

|                     |  |
|---------------------|--|
| <b>Zeitschrift:</b> | L'Enseignement Mathématique  |
| <b>Herausgeber:</b> | Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique   |
| <b>Band:</b>        | 27 (1928)  |
| <b>Heft:</b>        | 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE   |
| <b>Artikel:</b>     | EQUIVALENCES DE FORMES ET D'ÉQUATIONS<br>DIFFÉRENTIELLES PAR LES TRANSFORMATIONS A VARIABLES<br>SÉPARÉES |
| <b>Autor:</b>       | Delens, P. C.  |
| <b>DOI:</b>         | <a href="https://doi.org/10.5169/seals-21879">https://doi.org/10.5169/seals-21879</a>                    |

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 11.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

EQUIVALENCES DE FORMES ET D'ÉQUATIONS  
DIFFÉRENTIELLES  
PAR LES TRANSFORMATIONS A VARIABLES SÉPARÉES

PAR

P. C. DELENS (Le Havre)

INTRODUCTION.

1. — Nous avons, dans un précédent numéro de cette revue<sup>1</sup>, posé la question de la classification des familles de courbes sur les surfaces, ou des équations différentielles qui les représentent, vis-à-vis des transformations conformes. C'est là un problème de représentation conforme qui peut se traiter en mettant en évidence les paramètres des lignes minima  $du = 0$ ,  $d\nu = 0$ , par suite un problème d'équivalence vis-à-vis des transformations à variables séparées

$$\bar{u} = U(u) \quad \bar{\nu} = V(\nu) . \quad (\Sigma)$$

Mais il nous a paru nécessaire de considérer d'abord ce problème d'équivalence du point de vue purement analytique et d'étudier la conservation de certaines formes et équations différentielles par ces transformations  $\Sigma$ ; c'est l'objet de la présente étude, les applications géométriques étant réservées pour un Mémoire ultérieur; nous avons cependant particulièrement insisté sur les points qui semblaient présenter le plus d'intérêt en vue de ces applications.

Les formes et équations différentielles que nous avons considérées sont du premier ordre, et nous nous sommes limité ici à

---

<sup>1</sup> *Trajectoires orthogonales et ombilics*, E. M., 25<sup>me</sup> année, 1926, p. 120; Note publiée à l'occasion d'un article antérieur de M. WINANTS.

des formes et équations de Pfaff, ou de Monge quadratiques. Nous avons envisagé, pour un certain nombre de cas, généraux ou particuliers, la formation des invariants ( $\Sigma$ ) et les conditions d'équivalence.

Pour une forme de Pfaff  $\varpi$  (n<sup>o</sup>s 6 et suivants), nous avons formé deux invariants *essentiels* du premier ordre, et deux opérateurs différentiels donnant régulièrement les invariants distincts des ordres supérieurs; la méthode employée est généralement celle de Lie et des paramètres différentiels, et nous avons, dans toute notre étude, largement fait appel aux travaux et aux résultats de M. A. TRESSE<sup>1</sup>; mais la méthode d'identification directe est aussi utilisée et comparée aux autres.

A côté de la méthode connue de recherches des conditions suffisantes d'équivalence, au moyen d'un nombre limité d'invariants — que nous appelons *suffisants* — nous avons montré que la méthode des transformations infinitésimales pouvait aussi être employée et permettait de prévoir, dans le cas général tout au moins, le nombre de ces invariants suffisants; ceux-ci sont au nombre de six pour une forme  $\varpi$  générale.

Ce premier cas devant servir de base aux exemples suivants, nous avons traité les cas particuliers s'y rattachant, et mis en évidence à son sujet les procédés de formation des invariants ou comitants, absolus ou relatifs.

Au n<sup>o</sup> 14 est traité rapidement le cas de deux formes de Pfaff  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$ , à conserver simultanément, lien entre le cas précédent et celui où l'on considère une forme quadratique  $\chi$ ; ici aussi (n<sup>o</sup>s 16 et suivants), nous ne traitons guère que le cas général.

2. — S'il s'agit de la conservation des équations différentielles, on voit l'importance d'une nouvelle sorte d'invariants relatifs, les invariants *brisés*, et l'on reconnaît que la conservation des équations peut se ramener à celle de formes normées par des facteurs convenables.

On retrouve ainsi les invariants d'une équation de Pfaff  $\varpi = 0$  (n<sup>o</sup>s 18 et suivants) comme ceux d'une forme dite *normale*  $\varpi^*$ , dont deux invariants sont liés par une relation simple; le choix

---

<sup>1</sup> Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations. Thèse (1893).

du facteur normant laisse d'ailleurs un certain arbitraire, et l'on est amené à normer de façons différentes la forme  $\varpi$  d'une équation  $\varpi = 0$  dans les divers problèmes où cette forme intervient.

La conservation simultanée de deux équations  $\varpi_1 = 0$ ,  $\varpi_2 = 0$  est équivalente — au point de vue des transformations infinitésimales — à celle d'une équation quadratique  $\chi = 0$ ; ces deux cas sont traités à partir du n° 25, et à la forme quadratique  $\chi$  correspond encore un facteur normant convenable pour ce cas.

Un cas particulier est enfin indiqué (n° 29), celui où l'on veut conserver une équation  $\varpi = 0$  et une forme quadratique  $\chi_0 = 2M_0 du dv$ , cas intéressant pour les applications géométriques et la simplicité des invariants qu'il met en évidence. C'est aussi en vue des applications géométriques que nous avons montré qu'au problème des équivalences  $(\Sigma)$  pouvait se ramener celui d'équivalences pour les transformations où le rôle des variables  $u$  et  $v$  serait échangé.

#### PRÉLIMINAIRES ET NOTATIONS.

3. — Les problèmes d'équivalence qui vont suivre se rapportent à des formes ou des équations différentielles, respectivement en  $u$ ,  $v$  et  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ , vis-à-vis de certains changements de variables. A côté des transformations générales  $\Pi$ , données par les formules

$$\bar{u} = U(u, v) \quad \bar{v} = V(u, v) \quad (\Pi)$$

nous considérerons les transformations à variables séparées

$$\bar{u} = U(u) \quad \bar{v} = V(v) \quad (\Sigma)$$

et quand rien d'autre ne sera précisé, les équivalences et les invariants se rapporteront à ces transformations  $\Sigma$ , qui forment un groupe (continu et infini); les transformations  $\Sigma$  sont des produits  $\Sigma_1 \Sigma_2$  ou  $\Sigma_2 \Sigma_1$  de transformations particulières

$$\bar{u} = U(u) \quad \bar{v} = v \quad (\Sigma_1)$$

$$\bar{u} = u \quad \bar{v} = V(v). \quad (\Sigma_2)$$

Nous dirons un mot du problème d'équivalence pour les transformations  $\Sigma_i$

$$\bar{u} = U(v) \quad \bar{v} = V(u) \quad (\Sigma_i)$$

mais celles-ci ne forment pas un groupe quand les variables de même nom ( $u, \bar{u}, \dots; v, \bar{v}, \dots$ ) jouent un rôle analogue. Cependant ces transformations  $\Sigma_i$  forment avec les transformations  $\Sigma$  un groupe mixte de transformations  $\Sigma_g$ , dont nous parlerons aussi. On pourrait faire pour les transformations  $\Sigma_i$  une décomposition analogue à celle faite pour les transformations  $\Sigma$ , mais nous déduirons les résultats relatifs aux premières de ceux obtenus pour les autres par une modification de notations, échangeant le rôle des variables  $u, v$ , et qui revient à l'emploi de la transformation  $\Sigma_i$  particulière

$$\bar{u} = v \quad \bar{v} = u . \quad (\Sigma_0)$$

Quand des équations différentielles seront équivalentes pour certaines des transformations précédentes, cette équivalence pourra être étendue à leurs intégrales. Nous supposerons analytiques quand il en sera besoin, et tout au moins pourvues des dérivées nécessaires dans les domaines de variation considérés, toutes les fonctions employées, vis-à-vis de toutes les variables dont elles dépendent.

4. — Pour abréger l'écriture, nous poserons

$$f_{ij} = \frac{\partial^{i+j} f}{\partial u^i \partial v^j} \quad \bar{f}_{(ij)} = \frac{\partial^{i+j} \bar{f}}{\partial \bar{u}^i \partial \bar{v}^j}$$

pour les fonctions  $f$  de  $u$  et  $v$ ,  $\bar{f}$  de  $\bar{u}$  et  $\bar{v}$  (les fonctions de ces dernières variables étant en général surlignées); quand il n'y aura pas d'ambiguïté à craindre, nous aurons recours aux accents pour indiquer les dérivées des fonctions d'une seule variable par rapport à celle-ci, ainsi

$$U' = \frac{dU(u)}{du} \quad V' = \frac{dV(v)}{dv} .$$

Quand nous utiliserons, suivant la méthode de Lie, la transformation infinitésimale d'un groupe, nous écrirons

$$\mathfrak{Z}u = -\xi(u, v) \cdot \mathfrak{Z}t \quad \mathfrak{Z}v = -\eta(u, v) \cdot \mathfrak{Z}t$$

$\delta t$  étant l'accroissement infinitésimal d'une variable indépendante  $t$ , puis nous poserons  $\delta = \frac{\delta}{\delta t}$ , d'où

$$\delta u = -\xi(u, v) = -\xi \quad \delta v = -\eta(u, v) = -\eta \quad (1)$$

et pour une fonction  $f$  de  $u, v$

$$\delta f = f_{10} \delta u + f_{01} \delta v = -f_{10} \xi - f_{01} \eta .$$

En prolongeant un groupe et sa transformation infinitésimale, on aura

$$\begin{aligned} \delta du &= d\delta u = -\xi_{10} du - \xi_{01} dv & \delta dv &= d\delta v = -\eta_{10} du - \eta_{01} dv \\ \delta(df - f_{10} du - f_{01} dv) &= 0 \end{aligned}$$

d'où, pour les dérivées partielles de  $f$

$$\delta f_{10} = f_{10} \xi_{10} + f_{01} \eta_{10} + \frac{d}{du} \delta f \quad \delta f_{01} = f_{10} \xi_{01} + f_{01} \eta_{01} + \frac{d}{dv} \delta f \quad (2)$$

