avec $\varepsilon = \pm 1$, on peut les écrire, pour deux formes ϖ et ϖ_g

$$\left\{\begin{array}{lll} \alpha_g^* + i\beta_g^* = \alpha^* + \varepsilon i\beta^* & \beta_g^* + i\alpha_g^* = \beta^* + \varepsilon i\alpha^* & \\ \omega_g^* + \psi_g^* = \varepsilon(\omega^* + \psi^*) & \omega_g^* - \psi_g^* = \omega^* - \psi^* & \gamma_g^* = \varepsilon\gamma^*\,, \text{ etc.} \end{array}\right. \tag{60}$$

DEUX ÉQUATIONS DE PFAFF.

25. — Soit à conserver, par les transformations Σ, l'ensemble des deux équations

$$\varpi_1 = 0 \qquad \varpi_2 = 0 \tag{61}$$

les notations étant celles du n° 14. Ici encore, on peut assurer d'abord la conservation d'une des équations $\varpi_1 = 0$, puis lui rattacher celle de l'autre $\varpi_2 = 0$; on part alors, dans le cas général, des conditions

$$\delta c_1 = \xi' - \eta' \qquad \delta(c_1 - c_2) = 0$$

On prévoit $n(n+1)$ invariants distincts jusqu'à l'ordre n, et en général $2n$ nouveaux invariants d'ordre n; mais jusqu'à l'ordre n, il y a $(n+1)(n-2)$ invariants propres des deux équations $\varpi_1 = 0$, $\varpi_2 = 0$, donc on trouverait en outre $2(n+1)$ invariants mixtes pour ces deux équations. Et pour l'ordre $n > 2$, $2(n-1)$ invariants étant fournis séparément par les équations $\varpi_1 = 0$, $\varpi_2 = 0$, on doit trouver deux nouveaux invariants. En fait, les choses ne se passent pas aussi régulièrement dès le début.

Il est préférable de traiter plus symétriquement le système (61), ce qui permet en particulier d'obtenir des formes normées plus simples pour les expressions de Pfaff; mais nous ne traiterons pas directement ce système, devant retrouver un système analogue dans le problème suivant, relatif à la conservation d'une équation quadratique.

Conservation d'une équation quadratique.

26. — Soit l'équation quadratique

$$\chi \equiv \mathrm{L}\,du^2 + 2\mathrm{M}\,du\,dv + \mathrm{N}\,dv^2 = 0 \tag{62}$$

qui sera conservée moyennant les conditions

$$\frac{\delta \mathrm{L} - 2\mathrm{L}\xi'}{\mathrm{L}} = \frac{\delta \mathrm{M} - \mathrm{M}(\xi' + \eta')}{\mathrm{M}} = \frac{\delta \mathrm{N} - 2\mathrm{N}\eta'}{\mathrm{N}} \tag{63}$$

Dans le cas général $\mathrm{L} \neq 0$, $\mathrm{M} \neq 0$, $\mathrm{N} \neq 0$, on pose

$$\mathrm{L} = e^{2l} \qquad \mathrm{M} = e^{m} \qquad \mathrm{N} = e^{2n}$$

Comme nous venons de l'indiquer au cas précédent, $n(n+1)$ invariants distincts sont à prévoir jusqu'à l'ordre n, et $2n$ nouveaux pour cet ordre. Mais en posant

$$\mu = e^{2(m-l-n)} = \frac{\mathrm{M}^2}{\mathrm{LN}} \tag{64}$$

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{N}} = e^{2p} \qquad p = l - n$$

on voit aussitôt que μ *est un invariant d'ordre zéro;* en effet, tout invariant de la forme χ, qui ne dépend que du rapport des coefficients de cette forme, est aussi invariant de l'équation $\chi = 0$. Les équations à écrire sont

$$\delta\mu = 0 \qquad \delta p = \xi' - \eta' \tag{[V, 0]}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\delta p_{10} = p_{10}\xi' + \xi'' && \delta p_{01} = p_{01}\eta' - \eta'' \\ &\delta \mu_{10} = \mu_{10}\xi' && \delta\mu_{01} = \mu_{01}\eta' \end{aligned}\right. \tag{[V, 1]}$$