c'est-à-dire par des *conditions moins nombreuses et d'ordre moins élevé* qu'au n° 14; cet exemple montre l'intérêt qu'il y a, dans chaque cas, à reprendre la discussion sur les données particulières au problème proposé.

Une forme quadratique.

16. — Imposons-nous maintenant la conservation de la forme

$$\chi \equiv \mathrm{L}du^2 + 2\mathrm{M}du\,dv + \mathrm{N}dv^2 \tag{26}$$

Nous indiquerons seulement les grandes lignes de la méthode, sans discuter les cas particuliers. Les coefficients L, M, N sont astreints aux variations

$$\delta\mathrm{L} = 2\mathrm{L}\xi' \qquad \delta\mathrm{M} = \mathrm{M}(\xi' + \eta') \qquad \delta\mathrm{N} = 2\mathrm{N}\eta' \tag{27}$$

Il y a à prévoir $\frac{(n+1)(3n+2)}{2}$ invariants jusqu'à l'ordre n, dont $3n + 1$ nouveaux pour cet ordre. On reconnaît en L, M, N des invariants relatifs: L et N sont (Σ_1) et (Σ_2) de poids (-2), M est (Σ) de poids (-1); si les équations $\mathrm{L} = 0$, $\mathrm{M} = 0$, $\mathrm{N} = 0$, ne sont pas satisfaites, ils fourniront l'invariant d'ordre zéro. En posant

$$\mathrm{L} = e^{2l} \qquad \mathrm{M} = e^{m} \qquad \mathrm{N} = e^{2n}$$

$$\delta l = \xi' \qquad \delta m = \xi' + \eta' \qquad \delta n = \eta' \qquad [\mathrm{III},\ 0]$$

nous prendrons pour invariant d'ordre zéro

$$\mu = e^{2(m-l-n)} = \frac{\mathrm{M}^2}{\mathrm{LN}} \tag{28}$$

et substituerons à la seconde équation [III, 0]

$$\delta\mu = 0 \qquad [\mathrm{III},\ 0']$$

Dès ce moment, les équations dérivées fourniront régulièrement les invariants

$$\left\{\begin{array}{ll} \delta l_{10} = l_{10}\xi' + \xi'' & \delta n_{01} = n_{01}\eta' + \eta'' \\ \delta n_{10} = n_{10}\xi' & \delta l_{01} = l_{01}\eta' \\ \delta\mu_{10} = \mu_{10}\xi' & \delta\mu_{01} = \mu_{01}\eta' \end{array}\right. \qquad [\mathrm{III},\ 1]$$

donnant pour le premier ordre

$$\lambda = n_{10}\, e^{-l} \qquad \nu = l_{01}\, e^{-n} \qquad \rho = \mu_{10}\, e^{-l} \qquad \sigma = \mu_{01}\, e^{-n} \tag{29}$$

et mettant en évidence les paramètres différentiels [1]

$$\vartheta_u f = f_{10}\, e^{-l} \qquad \vartheta_v f = f_{01}\, e^{-n} \tag{30}$$

$$\lambda = \vartheta_u n \qquad \nu = \vartheta_v l \qquad \rho = \vartheta_u \mu \qquad \sigma = \vartheta_v \mu$$

Pour continuer, on substituerait aux quatre dernières équations [III, 1]

$$\delta\lambda = 0 \qquad \delta\nu = 0 \qquad \delta\rho = 0 \qquad \delta\sigma = 0 \qquad [III, 1']$$

et on tiendrait compte des relations introduites par

$$\begin{aligned} (\vartheta_u \vartheta_v) f &= \nu \vartheta_u f - \lambda \vartheta_v f \\ (\vartheta_u \vartheta_v) \mu &= \nu\rho - \lambda\sigma \end{aligned} \tag{31}$$

On pourra encore introduire le paramètre différentiel du second ordre

$$\vartheta_{uv} f = f_{11}\, e^{-(l+n)}. \tag{32}$$

et prendre pour invariants distincts d'ordre 2

$$\vartheta_u \lambda\,,\ \vartheta_v \lambda\,,\ \vartheta_u \nu\,,\ \vartheta_v \nu\,,\ \vartheta_u \rho = \vartheta_u^2 \mu\,,\ \vartheta_v \sigma = \vartheta_v^2 \mu\,.\ \vartheta_{uv} \mu\,.$$

Les invariants μ, λ, ν sont essentiels; dans le cas général, des invariants suffisants seront donnés par $\mu, \lambda, \nu, \vartheta_u \lambda, \vartheta_v \lambda, \vartheta_u \nu, \vartheta_v \nu$.