Pour les transformations  $\Sigma$ , on aura

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(u) & \eta &= \eta(v) \\ \xi_{10} &= \xi' & \eta_{01} &= \eta' & \xi_{01} &= \eta_{10} = 0 \end{aligned} \quad (1')$$

et les formules (2) se réduiront à

$$\delta f_{10} = f_{10} \xi' + \frac{d}{du} \delta f \quad \delta f_{01} = f_{01} \eta' + \frac{d}{dv} \delta f . \quad (2')$$

5. — *Principe de la méthode de Lie.* — Partons des transformations  $\Sigma$ , c'est-à-dire des formules (1) et (1'), et prolongeons la transformation infinitésimale afin d'obtenir les variations des coefficients des formes ou des équations à conserver; nous obtenons ainsi  $k$  nouvelles équations qui, avec les deux équations (1), définissent le groupe prolongé opérant sur  $u, v$  et les coefficients en question, adjoints à ces variables. Les invariants à former sont les invariants différentiels du groupe précédent; jusqu'à un ordre  $n$  (inclus), ils sont définis comme fonctions de  $u, v$ , des coefficients adjoints et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre  $n$ , invariantes pour la transformation infinitésimale de ce groupe prolongé par différentiation jusqu'à l'ordre  $n$ ; les invariants distincts (c'est-à-dire fonctionnellement distincts par rapport à

toutes ces variables) sont les solutions indépendantes d'un système complet d'équations linéaires aux dérivées partielles. Ces équations, indépendantes dans le cas général, sont obtenues en annulant les coefficients des arbitraires  $\xi, \eta, \xi', \eta', \dots$  dans la variation  $\delta f$  d'une fonction de toutes les variables introduites (nous gardons le symbole  $\delta$  pour les transformations prolongées). Il ne sera pas nécessaire d'écrire les équations de ce système, mais seulement de connaître le nombre des solutions; en opérant sur les équations des caractéristiques du système, on sera ramené à former les combinaisons  $\delta f = 0$  par élimination de  $\xi, \eta, \xi', \eta', \dots$  entre les équations donnant les variations de  $u, v$ , des coefficients, et de leurs dérivées.

On remarque qu'en dehors des constantes, aucune fonction de  $u, v$  seuls n'est invariante; on pourra donc faire abstraction de  $u$  et  $v$  au nombre des variables indépendantes en ne comptant pas plus, dans la suite, les équations  $\frac{\delta f}{\delta u} = 0, \frac{\delta f}{\delta v} = 0$  à satisfaire par tout invariant; autrement dit, on n'utilisera pas directement les équations (1).

Dans ces conditions, on obtient en général, jusqu'à l'ordre  $n^1$ , un système de  $2(n+1)$  équations à  $k \frac{(n+1)(n+2)}{2}$  inconnues et ceci laisse prévoir l'existence de  $\frac{n+1}{2}[k(n+2)-4]$  invariants jusqu'à l'ordre  $n$  inclus, dont  $k(n+1)-2$  pour cet ordre.

Nous rencontrerons aussi des équations invariantes: dans une première étude, nous laisserons de côté tous les cas particuliers.

### CONSERVATION D'UNE FORME DE PFAFF.

6. — *Invariants et paramètres différentiels du cas général.* — Soit la forme de Pfaff

$$\varpi \equiv A(u, v)du + B(u, v)dv \quad (3)$$

à conserver par les transformations  $\Sigma$ ; il faudra

$$\begin{aligned} \delta \varpi &\equiv (\delta A - A\xi')du + (\delta B - B\eta')dv = 0 \\ \delta A &= A\xi' \quad \delta B = B\eta' \end{aligned} \quad (4)$$

---

<sup>1</sup> Comme il a été expliqué plus haut, l'ordre  $n$  que nous attribuons à un invariant est l'ordre de dérivation à partir des coefficients des formes ou équations différentielles qui interviennent (et nous ne traitons que des formes et équations du premier ordre).

soit 2 équations de condition pour les coefficients A, B. On prévoira donc  $n(n+1)$  invariants jusqu'à l'ordre  $n$ , et  $2n$  nouveaux pour cet ordre.

$A = 0, B = 0$ , sont des équations invariantes; dans le cas général,  $A \neq 0, B \neq 0$ , nous poserons

$$A = e^a \quad B = e^b$$

( $e$  étant la base des logarithmes népériens, désignés par le symbole  $\log$ ).

En partant, pour l'ordre zéro, de

$$\delta a = \xi' \quad \delta b = \eta' \quad [I, 0]$$

puis, utilisant les formules (2') pour les dérivées partielles, on obtient

$$\begin{cases} \delta a_{10} = a_{10}\xi' + \xi'' & \delta b_{01} = b_{01}\eta' + \eta'' \\ \delta b_{10} = b_{10}\xi' & \delta a_{01} = a_{01}\eta' \end{cases} \quad [I, 1]$$

d'où, si  $a_{01} \neq 0, b_{10} \neq 0$ , les deux invariants du premier ordre

$$\alpha = b_{10}e^{-a} \quad \beta = a_{01}e^{-b} \quad (5)$$

En modifiant la méthode de Lie par celle des paramètres différentiels de M. Tresse, nous introduirons les paramètres<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_u f &= f_{10}e^{-a} & \mathfrak{D}_v f &= f_{01}e^{-b} \\ \alpha &= \mathfrak{D}_u b & \beta &= \mathfrak{D}_v a \end{aligned} \quad (6)$$

Nous substituerons alors aux deux dernières équations [I, 1] les suivantes

$$\delta\alpha = 0 \quad \delta\beta = 0 \quad [I, 1']$$

utilisées à leur place dans les dérivations; le prolongement jusqu'au 2<sup>me</sup> ordre donne

$$\begin{cases} \delta a_{20} = 2a_{20}\xi' + a_{10}\xi'' + \xi''' & \delta b_{02} = 2b_{02}\eta' + b_{01}\eta'' + \eta''' \\ \delta\alpha_{10} = \alpha_{10}\xi' & \delta\alpha_{01} = \alpha_{01}\eta' \\ \delta\beta_{10} = \beta_{10}\xi' & \delta\beta_{01} = \beta_{01}\eta' \end{cases} \quad [I, 2]$$

<sup>1</sup> Nous définissons ici les opérateurs différentiels  $\mathfrak{D}_u$  et  $\mathfrak{D}_v$  appliqués à une fonction  $f$ , invariante ou non, et appelons paramètres différentiels de  $f$  les expressions  $\mathfrak{D}_u f$  et  $\mathfrak{D}_v f$ ; nous justifions au N° 13 qu'il y a bien là un procédé de formation d'invariants à partir d'un invariant  $f$  (ou de certaines autres expressions, comme  $a$  et  $b$ ).

d'où les quatre invariants distincts d'ordre deux

$$\begin{aligned}\omega &= \alpha_{10} e^{-a} & \theta &= \beta_{10} e^{-a} & \varphi &= \alpha_{01} e^{-b} & \psi &= \beta_{01} e^{-b} \\ \omega &= \mathfrak{D}_u \alpha = \mathfrak{D}_u^2 b & \theta &= \mathfrak{D}_u \beta = \mathfrak{D}_u \mathfrak{D}_v \alpha & \varphi &= \mathfrak{D}_v \alpha = \mathfrak{D}_v \mathfrak{D}_u b \\ \psi &= \mathfrak{D}_v \beta = \mathfrak{D}_v^2 a\end{aligned}\quad (7)$$

avec

$$\mathfrak{D}_i^2 = \mathfrak{D}_i \mathfrak{D}_i \quad (i = u, v).$$

7. — Pour le troisième ordre, nous substituerons aux quatre dernières équations [I, 2] les équations

$$\mathfrak{D}\omega = 0 \quad \mathfrak{D}\theta = 0 \quad \mathfrak{D}\varphi = 0 \quad \mathfrak{D}\psi = 0 \quad [\text{I}, 2']$$

mais alors les dérivations donneront 10 équations au lieu de 8; le système complet obtenu aurait 8 équations à 22 inconnues au lieu des 8 équations à 20 inconnues devant fournir 12 invariants, dont 6 nouveaux; les 8 nouveaux invariants ainsi formés comme paramètres différentiels des précédents ne sont plus distincts, les paramètres d'ordre supérieur étant liés par les relations de structure, qui remplacent les égalités entre dérivées partielles différant seulement par la succession des dérivations. En effet, pour une fonction  $f$

$$\mathfrak{D}_u \mathfrak{D}_v f = (f_{11} e^{-b} - b_{10} \mathfrak{D}_v f) e^{-a} \quad \mathfrak{D}_v \mathfrak{D}_u f = (f_{11} e^{-a} - a_{01} \mathfrak{D}_u f) e^{-b} \quad (8)$$

$$(\mathfrak{D}_u \mathfrak{D}_v) f \equiv (\mathfrak{D}_u \mathfrak{D}_v - \mathfrak{D}_v \mathfrak{D}_u) f = \beta \mathfrak{D}_u f - \alpha \mathfrak{D}_v f \quad (9)$$

