

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	27 (1928)
<b>Heft:</b>	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 <b>Artikel:</b>	 EQUIVALENCES DE FORMES ET D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES PAR LES TRANSFORMATIONS A VARIABLES SÉPARÉES
<b>Autor:</b>	Delens, P. C.
<b>Kapitel:</b>	Cas de deux formes de Pfaff.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-21879">https://doi.org/10.5169/seals-21879</a>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## CAS DE DEUX FORMES DE PFAFF.

14. — Soient les deux formes de Pfaff

$$\varpi_1 \equiv A_1 du + B_1 dv \quad \varpi_2 \equiv A_2 du + B_2 dv \quad (24)$$

à conserver simultanément; nous nous en tiendrons au cas général<sup>1</sup>. Avec des notations analogues à celles du n° 6, on partira des conditions

$$\begin{cases} \delta a_1 = \xi' & \delta b_1 = \eta' \\ \delta a_2 = \xi' & \delta b_2 = \eta' \end{cases} \quad (25)$$

et l'on pourra prévoir  $2(n + 1)^2$  invariants jusqu'à l'ordre  $n$ , et  $2(2n + 1)$  de cet ordre. Un premier procédé consistera à remplacer les équations (25) par

$$\begin{cases} \delta(a_1 - a_2) = 0 & \delta(b_1 - b_2) = 0 \\ \delta a_1 = \xi' & \delta b_1 = \eta' \end{cases} \quad [II, 0]$$

d'où les deux invariants d'ordre zéro

$$\varepsilon = e^{a_1 - a_2} \quad \zeta = e^{b_1 - b_2}$$

puis, par différentiation

$$\begin{cases} \delta a_{1,10} = a_{1,10} \xi' + \xi'' & \delta b_{1,01} = b_{1,01} \eta' + \eta'' \\ \delta b_{1,10} = b_{1,10} \xi' & \delta a_{1,01} = a_{1,01} \eta' \\ \delta \varepsilon_{10} = \varepsilon_{10} \xi' & \delta \varepsilon_{01} = \varepsilon_{01} \eta' \\ \delta \zeta_{10} = \zeta_{10} \xi' & \delta \zeta_{01} = \zeta_{01} \eta' \end{cases} \quad [II, 1]$$

donnant les invariants du premier ordre

$$\alpha_1 = b_{1,10} e^{-a_1} \quad \beta_1 = a_{1,01} e^{-b_1} \quad \varepsilon_{10} e^{-a_1}, \quad \zeta_{10} e^{-a_1}, \quad \varepsilon_{01} e^{-b_1}, \quad \zeta_{01} e^{-b_1}$$

par l'emploi des paramètres différentiels  $f_{10} e^{-a_1}$  et  $f_{01} e^{-b_1}$ , qui permettent de continuer les calculs comme précédemment à partir des invariants essentiels  $\varepsilon, \zeta, \alpha, \beta$ . Nous retrouverons ainsi

<sup>1</sup> Le cas particulier  $B_1 = 0, A_2 = 0$  se ramène, comme il a été indiqué au n° 13, à celui d'une seule forme générale  $\varpi$ .

les invariants  $\alpha_1, \beta_1, \omega_1, \theta_1, \varphi_1, \psi_1, \dots$  de la forme  $\varpi_1$ , puis, à côté d'eux, la suite d'invariants analogues  $\alpha_2, \beta_2, \omega_2, \dots$  de  $\varpi_2$ ; en effet, l'on a par exemple

$$e^{-a_2} = \varepsilon e^{-a_1} \quad b_2 = b_1 - \log \zeta \quad b_{2,10} = b_{1,10} - \frac{\zeta_{10}}{\zeta}$$

$$\alpha_2 = b_{2,10} e^{-a_2} = \varepsilon \left( \alpha_1 - \frac{\zeta_{10}}{\zeta} e^{-a_1} \right)$$

En outre, il restera une suite d'invariants mixtes entre les deux formes  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$ , en nombre  $2(n + 1)$  jusqu'à l'ordre  $n$ , commençant par

$$\varepsilon \quad \zeta \quad \varepsilon_{10} e^{-\frac{a_1+a_2}{2}} \quad \zeta_{01} e^{-\frac{b_1+b_2}{2}} \dots$$

Les conditions suffisantes d'équivalence seraient celles relatives à  $\varpi_1$ , auxquelles on ajouterait les conditions  $\delta \varepsilon = \delta \zeta = 0$ .