17. — Un cas particulier intéressant, celui des formes χ_0, pour lesquelles L = N = 0, a été étudiée complétement par M. A. Tresse (*loc. cit.*, p. 54); en procédant un peu différemment, nous introduirions, après les invariants d'ordres 2 et 3: $\varkappa = m_{11}\, e^{-m}$ $\iota = \varkappa_{10}\, \varkappa_{01}\, e^{-m}$, les deux paramètres différentiels $\frac{f_{10}}{\varkappa_{10}}$ et $\frac{f_{01}}{\varkappa_{01}}$; d'où les invariants d'ordre 4: $\frac{\iota_{10}}{\varkappa_{10}}$, $\frac{\iota_{01}}{\varkappa_{01}}$, $\frac{\varkappa_{11}}{\varkappa_{10}\, \varkappa_{01}}$, etc.

Il reste à indiquer comment les invariants d'une forme qua-

---

[1] Nous avons, dans les divers cas étudiés, conservé la même notation pour les paramètres différentiels $\vartheta_u f$, $\vartheta_v f$, sans que ces expressions soient les mêmes dans ces différents cas.

dratique χ peuvent être reliés à ceux de formes linéaires. On peut, en effet, écrire, avec les notations des nos 14 et 15

$$\chi \equiv \varpi_1 \varpi_2 \equiv \varpi^2 + \chi_0 \qquad \chi_0 \equiv 2 M_0 \, du \, dv \tag{33}$$

mais si la conservation du système de formes ϖ_1, ϖ_2, entraîne celle de χ, l'inverse n'a pas lieu; par suite, les invariants de χ sont des invariants du système ϖ_1, ϖ_2, la réciproque n'étant généralement pas vraie. On vérifiera ainsi les relations

$$\mu = \frac{(\varepsilon + \zeta)^2}{4\,\varepsilon\zeta} \qquad \text{(notations du n}^\circ\text{ 14)}$$

$l = a$, $n = b$, donc $\lambda = \alpha$, $\nu = \beta$ (notations du n° 15), etc.

On peut d'ailleurs profiter de l'arbitraire de la décomposition $\chi \equiv \varpi_1 \varpi_2$ pour imposer aux formes linéaires ϖ_1 et ϖ_2 une relation invariante assurant l'identité des systèmes d'invariants de χ d'une part, ϖ_1 et ϖ_2 d'autre part, en *normant* convenablement ces dernières formes sans porter atteinte à la généralité de χ, ce qui est du reste possible de différentes façons, par exemple avec $\varepsilon + \zeta = 1$, ou $\varepsilon\zeta = 1$. On est ainsi ramené à l'étude d'un système *particulier* de formes linéaires.

En utilisant au contraire la relation $\chi \equiv \varpi^2 + \chi_0$ (où il y a seulement deux choix possibles pour la forme χ_0), on se ramène à l'étude d'un système formé par une forme ϖ générale et une forme quadratique particulière χ_0.

Cas d'une équation de Pfaff.

18. — Soit seulement à conserver l'*équation*

$$\varpi \equiv A(u, v)\, du + B(u, v)\, dv = 0 \tag{34}$$

ce qui astreint les coefficients à la condition

$$\frac{\delta A - A\xi'}{A} = \frac{\delta B - B\eta'}{B} \,. \tag{35}$$

Ecartons d'abord les équations invariantes $A = 0$, $B = 0$, et posons

$$A = e^a \qquad B = e^b \qquad C = \frac{A}{B} = e^c \qquad a - b = c$$