Si  $\mathfrak{D}_u f$  et  $\mathfrak{D}_v f$  sont des invariants,  $\mathfrak{D}_v \mathfrak{D}_u f$  et  $\mathfrak{D}_u \mathfrak{D}_v f$  ne sont donc pas distincts; on peut leur substituer l'expression symétrique

$$\frac{1}{2} (\mathfrak{D}_u \mathfrak{D}_v + \mathfrak{D}_v \mathfrak{D}_u) f = f_{11} e^{-(a+b)} - \frac{1}{2} (\alpha \mathfrak{D}_v f + \beta \mathfrak{D}_u f)$$

ou encore le paramètre différentiel du second ordre  $\mathfrak{D}_{uv} f$

$$\mathfrak{D}_{uv} f = f_{11} e^{-(a+b)} \quad (10)$$

Pour les 6 invariants distincts du 3<sup>me</sup> ordre, on pourra choisir

$$\mathfrak{D}_u^2 \alpha, \mathfrak{D}_u^2 \beta, \mathfrak{D}_{uv} \alpha, \mathfrak{D}_{uv} \beta, \mathfrak{D}_v^2 \alpha, \mathfrak{D}_v^2 \beta$$

Pour les ordres suivants, le calcul se continuera de même en ne conservant, des dérivées de  $a$  et  $b$ , que celles de la forme  $a_{no}$  et  $b_{on}$ , et substituant aux autres les dérivées premières des derniers invariants obtenus; ceci revient à l'emploi exclusif des paramètres différentiels qui, à partir de  $\alpha$  et  $\beta$ , fournissent, dans le cas général, tous les invariants distincts d'ordre supérieur: nous dirons que les invariants du 1<sup>er</sup> ordre,  $\alpha$  et  $\beta$ , sont les invariants *essentiels* de la forme  $\varpi$ .

**8. — Cas particuliers.** — Soit  $B = 0$ , par exemple; on rencontre alors, pour le 1<sup>er</sup> ordre, l'équation invariante  $a_{01} = 0$ : si cette équation est satisfaite, la forme  $\varpi \equiv A(u) du$  n'a aucun invariant. Si  $a_{01} \neq 0$ , on pose  $a_{01} = e^c$  et l'on rencontre, pour le 2<sup>me</sup> ordre, l'équation invariante  $c_{10} = 0$ , c'est-à-dire  $a_{11} = 0$ : si cette équation est vérifiée, la forme  $\varpi$  n'a de nouveau aucun invariant, et est du type  $\varpi \equiv A_1(u) A_2(v) du$ .

Si  $c_{10} \neq 0$ , on obtient au contraire l'invariant essentiel du 2<sup>me</sup> ordre

$$\gamma = c_{10} e^{-a} = \frac{a_{11}}{a_{01}} e^{-a} \quad (11)$$

puis, par l'emploi des paramètres différentiels  $f_{10} e^{-a}$  et  $f_{01} e^{-c}$  successivement les invariants d'ordre supérieur.

De même, dans le cas général, si on s'arrête à  $a_{01} = b_{10} = 0$ , la forme  $\varpi \equiv A(u) du + B(v) dv$  n'a pas d'invariant; mais si une seule de ces équations est satisfaite, on obtiendra un invariant essentiel, à partir duquel les opérateurs différentiels  $\mathfrak{D}_u$  et  $\mathfrak{D}_v$  fournissent les autres.

On arrive donc rapidement, dans les cas particuliers, soit à une forme privée d'invariants, soit à la constitution des deux paramètres différentiels nécessaires et, plus ou moins tôt, à la formation d'invariants essentiels d'où découlent les autres; nous reviendrons d'ailleurs sur les procédés de formation des invariants.

**9. — Conditions suffisantes d'équivalence.** — Quand on sait former les invariants, généralement en nombre illimité, d'une forme  $\varpi$ , il reste à voir combien de ces invariants suffisent, par les relations qui les lient nécessairement, à caractériser une telle

forme vis-à-vis des transformations  $\Sigma$ ; je dis que, dans le cas général,  $\alpha, \beta, \omega, \theta, \varphi, \psi$  sont de tels invariants suffisants.

Supposons, en effet, que  $\alpha$  et  $\beta$  soient des fonctions distinctes de  $u$  et  $v$ , et considérons le symbole  $\delta$  comme affecté à la transformation infinitésimale d'un groupe qui, *a priori*, est formé de transformations générales  $\Pi$ . Imposons-nous les conditions, qui devront être compatibles

$$\delta\alpha = \delta\beta = 0 \quad (12)$$

$$\delta\omega = \delta\theta = \delta\varphi = \delta\psi = 0 \quad (13)$$

En développant les équations (13) en tenant compte de (7) et des formules (2), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta\omega = \omega(\xi_{10} - \delta a) + e^{b-a}\varphi\eta_{10} = 0 \\ \delta\theta = \theta(\xi_{10} - \delta a) + e^{b-a}\psi\eta_{10} = 0 \\ \delta\varphi = e^{a-b}\omega\xi_{01} + \varphi(\eta_{01} - \delta b) = 0 \\ \delta\psi = e^{a-b}\theta\xi_{01} + \psi(\eta_{01} - \delta b) = 0 \end{array} \right. \quad (13')$$

Le déterminant fonctionnel  $\frac{D(\alpha, \beta)}{D(u, v)} = e^{a+b}(\omega\psi - \theta\varphi)$  étant différent de zéro, ces équations donnent

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_{10} = \xi_{01} = 0 \\ \delta a = \xi_{10} = \xi' \quad \delta b = \eta_{01} = \eta' \end{array} \right. \quad (4')$$

Donc les transformations  $\Pi$  se réduisent à des transformations  $\Sigma$ , par lesquelles la forme  $\varpi$  est bien conservée, puisque  $\delta\varpi = 0$ .

C.Q.F.D.

10. — Si  $\alpha$  et  $\beta$  n'étaient pas indépendants, c'est-à-dire si

$$\omega\psi - \theta\varphi = 0 \quad (14)$$

cette équation étant jointe à l'une des équations (12), soit  $\delta\alpha = 0$ , les équations (13) se réduiraient à deux, par exemple  $\delta\omega = 0, \delta\varphi = 0$ . Il faudrait prolonger les conditions imposées par

$$\delta\mathfrak{I}_u\omega = \delta\mathfrak{I}_v\omega = 0 \quad (15)$$

qui, sous la réserve  $\frac{D(\alpha, \omega)}{D(u, v)} \neq 0$ , permettent à nouveau d'obtenir les équations (4'). Si  $\frac{D(\alpha, \omega)}{D(u, v)} = 0$ ,  $\frac{D(\alpha, \varphi)}{D(u, v)} \neq 0$ , les équations en  $\partial_u \varphi$  et  $\partial_v \varphi$  remplaceront celles en  $\partial_u \omega$  et  $\partial_v \omega$ .

Si l'on a simultanément

$$\frac{D(\alpha, \beta)}{D(u, v)} = 0 \quad \frac{D(\alpha, \omega)}{D(u, v)} = 0 \quad \frac{D(\alpha, \varphi)}{D(u, v)} = 0 \quad (16)$$

il en est de même de tous les déterminants fonctionnels formés pour deux invariants; tous les invariants sont donc fonctions d'un seul, soit  $\alpha$ . On pourra, dans ce cas, adjoindre aux équations  $\partial \alpha = 0$ ,  $\partial \omega = 0$ ,  $\partial \varphi = 0$ , les conditions

$$\eta_{10} = \xi_{01} = 0$$

pour revenir aux conclusions précédentes.

Dans les cas particuliers du n° 8, on trouvera, en procédant de même, les conditions suffisantes qui caractérisent chaque cas.

11. — Les résultats précédents peuvent être présentés d'une façon un peu différente, qui dépend plutôt de l'identification directe de deux formes  $\omega$  et  $\bar{\omega}$ ; si celles-ci sont équivalentes, les conditions nécessaires sont les égalités, chacun-à-chacun, des invariants distincts de tous les ordres, calculés pour les deux formes, et cette suite d'égalités constitue aussi les conditions suffisantes d'équivalence.

On voit, moyennant des hypothèses équivalentes à celles du numéro précédent, que certaines de ces égalités suffisent à entraîner toutes les autres.

Pour  $\alpha$  et  $\beta$  fonctions distinctes de  $u, v$  ( $\bar{\alpha}$  et  $\bar{\beta}$  de  $\bar{u}, \bar{v}$ ), ces conditions seront

$$\bar{\alpha} = \alpha \quad \bar{\beta} = \beta \quad (17)$$

relations entre  $u, v, \bar{u}, \bar{v}$  déterminant un nombre fini de correspondances, et

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \omega = \Omega(\alpha, \beta) & \bar{\theta} &= \theta = \Theta(\alpha, \beta) & \bar{\varphi} &= \varphi = \Phi(\alpha, \beta) \\ \bar{\psi} &= \psi = \Psi(\alpha, \beta) & & & & \end{aligned} \quad (18)$$

les fonctions  $\Omega, \Theta, \Phi, \Psi$  ne pouvant d'ailleurs être choisies arbitrairement, mais ayant été calculées sur une des formes,  $\omega$  par exemple, afin de satisfaire aux relations<sup>1</sup>

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathfrak{I}_u \mathfrak{I}_v) \alpha \equiv \mathfrak{I}_u \varphi - \mathfrak{I}_v \omega = \beta \omega - \alpha \varphi \\ (\mathfrak{I}_u \mathfrak{I}_v) \beta \equiv \mathfrak{I}_u \psi - \mathfrak{I}_v \theta = \beta \theta - \alpha \psi \end{array} \right. \quad (19)$$