15. — Un procédé un peu plus symétrique consisterait à poser

$$\frac{a_1 + a_2}{2} = a \quad \frac{b_1 + b_2}{2} = b \quad \frac{a_1 - a_2}{2} = \tilde{a} \quad \frac{b_1 - b_2}{2} = \tilde{b}$$

et écrire les équations (25) sous la forme

$$\begin{cases} \delta \tilde{a} = 0 & \delta \tilde{b} = 0 \\ \delta a = \xi' & \delta b = \eta' \end{cases} \quad [\text{II}', 0]$$

Après les invariants d'ordre zéro,  $\tilde{a}$  et  $\tilde{b}$ , on trouverait ainsi pour le premier ordre

$$\alpha = b_{10} e^{-a} \quad \beta = a_{01} e^{-b} \quad \tilde{a}_{10} e^{-a}, \tilde{b}_{10} e^{-a}, \tilde{a}_{01} e^{-b}, \tilde{b}_{01} e^{-b}$$

et l'on continuerait de même, les paramètres différentiels se rapportant à une forme  $\varpi \equiv \sqrt{A_1 A_2} du + \sqrt{B_1 B_2} dv$ , qui n'est pas du faisceau linéaire de  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$ ; on remarquera aussi l'introduction d'invariants irrationnels.

Les invariants essentiels sont  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{b}$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ; quant aux *conditions suffisantes d'équivalence*, elles se présentent ici sous une forme plus simple que précédemment, étant données par

$$\delta \tilde{a} = \delta \tilde{b} = \delta(\tilde{a}_{10} e^{-a}) = \delta(\tilde{b}_{10} e^{-a}) = \delta(\tilde{a}_{01} e^{-b}) = \delta(\tilde{b}_{01} e^{-b}) = 0$$

c'est-à-dire par des *conditions moins nombreuses et d'ordre moins élevé* qu'au n° 14; cet exemple montre l'intérêt qu'il y a, dans chaque cas, à reprendre la discussion sur les données particulières au problème proposé.

### UNE FORME QUADRATIQUE.

16. — Imposons-nous maintenant la conservation de la forme

$$\chi \equiv L du^2 + 2M du dv + N dv^2 \quad (26)$$

Nous indiquerons seulement les grandes lignes de la méthode, sans discuter les cas particuliers. Les coefficients  $L$ ,  $M$ ,  $N$  sont astreints aux variations

$$\delta L = 2L\xi' \quad \delta M = M(\xi' + \eta') \quad \delta N = 2N\eta' \quad (27)$$

Il y a à prévoir  $\frac{(n+1)(3n+2)}{2}$  invariants jusqu'à l'ordre  $n$ , dont  $3n+1$  nouveaux pour cet ordre. On reconnaît en  $L$ ,  $M$ ,  $N$  des invariants relatifs:  $L$  et  $N$  sont  $(\Sigma_1)$  et  $(\Sigma_2)$  de poids  $(-2)$ ,  $M$  est  $(\Sigma)$  de poids  $(-1)$ ; si les équations  $L = 0$ ,  $M = 0$ ,  $N = 0$ , ne sont pas satisfaites, ils fourniront l'invariant d'ordre zéro. En posant

$$\begin{aligned} L &= e^{2l} & M &= e^m & N &= e^{2n} \\ \delta l &= \xi' & \delta m &= \xi' + \eta' & \delta n &= \eta' \end{aligned} \quad [\text{III}, 0]$$

nous prendrons pour invariant d'ordre zéro

$$\mu = e^{2(m-l-n)} = \frac{M^2}{LN} \quad (28)$$

et substituerons à la seconde équation [III, 0]

$$\delta \mu = 0 \quad [\text{III}, 0']$$

Dès ce moment, les équations dérivées fourniront régulièrement les invariants

$$\left\{ \begin{array}{ll} \delta l_{10} = l_{10}\xi' + \xi'' & \delta n_{01} = n_{01}\eta' + \eta'' \\ \delta n_{10} = n_{10}\xi' & \delta l_{01} = l_{01}\eta' \\ \delta \mu_{10} = \mu_{10}\xi' & \delta \mu_{01} = \mu_{01}\eta' \end{array} \right. \quad [\text{III}, 1]$$