De même, dans le cas où  $\alpha$  et  $\beta$  ne sont pas indépendants, il faut voir combien d'égalités entre invariants distincts de  $\omega$  et  $\bar{\omega}$ , compatibles en  $u, v, \bar{u}, \bar{v}$ , suffisent à entraîner les égalités entre les invariants correspondants suivants, et si ces égalités se réduisent à une ou deux indépendantes. Dans le dernier cas indiqué au n° 9, où les 6 invariants  $\alpha, \beta, \omega, \theta, \varphi, \psi$  sont fonctions d'un seul, soit  $\alpha$ , il en est de même de tous les invariants de  $\omega$ , et les conditions suffisantes

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \alpha & \bar{\beta} &= \beta = B(\alpha) & \bar{\omega} &= \omega = \Omega(\alpha) & \bar{\theta} &= \theta = \Theta(\alpha) \\ \bar{\varphi} &= \varphi = \Phi(\alpha) & \bar{\psi} &= \psi = \Psi(\alpha) \end{aligned} \quad (20)$$

assurent l'équivalence des deux formes  $\omega$  et  $\bar{\omega}$  qu'on peut mettre en correspondance par une infinité de transformations  $\Sigma$ , définies par la seule relation  $\bar{\alpha} = \alpha$ ; les fonctions  $\Theta$  et  $\Psi$  sont d'ailleurs données ici par

$$\Theta(\alpha) = \frac{d B}{d \alpha} \Omega(\alpha) \quad \Psi(\alpha) = \frac{d B}{d \alpha} \Phi(\alpha) . \quad (20')$$

12. — *Méthode d'identification directe.* — L'exemple simple des formes de Pfaff va nous servir à montrer qu'en identifiant directement deux formes  $\omega$  et  $\bar{\omega}$ , supposées équivalentes, on peut obtenir de la même façon que par la méthode de Lie (qui ne nécessite cependant pas les équations finies des transformations), les procédés de formation des invariants et les conditions d'équi-

<sup>1</sup> La recherche des conditions suffisantes pose en réalité des problèmes distincts: 1<sup>o</sup>, reconnaître si deux formes données  $\omega$  et  $\bar{\omega}$  sont équivalentes ( $\Sigma$ ); 2<sup>o</sup>, étudier le système des équations intrinsèques (18) définissant une même classe de formes de Pfaff équivalentes ( $\Sigma$ ), les fonctions  $\Omega, \Theta, \Phi, \Psi$ , de  $\alpha$  et  $\beta$  devant satisfaire aux équations aux dérivées partielles (19). Nous laissons de côté ce dernier problème, dont on pourrait aussi supposer une solution particulière connue.

Nous remarquerons encore qu'on peut parfois intervertir le rôle des invariants d'ordre inférieur  $\alpha, \beta$  et de deux autres des invariants utilisés.

valence. Nous partons ici des équations de transformation ( $\Sigma$ ) et de l'identité

$$\bar{\omega} \equiv \bar{A}(\bar{u}, \bar{v}) d\bar{u} + \bar{B}(\bar{u}, \bar{v}) d\bar{v} = A(u, v) du + B(u, v) dv \equiv \omega$$

En substituant aussi

$$d\bar{u} = U' du \quad d\bar{v} = V' dv \quad (21)$$

on obtient

$$A = \bar{A}U' \quad B = \bar{B}V' \quad (22)$$

ou, dans le cas général

$$e^a = e^{\bar{a}} U' \quad e^b = e^{\bar{b}} V' \quad [I', 0]$$

Il s'agit, par les dérivations successives de ces relations, et les éliminations de  $U'$ ,  $V'$ , et leurs dérivées, d'obtenir les expressions en  $a$ ,  $b$ , et leurs dérivées partielles ( $u$ ,  $v$ , n'intervenant pas directement) égales aux expressions correspondantes formées pour  $\bar{\omega}$ , qui constituent les invariants cherchés. On a d'abord

$$\begin{cases} a_{10} = \bar{a}_{(10)} U' + (\log U')' & b_{01} = \bar{b}_{(01)} V' + (\log V')' \\ b_{10} = \bar{b}_{(10)} U' & a_{01} = \bar{a}_{(01)} V' \end{cases} \quad [I', 1]$$

d'où, en éliminant  $U'$  et  $V'$  entre les équations  $[I', 0]$  et les deux dernières équations  $[I', 1]$

$$\alpha = b_{10} e^{-a} = \frac{B_{10}}{AB} \quad \beta = a_{01} e^{-b} = \frac{A_{01}}{AB} \quad (5')$$

En substituant aux dernières équations  $[I', 1]$

$$\alpha = \bar{\alpha} \quad \beta = \bar{\beta} \quad [I', 1']$$

et poursuivant les dérivations, on obtient

$$\begin{cases} a_{20} = \bar{a}_{(20)} U'^2 + \bar{a}_{(10)} U'' + (\log U'')' & b_{02} = \bar{b}_{(02)} V'^2 + \bar{b}_{(01)} V'' + (\log V'')' \\ \alpha_{10} = \bar{\alpha}_{(10)} U' & \alpha_{01} = \bar{\alpha}_{(01)} V' \\ \beta_{10} = \bar{\beta}_{(10)} U' & \beta_{01} = \bar{\beta}_{(01)} V' \end{cases} \quad [I', 2]$$

puis, en éliminant de nouveau  $U'$ ,  $V'$  avec les équations  $[I', 0]$  on retrouve les invariants distincts du 2<sup>me</sup> ordre  $\omega, \theta, \varphi, \psi$ . On

substituera ensuite comme précédemment aux quatre dernières équations [I', 2]

$$\omega = \bar{\omega} \quad \theta = \bar{\theta} \quad \varphi = \bar{\varphi}, \quad \psi = \bar{\psi} \quad [I', 2']$$

et on tiendra compte des relations entre les dérivées de ces équations, exactement comme au n° 7. Dans les deux méthodes, on compte de la même façon les invariants distincts des différents ordres; dans la méthode de Lie comme dans celle-ci, on ne fait que des combinaisons linéaires des équations obtenues auparavant, en particulier pour obtenir les combinaisons intégrables des systèmes complets; on se ramène donc toujours à des problèmes d'élimination.

La discussion des cas particuliers se fait de même; celle des conditions suffisantes d'équivalence peut aussi se faire comme aux n°s 9 et 10, en partant directement ici de deux formes  $\varpi$  et  $\bar{\varpi}$ .

13. — *Formation et interprétation des invariants.* — Dans la méthode des paramètres différentiels, on peut utiliser d'abord différents paramètres linéaires, puis, à partir d'eux, en former d'ordre supérieur servant aussi à construire les invariants. La méthode d'identification directe met de même en évidence divers procédés de formation des invariants; à côté des invariants *absolus* on est amené à considérer des expressions qui, dans une transformation, sont reproduites à un facteur près, dépendant des arbitraires de la transformation.

Nous réservons le nom d'invariants *relatifs* (comme en géométrie projective) aux expressions pour lesquelles ce facteur est une puissance du déterminant de la transformation, l'exposant de cette puissance étant le poids de l'invariant. Les transformations  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  intervenant pour former les transformations  $\Sigma$ , nous considérerons des invariants relatifs  $(\Sigma_1)$ ,  $(\Sigma_2)$ ,  $(\Sigma)$ , de poids  $p$ , soient des expressions  $r_1, r_2, r$ , satisfaisant respectivement à

$$\tilde{r}_1 = U'^p r_1 \quad \tilde{r}_2 = V'^p r_2 \quad \tilde{r} = (U' V')^p r \quad (23)$$

et caractérisées dans la méthode de Lie par

$$\delta r_1 = - p r_1 \xi' \quad \delta r_2 = - p r_2 \eta' \quad \delta r = - p r (\xi' + \eta') \quad (23')$$

Le produit de deux invariants relatifs,  $(\Sigma_1)$  et  $(\Sigma_2)$ , de poids  $p$ , est un invariant relatif  $(\Sigma)$  de même poids; le rapport de deux invariants relatifs du même groupe et de même poids est un invariant  $(\Sigma)$  absolu.

Nous considérerons aussi des formes différentielles invariantes ou covariantes relatives, ces dernières caractérisées par leur poids; ainsi  $du$  et  $d\nu$  sont des comitants relatifs,  $(\Sigma_1)$  et  $(\Sigma_2)$ , de poids  $(+1)$ , A et B des invariants relatifs  $(\Sigma_1)$  et  $(\Sigma_2)$  de poids  $(-1)$ : d'où les formes invariantes  $Adu$  et  $Bd\nu$ , conservées séparément, ainsi que, par exemple, la forme quadratique  $ABdu^2$  et la forme extérieure  $AB [dud\nu]$ , élément de l'invariant intégral  $\iint AB [du d\nu]$ .

Tout invariant ou comitant  $(\Pi)$  est nécessairement invariant ou comitant  $(\Sigma)$ ; ainsi de  $Adu$  et  $Bd\nu$ , on déduit les covariants bilinéaires

$$[dA \ du] = - A_{01} [du \ d\nu] \quad [dB \ d\nu] = B_{10} [du \ d\nu]$$

et les invariants intégraux correspondants; d'où aussi les invariants  $\alpha$  et  $\beta$ , et la condition  $\alpha = \beta$  exprime que la forme  $\varpi$  est une différentielle exacte<sup>1</sup>. Un invariant  $f$  donnera les invariants relatifs  $f_{10}$  et  $f_{01}$ , respectivement  $(\Sigma_1)$  et  $(\Sigma_2)$ , de poids  $(-1)$ ; puis les paramètres différentiels  $\frac{f_{10}}{A}$  et  $\frac{f_{01}}{B}$  seront de nouveaux invariants; on peut encore partir des formes invariantes  $f_{10} du$  et  $f_{01} d\nu$ . De même, les formes quadratiques de différentielles donnent comme invariants les courbures de Gauss; etc. Dans les invariants déduits de  $f$ , citons  $\frac{f_{10} f_{01}}{AB}$  et  $\frac{f_{11}}{AB}$ ; à partir de deux invariants  $f$  et  $g$ , on aura  $\frac{f_{10} g_{01} + f_{01} g_{10}}{AB}$  et  $\frac{f_{10} g_{01} - f_{01} g_{10}}{AB}$ : dans les théories géométriques, on rattachera ces invariants aux paramètres différentiels du plan et de la théorie des surfaces.

Les relations entre les diverses méthodes étant suffisamment établies, nous ferons surtout usage, dans la suite, de la méthode de Lie et des paramètres différentiels.

<sup>1</sup> Le covariant bilinéaire d'une forme  $\varpi$  est en effet

$$\varpi' = (B_{10} - A_{01}) [du d\nu] = AB (\alpha - \beta) [du d\nu]$$

## CAS DE DEUX FORMES DE PFAFF.

14. — Soient les deux formes de Pfaff

$$\varpi_1 \equiv A_1 du + B_1 dv \quad \varpi_2 \equiv A_2 du + B_2 dv \quad (24)$$

à conserver simultanément; nous nous en tiendrons au cas général<sup>1</sup>. Avec des notations analogues à celles du n° 6, on partira des conditions

$$\begin{cases} \delta a_1 = \xi' & \delta b_1 = \eta' \\ \delta a_2 = \xi' & \delta b_2 = \eta' \end{cases} \quad (25)$$

et l'on pourra prévoir  $2(n+1)^2$  invariants jusqu'à l'ordre  $n$ , et  $2(2n+1)$  de cet ordre. Un premier procédé consistera à remplacer les équations (25) par

$$\begin{cases} \delta(a_1 - a_2) = 0 & \delta(b_1 - b_2) = 0 \\ \delta a_1 = \xi' & \delta b_1 = \eta' \end{cases} \quad [II, 0]$$

d'où les deux invariants d'ordre zéro

$$\varepsilon = e^{a_1 - a_2} \quad \zeta = e^{b_1 - b_2}$$

puis, par différentiation

$$\begin{cases} \delta a_{1,10} = a_{1,10} \xi' + \xi'' & \delta b_{1,01} = b_{1,01} \eta' + \eta'' \\ \delta b_{1,10} = b_{1,10} \xi' & \delta a_{1,01} = a_{1,01} \eta' \\ \delta \varepsilon_{10} = \varepsilon_{10} \xi' & \delta \varepsilon_{01} = \varepsilon_{01} \eta' \\ \delta \zeta_{10} = \zeta_{10} \xi' & \delta \zeta_{01} = \zeta_{01} \eta' \end{cases} \quad [II, 1]$$

donnant les invariants du premier ordre

$$\alpha_1 = b_{1,10} e^{-a_1} \quad \beta_1 = a_{1,01} e^{-b_1} \quad \varepsilon_{10} e^{-a_1}, \quad \zeta_{10} e^{-a_1}, \quad \varepsilon_{01} e^{-b_1}, \quad \zeta_{01} e^{-b_1}$$

par l'emploi des paramètres différentiels  $f_{10} e^{-a_1}$  et  $f_{01} e^{-b_1}$ , qui permettent de continuer les calculs comme précédemment à partir des invariants essentiels  $\varepsilon, \zeta, \alpha, \beta$ . Nous retrouverons ainsi

<sup>1</sup> Le cas particulier  $B_1 = 0, A_2 = 0$  se ramène, comme il a été indiqué au n° 13, à celui d'une seule forme générale  $\varpi$ .

les invariants  $\alpha_1, \beta_1, \omega_1, \theta_1, \varphi_1, \psi_1, \dots$  de la forme  $\varpi_1$ , puis, à côté d'eux, la suite d'invariants analogues  $\alpha_2, \beta_2, \omega_2, \dots$  de  $\varpi_2$ ; en effet, l'on a par exemple

$$\begin{aligned} e^{-a_2} &= \varepsilon e^{-a_1} & b_2 &= b_1 - \log \zeta & b_{2,10} &= b_{1,10} - \frac{\zeta_{10}}{\zeta} \\ \alpha_2 &= b_{2,10} e^{-a_2} = \varepsilon \left( \alpha_1 - \frac{\zeta_{10}}{\zeta} e^{-a_1} \right) \end{aligned}$$

En outre, il restera une suite d'invariants mixtes entre les deux formes  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$ , en nombre  $2(n + 1)$  jusqu'à l'ordre  $n$ , commençant par

$$\varepsilon \quad \zeta \quad \varepsilon_{10} e^{-\frac{a_1+a_2}{2}} \quad \zeta_{01} e^{-\frac{b_1+b_2}{2}} \dots$$

Les conditions suffisantes d'équivalence seraient celles relatives à  $\varpi_1$ , auxquelles on ajouterait les conditions  $\delta\varepsilon = \delta\zeta = 0$ .

15. — Un procédé un peu plus symétrique consisterait à poser

$$\frac{a_1 + a_2}{2} = a \quad \frac{b_1 + b_2}{2} = b \quad \frac{a_1 - a_2}{2} = \tilde{a} \quad \frac{b_1 - b_2}{2} = \tilde{b}$$

et écrire les équations (25) sous la forme

$$\begin{cases} \delta \tilde{a} = 0 & \delta \tilde{b} = 0 \\ \delta a = \xi' & \delta b = \eta' \end{cases} \quad [\text{II}', 0]$$

Après les invariants d'ordre zéro,  $\tilde{a}$  et  $\tilde{b}$ , on trouverait ainsi pour le premier ordre

$$\alpha = b_{10} e^{-a} \quad \beta = a_{01} e^{-b} \quad \tilde{a}_{10} e^{-a}, \tilde{b}_{10} e^{-a}, \tilde{a}_{01} e^{-b}, \tilde{b}_{01} e^{-b}$$

et l'on continuerait de même, les paramètres différentiels se rapportant à une forme  $\varpi \equiv \sqrt{A_1 A_2} du + \sqrt{B_1 B_2} dv$ , qui n'est pas du faisceau linéaire de  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$ ; on remarquera aussi l'introduction d'invariants irrationnels.

Les invariants essentiels sont  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{b}$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ; quant aux *conditions suffisantes d'équivalence*, elles se présentent ici sous une forme plus simple que précédemment, étant données par

$$\delta \tilde{a} = \delta \tilde{b} = \delta(\tilde{a}_{10} e^{-a}) = \delta(\tilde{b}_{10} e^{-a}) = \delta(\tilde{a}_{01} e^{-b}) = \delta(\tilde{b}_{01} e^{-b}) = 0$$

c'est-à-dire par des *conditions moins nombreuses et d'ordre moins élevé* qu'au n° 14; cet exemple montre l'intérêt qu'il y a, dans chaque cas, à reprendre la discussion sur les données particulières au problème proposé.

### UNE FORME QUADRATIQUE.

16. — Imposons-nous maintenant la conservation de la forme

$$\chi \equiv L du^2 + 2M du dv + N dv^2 \quad (26)$$

Nous indiquerons seulement les grandes lignes de la méthode, sans discuter les cas particuliers. Les coefficients  $L$ ,  $M$ ,  $N$  sont astreints aux variations

$$\delta L = 2L\xi' \quad \delta M = M(\xi' + \eta') \quad \delta N = 2N\eta' \quad (27)$$

Il y a à prévoir  $\frac{(n+1)(3n+2)}{2}$  invariants jusqu'à l'ordre  $n$ , dont  $3n+1$  nouveaux pour cet ordre. On reconnaît en  $L$ ,  $M$ ,  $N$  des invariants relatifs:  $L$  et  $N$  sont  $(\Sigma_1)$  et  $(\Sigma_2)$  de poids  $(-2)$ ,  $M$  est  $(\Sigma)$  de poids  $(-1)$ ; si les équations  $L = 0$ ,  $M = 0$ ,  $N = 0$ , ne sont pas satisfaites, ils fourniront l'invariant d'ordre zéro. En posant

$$\begin{aligned} L &= e^{2l} & M &= e^m & N &= e^{2n} \\ \delta l &= \xi' & \delta m &= \xi' + \eta' & \delta n &= \eta' \end{aligned} \quad [\text{III}, 0]$$

nous prendrons pour invariant d'ordre zéro

$$\mu = e^{2(m-l-n)} = \frac{M^2}{LN} \quad (28)$$

et substituerons à la seconde équation [III, 0]

$$\delta \mu = 0 \quad [\text{III}, 0']$$

Dès ce moment, les équations dérivées fourniront régulièrement les invariants

$$\left\{ \begin{array}{ll} \delta l_{10} = l_{10}\xi' + \xi'' & \delta n_{01} = n_{01}\eta' + \eta'' \\ \delta n_{10} = n_{10}\xi' & \delta l_{01} = l_{01}\eta' \\ \delta \mu_{10} = \mu_{10}\xi' & \delta \mu_{01} = \mu_{01}\eta' \end{array} \right. \quad [\text{III}, 1]$$

donnant pour le premier ordre

$$\lambda = n_{10} e^{-l} \quad \nu = l_{01} e^{-n} \quad \rho = \mu_{10} e^{-l} \quad \sigma = \mu_{01} e^{-n} \quad (29)$$

et mettant en évidence les paramètres différentiels<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_u f &= f_{10} e^{-l} & \mathfrak{D}_v f &= f_{01} e^{-n} \\ \lambda &= \mathfrak{D}_u n & \nu &= \mathfrak{D}_v l & \rho &= \mathfrak{D}_u \mu & \sigma &= \mathfrak{D}_v \mu \end{aligned} \quad (30)$$

Pour continuer, on substituerait aux quatre dernières équations [III, 1]

$$\delta\lambda = 0 \quad \delta\nu = 0 \quad \delta\rho = 0 \quad \delta\sigma = 0 \quad [\text{III, } 1']$$

et on tiendrait compte des relations introduites par

$$\begin{aligned} (\mathfrak{D}_u \mathfrak{D}_v) f &= \nu \mathfrak{D}_u f - \lambda \mathfrak{D}_v f \\ (\mathfrak{D}_u \mathfrak{D}_v) \mu &= \nu \rho - \lambda \sigma \end{aligned} \quad (31)$$

On pourra encore introduire le paramètre différentiel du second ordre

$$\mathfrak{D}_{uv} f = f_{11} e^{-(l+n)} \quad (32)$$

et prendre pour invariants distincts d'ordre 2

$$\mathfrak{D}_u \lambda, \mathfrak{D}_v \lambda, \mathfrak{D}_u \nu, \mathfrak{D}_v \nu, \mathfrak{D}_u \rho = \mathfrak{D}_u^2 \mu, \mathfrak{D}_v \sigma = \mathfrak{D}_v^2 \mu, \mathfrak{D}_{uv} \nu.$$

Les invariants  $\mu, \lambda, \nu$  sont essentiels; dans le cas général, des invariants suffisants seront donnés par  $\mu, \lambda, \nu, \mathfrak{D}_u \lambda, \mathfrak{D}_v \lambda, \mathfrak{D}_u \nu, \mathfrak{D}_v \nu$ .

17. — Un cas particulier intéressant, celui des formes  $\chi_0$ , pour lesquelles  $L = N = 0$ , a été étudiée complètement par M. A. Tresse (*loc. cit.*, p. 54); en procédant un peu différemment, nous introduirions, après les invariants d'ordres 2 et 3:  $\alpha = m_{11} e^{-m}$   $\iota = z_{10} z_{01} e^{-m}$ , les deux paramètres différentiels  $\frac{f_{10}}{z_{10}}$  et  $\frac{f_{01}}{z_{01}}$ ; d'où les invariants d'ordre 4:  $\frac{f_{10}}{z_{10}}, \frac{f_{01}}{z_{01}}, \frac{z_{11}}{z_{10} z_{01}}$ , etc.

Il reste à indiquer comment les invariants d'une forme qua-

<sup>1</sup> Nous avons, dans les divers cas étudiés, conservé la même notation pour les paramètres différentiels  $\mathfrak{D}_u f, \mathfrak{D}_v f$ , sans que ces expressions soient les mêmes dans ces différents cas.

dratique  $\chi$  peuvent être reliés à ceux de formes linéaires. On peut, en effet, écrire, avec les notations des n°s 14 et 15

$$\chi \equiv \varpi_1 \varpi_2 \equiv \varpi^2 + \gamma_0 \quad \gamma_0 \equiv 2M_0 du dv \quad (33)$$

mais si la conservation du système de formes  $\varpi_1, \varpi_2$ , entraîne celle de  $\chi$ , l'inverse n'a pas lieu; par suite, les invariants de  $\chi$  sont des invariants du système  $\varpi_1, \varpi_2$ , la réciproque n'étant généralement pas vraie. On vérifiera ainsi les relations

$$\mu = \frac{(\varepsilon + \zeta)^2}{4\varepsilon\zeta} \quad (\text{notations du n° 14})$$

$l = a, n = b$ , donc  $\lambda = \alpha, \nu = \beta$  (notations du n° 15), etc.

On peut d'ailleurs profiter de l'arbitraire de la décomposition  $\chi \equiv \varpi_1 \varpi_2$  pour imposer aux formes linéaires  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$  une relation invariante assurant l'identité des systèmes d'invariants de  $\chi$  d'une part,  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$  d'autre part, en *normant* convenablement ces dernières formes sans porter atteinte à la généralité de  $\chi$ , ce qui est du reste possible de différentes façons, par exemple avec  $\varepsilon + \zeta = 1$ , ou  $\varepsilon\zeta = 1$ . On est ainsi ramené à l'étude d'un système *particulier* de formes linéaires.

En utilisant au contraire la relation  $\chi \equiv \varpi^2 + \chi_0$  (où il y a seulement deux choix possibles pour la forme  $\chi_0$ ), on se ramène à l'étude d'un système formé par une forme  $\varpi$  générale et une forme quadratique particulière  $\chi_0$ .

### CAS D'UNE ÉQUATION DE PFAFF.

18. — Soit seulement à conserver l'équation

$$\varpi \equiv A(u, v) du + B(u, v) dv = 0 \quad (34)$$

ce qui astreint les coefficients à la condition

$$\frac{\delta A - A \xi'}{A} = \frac{\delta B - B \eta'}{B}. \quad (35)$$

Ecartons d'abord les équations invariantes  $A = 0, B = 0$ , et posons

$$A = e^a \quad B = e^b \quad C = \frac{A}{B} = e^c \quad a - b = c$$

On devra prévoir  $\frac{(n+1)(n-2)}{2}$  invariants jusqu'à l'ordre  $n$ , dont  $n-1$  nouveaux invariants d'ordre  $n$ , pour  $n > 2$ . Pour les premiers ordres, écrivons

$$\delta c = \xi' - \eta' \quad [\text{IV, 0}]$$

$$\delta c_{10} = c_{10} \xi' + \xi'' \quad \delta c_{01} = c_{01} \eta' - \eta'' \quad [\text{IV, 1}]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta c_{20} = 2c_{20} \xi' + c_{10} \xi'' + \xi''' \\ \delta c_{02} = 2c_{02} \eta' + c_{01} \eta'' - \eta''' \\ \delta c_{11} = c_{11} (\xi' + \eta') \end{array} \right. \quad [\text{IV, 2}]$$

$c_{11}$  est donc invariant relatif de poids  $(-1)$ ; si  $c_{11} \neq 0$ , posons

$$c_{11} = e^g \quad \frac{g+c}{2} = h \quad \frac{g-c}{2} = k \quad (36)$$

et substituons à l'équation [IV, 0] et à la dernière équation [IV, 2] les suivantes

$$\delta h = \xi' \quad \delta k = \eta' \quad [\text{IV, 2'}]$$

Pour le troisième ordre, nous avons à former quatre nouvelles équations; nous en écrirons six, en  $\delta c_{30}, \delta c_{03}, \delta h_{10}, \delta k_{01}, \delta k_{10}, \delta h_{01}$ , celles en  $\delta h_{10}$  et  $\delta k_{01}$  remplaçant les équations [IV, 1]

$$\left\{ \begin{array}{ll} \delta c_{30} = \dots + \xi^{\text{IV}} & \delta c_{03} = \dots - \eta^{\text{IV}} \\ \delta h_{10} = h_{10} \xi' + \xi'' & \delta k_{01} = k_{01} \eta' + \eta'' \\ \delta k_{10} = k_{10} \xi' & \delta h_{01} = h_{01} \eta' \end{array} \right. \quad [\text{IV, 3}]$$

49. — Si les invariants relatifs  $k_{10}$  et  $h_{01}$  ne sont pas nuls, on obtient les deux invariants du troisième ordre

$$\alpha^* = k_{10} e^{-h} \quad \beta^* = h_{01} e^{-k} \quad (37)$$

et les équations  $\delta \alpha^* = 0, \delta \beta^* = 0$ , pourront remplacer dans la suite les équations en  $\delta k_{10}$  et  $\delta h_{01}$ , de sorte que l'on pourra continuer comme au n° 6, par l'emploi régulier de paramètres différentiels

$$\mathfrak{D}_u f = f_{10} e^{-h} \quad \mathfrak{D}_v f = f_{01} e^{-k} \quad (38)$$

pour lesquels on devra cependant tenir compte des relations (36), soit, entre  $h$  et  $k$

$$h_{11} - k_{11} = e^{(h+k)} \quad (39)$$

Les quatre invariants obtenus comme paramètres différentiels de  $\alpha^*$  et  $\beta^*$

$$\omega^* = \alpha_{10}^* e^{-h} \quad \theta^* = \beta_{10}^* e^{-h} \quad \varphi^* = \alpha_{01}^* e^{-k} \quad \psi^* = \beta_{01}^* e^{-k} \quad (40)$$

ne sont pas distincts, car

$$\begin{aligned} 0^* &= h_{11} e^{-(h+k)} - \alpha^* \beta^* & \varphi^* &= k_{11} e^{-(h+k)} - \alpha^* \beta^* \\ 0^* - \varphi^* &= 1 & & \end{aligned} \quad (41)$$

Comme l'on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{D}_u \mathfrak{D}_v f = f_{11} e^{-g} - \alpha^* \mathfrak{D}_v f \quad \mathfrak{D}_v \mathfrak{D}_u f = f_{11} e^{-g} - \beta^* \mathfrak{D}_u f \\ (\mathfrak{D}_u \mathfrak{D}_v) f = \beta^* \mathfrak{D}_u f - \alpha^* \mathfrak{D}_v f \end{array} \right. \quad (42)$$

on peut encore introduire

$$\mathfrak{D}_{uv} f = f_{11} e^{-g} \quad (43)$$

$$\gamma^* = \mathfrak{D}_{uv} g = g_{11} e^{-g} = 0^* + \varphi^* + 2 \alpha^* \beta^* \quad (44)$$

et prendre  $\omega^*, \gamma^*, \psi^*$  comme invariants distincts d'ordre 4

$$\omega^* = \mathfrak{D}_u \alpha^* \quad \gamma^* = \mathfrak{D}_{uv} g \quad \psi^* = \mathfrak{D}_v \beta^* \quad (45)$$

et pour l'ordre 5, on pourra choisir  $\mathfrak{D}_u^2 \alpha^*, \mathfrak{D}_u \gamma^*, \mathfrak{D}_v \gamma^*, \mathfrak{D}_u^2 \beta^*$ .

Dans le cas général, les invariants  $\alpha^*$  et  $\beta^*$  du troisième ordre sont essentiels,  $\gamma^*$  étant défini par (44).

20. — *Cas particuliers.* — Soit d'abord  $B = 0$ , par exemple: il n'y a aucune équation de condition, et l'équation  $Adu = 0$  ou  $du = 0$  est conservée par une transformation  $\Sigma$  arbitraire; de même pour  $A = 0$  et l'équation  $d\nu = 0$ . Si  $c_{11} = 0$ , il n'y a de nouveau aucun invariant; toute transformation  $\Sigma$  conserve l'équation qu'on peut écrire

$$\varpi \equiv A(u) du + B(v) d\nu = 0 \quad (46)$$

Passons aux équations invariantes  $k_{10} = 0, h_{01} = 0$ ; en dehors du cas  $c_{11} = 0$ , elles ne peuvent être vérifiées simultanément. Supposons donc par exemple  $k_{10} \neq 0, h_{01} = 0$ ; l'invariant  $\alpha^*$  est essentiel, et les autres invariants s'en déduisent par le jeu des opérateurs différentiels.

Pour  $h_{01} \neq 0$ ,  $k_{10} = 0$ , c'est  $\beta^*$  qui est l'invariant essentiel. Dans les deux derniers cas, on peut, par l'intégration d'une équation de Liouville<sup>1</sup>, donner les formes-types correspondantes de l'équation  $\omega = 0$ , qui sont

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bar{\omega} \equiv (X - Y)^2 du + 2X'Y'Z dv = 0 & \text{pour } h_{01} = 0 \\ \bar{\omega} \equiv 2X'Y'W du + (X - Y)^2 dv = 0 & \text{pour } k_{10} = 0 \end{array} \right. \quad (47)$$

les fonctions  $X(u)$ ,  $Y(v)$ ,  $Z(u)$ ,  $W(v)$  étant des fonctions arbitraires de leurs arguments.

24. — *Conditions suffisantes.* — Pour le cas général, la discussion des conditions suffisantes, ou la recherche des invariants suffisants, se fait exactement comme aux nos 9 à 11, en utilisant  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$ ,  $\omega^*$ ,  $\theta^*$ ,  $\varphi^*$ ,  $\psi^*$  à la place de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\omega$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ ;  $h$  et  $k$  étant de même substitués à  $a$  et  $b$ , les conditions

$$\delta\alpha^* = \delta\beta^* = \delta\omega^* = \delta\gamma^* = \delta\psi^* = 0 \quad (48)$$

assurent la conservation de la forme

$$\bar{\omega}^* \equiv e^h du + e^k dv \equiv e^{\frac{g}{2}} \left( e^{\frac{c}{2}} du + e^{-\frac{c}{2}} dv \right)$$

et par suite aussi de l'équation

$$\bar{\omega} \equiv Adu + Bdv \equiv B(e^c du + dv) = 0 ;$$

$\alpha^*$ ,  $\beta^*$ ,  $\omega^*$ ,  $\gamma^*$ ,  $\psi^*$  sont alors les invariants suffisants, c'est-à-dire que,  $\alpha^*$  et  $\beta^*$  étant indépendants, les fonctions

$$\omega^* = \Omega(\alpha^*, \beta^*) \quad \gamma^* = \Gamma(\alpha^*, \beta^*) \quad \psi^* = \Psi^*(\alpha^*, \beta^*) \quad (49)$$

doivent être les mêmes pour toute équation  $\bar{\omega} = 0$  équivalente ( $\Sigma$ ) à  $\omega = 0$ . Si  $\alpha^*$  et  $\beta^*$  ne sont pas des fonctions indépendantes de  $u$ ,  $v$ , c'est-à-dire si l'on a

$$\omega^* \psi^* - \theta^* \varphi^* \equiv \omega^* \psi^* - \frac{(\gamma^* - 2\alpha^* \beta^*)^2 - 1}{4} = 0$$

et si l'un des invariants  $\omega^*$ ,  $\gamma^*$ ,  $\psi^*$  est une fonction de  $u$ ,  $v$  distincte

<sup>1</sup> Une équation de Liouville a la forme  $z_{11} = K_0 e^{-z}$  et pour intégrale  $e^{-z} = \frac{2X'Y'}{K_0(X-Y)^2}$ ,  $K_0$  étant une constante,  $X$  et  $Y$  des fonctions arbitraires de  $u$  et  $v$  respectivement.

de  $\alpha^*$ , par exemple, on prolongera les invariants suffisants comme au n° 10, de façon à assurer la conservation de la forme  $\varpi^*$  par les transformations  $\Sigma$ . Le dernier cas possible est celui où  $\omega^*$ ,  $\gamma^*$ ,  $\psi^*$  sont, comme  $\beta^*$ , et alors comme tous les invariants, des fonctions de  $\alpha^*$ : ceci arrive maintenant dès qu'un des trois invariants précédents dépend de  $\alpha^*$  seul.

22. — *Formes de Pfaff normales; constitution des invariants.* — Nous dirons qu'à la forme de Pfaff  $\varpi$  de l'équation  $\varpi = 0$  correspond la forme  $\varpi^*$ , *normée* pour les transformations  $\Sigma$

$$\varpi^* \equiv J\varpi \equiv A^*du + B^*dv \quad A^* = e^h \quad B^* = e^k \quad (50)$$

le facteur *normant*  $J$  étant donné par<sup>1</sup>

$$J = e^{\frac{g-a-b}{2}} = \sqrt{\frac{c_{11}}{AB}} = \sqrt{1 - \varphi} \left( \text{avec } c_{11} = \frac{C_{11}}{C} - \frac{C_{10}C_{01}}{C^2}, \quad C = \frac{A}{B} \right) \quad (51)$$

Les invariants de l'équation  $\varpi = 0$  sont ceux de la forme normale  $\varpi^*$ , caractérisée par la relation (39); or, si nous appelons *normale* une forme  $\varpi$  dont les invariants  $\theta$  et  $\varphi$  du second ordre satisfont à la relation<sup>2</sup>

$$\theta - \varphi = 1 \quad (52)$$

nous voyons qu'une forme normale se confond avec sa forme normée, puisqu'on a alors

$$c_{11} = a_{11} - b_{11} = e^{a+b} \quad J = 1, \quad h = a, \quad k = b, \quad g = a + b.$$

Nous pourrons donc dire « forme normale » au lieu de « forme normée »  $\varpi^*$ ; l'introduction du facteur normant  $J$ , du second ordre, a pour effet d'élever de deux unités les ordres des invariants considérés aux n°s 6 et 7, et ce facteur introduit aussi des irrationnelles; mais la conservation d'une équation  $\varpi = 0$  est ainsi ramenée à celle de la forme normale  $\varpi^*$ .

Les invariants et comitants formés et interprétés au n° 13 se rapportent maintenant à  $\varpi^*$  et à diverses formes linéaires,

<sup>1</sup> Un tel facteur normant n'est jamais défini qu'à un facteur constant près, et une légère modification d'une forme normée est parfois avantageuse.

<sup>2</sup> Cette relation peut s'exprimer au moyen de formes quadratiques extérieures déduites de  $Adu$ ,  $Bdv$ ,  $\beta_{10}du$ ,  $\gamma_{01}dv$ , ou de  $\varpi$  et  $\varepsilon_{10}du + \varepsilon_{01}dv$ ; elle permet alors l'introduction d'une forme quadratique symétrique de différentielles.

quadratiques, etc., également normées par des facteurs convenables, ou à des équations correspondantes. On peut introduire ici un nouvel intermédiaire pour la formation des invariants; appelons invariant (ou comitant) *brisé* une expression  $s$  qu'une transformation  $\Sigma$  reproduit multipliée par  $\left(\frac{U'}{V'}\right)^q$ , le degré  $q$  de l'exposant étant le *calibre* de l'invariant brisé

$$\bar{s} = \left(\frac{U'}{V'}\right)^q s \quad \delta s = -qs (\xi' - \eta') \quad (53)$$

Ces invariants brisés sont des rapports d'invariants relatifs  $(\Sigma_1)$  et  $(\Sigma_2)$  de poids  $q$ , et le rapport de deux invariants brisés de même calibre est un invariant absolu. Ainsi  $C = \frac{A}{B}$  et  $\frac{dv}{du}$  sont des invariant et comitant brisés de calibre  $(-1)$ , donc  $\frac{Adu}{Bdv} = \frac{A^*du}{B^*dv}$  est un invariant absolu; des relations entre formes équivalentes

$$\frac{\bar{A}U'}{A} = \frac{\bar{B}V'}{B} = \frac{\bar{\omega}}{\omega} \quad c_{(11)} U'V' = c_{11} \quad (54)$$

on tire

$$\frac{c_{11}}{AB} \omega^2 = \frac{\bar{c}_{(11)}}{\bar{A}\bar{B}} \bar{\omega}^2 \quad (55)$$

mettant en évidence le facteur normant  $J$ ; d'autres invariants relatifs de poids  $(-1)$  remplaçant  $c_{11}$  donneraient d'autres formes normées.

A partir d'invariants  $f$ ,  $g$ , les invariants brisés  $\frac{f_{10}}{f_{01}}$ ,  $\frac{f_{10}}{g_{01}}$ , etc. serviront à la construction de nouveaux invariants et de formes ou d'équations différentielles invariantes.

Plutôt que les invariants formés précédemment, on aura souvent à utiliser des combinaisons telles que  $\alpha^* \beta^*$ ,  $\frac{\alpha^*}{\beta^*}$ , etc., et des invariants rationnels; ces derniers ne peuvent complètement remplacer ceux employés dans les conditions d'équivalence.

23. — *Formes et équations réduites.* — Les relations entre invariants d'une équation  $\omega = 0$ , ou les équations invariantes attachées à la précédente, donnent à celle-ci une forme type qu'on peut parfois obtenir explicitement (il en est de même pour

les formes différentielles et les équations de degré quelconque); une transformation  $\Sigma$  permet de ramener alors l'équation à une forme réduite (généralement par modification des invariants relatifs ou brisés), dont l'intégration entraîne celle des équations équivalentes; plusieurs formes réduites peuvent d'ailleurs correspondre à un même type.

Nous avons déjà rencontré, au n° 20, certains types d'équations dont les réduites sont faciles à former; les premiers correspondent respectivement aux intégrales  $u = \text{const.}$ ,  $v = \text{const.}$ ,  $\int A(u) du + B(v) dv = \text{const.}$ . Nous avons indiqué aussi que pour  $\alpha = \beta$ , l'équation  $\omega \equiv \mu d\lambda = 0$  se réduit à une forme  $d\lambda = 0$ ; on formerait facilement aussi les relations entre les invariants de formes  $\omega$  et  $m\omega$ ,  $\omega$  et  $\omega^*$  en particulier.

Signalons encore quelques formes remarquables; remarquons d'abord que pour des formes  $\omega$  de même invariant relatif  $c_{11}$ , le coefficient  $C = \frac{A}{B}$  est déterminé à un facteur arbitraire près  $\frac{X(u)}{Y(v)}$ ; le cas  $c_{11} = 0$ , déjà étudié, donne un type invariant d'équation  $\omega = 0$ .

Soit maintenant  $\gamma^* \equiv g_{11} e^{-g} = 0$ ; comme  $g = \log c_{11}$ ,  $c_{11}$  sera le produit d'une fonction arbitraire de  $u$  par une fonction arbitraire de  $v$ , et l'on obtiendra par intégration

$$C = \frac{X(u)}{Y(v)} e^{Z(u)W(v)} \quad (56)$$

$X, Y, Z, W$  étant des fonctions arbitraires de leurs arguments; d'où la forme-type

$$\omega \equiv X(u) e^{Z(u)W(v)} du + Y(v) dv = 0 \quad (57)$$

et la forme réduite

$$\omega \equiv e^{Z(u)W(v)} du + dv = 0 \quad (57')$$

Soit encore  $\gamma^* = -K_0$ , constante différente de zéro; l'intégration de l'équation de Liouville —  $g_{11} = K_0 e^g$  donne l'intégrale

$$c_{11} \equiv e^g = \frac{2Z'W'}{K_0(Z-W)^2} \quad Z = Z(u) \quad W = W(v)$$

mais l'on a alors

$$c_{11} + \frac{g_{11}}{K_0} = 0$$

d'où l'intégrale particulière  $c + \frac{g}{K_0}$  et par suite

$$C = \frac{X(u)}{Y(v)} e^{-\frac{g}{K_0}} = \frac{X}{Y} \left\{ \frac{K_0(Z - W)^2}{2Z'W'} \right\}^{\frac{1}{K_0}} \quad (58)$$

ce qui donne la forme type  $\omega = 0$ <sup>1</sup>.

24. — *Equivalences* ( $\Sigma_i$ ) et ( $\Sigma_g$ ). — Des formes  $\omega$  et  $\omega_i$ , ou les équations  $\omega = 0$ ,  $\omega_i = 0$ , étant équivalentes ( $\Sigma_i$ ), il suffit de la transformation  $\Sigma_i$  particulière

$$u_i = \bar{v} \quad v_i = \bar{u} \quad (\Sigma_0)$$

pour passer de  $\omega_i$  à une forme  $\bar{\omega}$  équivalente ( $\Sigma$ ) à  $\omega$ ; de même pour les équations. En posant

$$\bar{A}(\bar{u}, \bar{v}) d\bar{u} + \bar{B}(\bar{u}, \bar{v}) d\bar{v} \equiv A_i(u_i, v_i) du_i + B_i(u_i, v_i) dv_i$$

on aura (l'indice  $i$  caractérisant les expressions attachées à  $\omega_i$ )

$$A_i = \bar{B} \quad B_i = \bar{A} \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f_i}{\partial v_i}, \text{ etc.} \quad \text{pour} \quad f_i(u_i, v_i) \equiv \bar{f}(\bar{u}, \bar{v})$$

Aux invariants ( $\Sigma$ ) de  $\bar{\omega}$  correspondent pour  $\omega_i$  des expressions

<sup>1</sup> On sait que l'intégrale d'une équation de Liouville, écrite sous la forme  $z_{11} e^{-z} = -K_0$ , a été obtenue en partant d'un  $ds^2 = 2e^z du dv$  à courbure constante  $K_0$ ; de même le  $ds^2$  de révolution pouvant être ramené à la forme réduite  $2\Phi(u+v) du dv$  ou à la forme type  $2\Phi(X+Y) X' Y' du dv$ ,  $\Phi$ ,  $X(u)$ ,  $Y(v)$  étant des fonctions arbitraires, on se trouve alors dans le cas où tous les invariants du  $ds^2$  dépendent d'un seul. Ceci indique que la forme type

$$\omega = F(X+Y) X' du + G(X+Y) Y' dv$$

avec  $F$  et  $G$  fonctions arbitraires, ou la forme réduite

$$\omega = F(u+v) du + G(u+v) dv$$

correspondent au cas général où les invariants de la forme  $\bar{\omega}$ , ou ceux de l'équation  $\omega = 0$ , sont fonctions d'un seul de ces invariants. Supposons en effet un invariant  $f$  tel que l'invariant  $\frac{f_{11}}{f_{10}f_{01}}$  existe et soit fonction de  $f$ ;  $f$  est alors fonction d'une expression du type  $X(u) + Y(v)$ , ou encore  $X+Y$  est un invariant, dont tout autre invariant est fonction dans le cas considéré; et on en déduit aussitôt la forme des invariants relatifs ( $\Sigma_1$ ) et ( $\Sigma_2$ ). On sait dans ce cas intégrer l'équation  $\omega = 0$  en prenant pour variables  $u+v$  et  $u-v$ .

faciles à former. Bornons-nous au cas des équations de Pfaff équivalentes ( $\Sigma_i$ ); en posant  $\sqrt{-1} = i$ , et suivant une même détermination, on trouve

$$c_i = -\bar{c}, \quad g_i = \bar{g} + i\pi, \quad h_i = \bar{k} + i\frac{\pi}{2}, \quad k_i = \bar{h} + i\frac{\pi}{2}, \quad z_i^* = -i\bar{\beta}^*, \quad \beta_i^* = -i\bar{z}^*, \\ \text{etc.}$$

Les équations  $\omega = 0$ ,  $\omega_i = 0$ , équivalentes ( $\Sigma_i$ ), correspondent donc aux relations

$$\alpha_i^* = -i\beta^*, \quad \beta_i^* = -i\alpha^*, \quad \omega_i^* = -\psi^*, \quad \gamma_i^* = -\gamma^*, \quad \psi_i^* = -\omega^*, \text{ etc.} \quad (59)$$

et dans le cas général ( $\alpha^*$  et  $\beta^*$  fonctions indépendantes de  $u, v$ ) les conditions écrites sont suffisantes. On voit aussi que, dans ce cas, deux équations de Pfaff ne peuvent être simultanément équivalentes ( $\Sigma$ ) et ( $\Sigma_i$ ): il faudrait en effet  $z^* = \beta^* = 0$ , et on retombe alors sur le cas  $c_{11} = 0$ , où la chose est possible.

Les conditions d'équivalence ( $\Sigma_g$ ) comportent le choix entre les équivalences ( $\Sigma$ ) et ( $\Sigma_i$ ); avec  $\varepsilon = \pm 1$ , on peut les écrire, pour deux formes  $\omega$  et  $\omega_g$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_g^* + i\beta_g^* = \alpha^* + \varepsilon i\beta^* \quad \beta_g^* + i\alpha_g^* = \beta^* + \varepsilon i\alpha^* \\ \omega_g^* + \psi_g^* = \varepsilon(\omega^* + \psi^*) \quad \omega_g^* - \psi_g^* = \omega^* - \psi^* \quad \gamma_g^* = \varepsilon\gamma^*, \text{ etc.} \end{array} \right. \quad (60)$$

## DEUX ÉQUATIONS DE PFAFF.

25. — Soit à conserver, par les transformations  $\Sigma$ , l'ensemble des deux équations

$$\omega_1 = 0 \quad \omega_2 = 0 \quad (61)$$

les notations étant celles du n° 14. Ici encore, on peut assurer d'abord la conservation d'une des équations  $\omega_1 = 0$ , puis lui rattacher celle de l'autre  $\omega_2 = 0$ ; on part alors, dans le cas général, des conditions

$$\delta c_1 = \xi' - \eta' \quad \delta(c_1 - c_2) = 0$$

On prévoit  $n(n+1)$  invariants distincts jusqu'à l'ordre  $n$ , et en général  $2n$  nouveaux invariants d'ordre  $n$ ; mais jusqu'à l'ordre  $n$ , il y a  $(n+1)(n-2)$  invariants propres des deux

équations  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = 0$ , donc on trouverait en outre  $2(n+1)$  invariants mixtes pour ces deux équations. Et pour l'ordre  $n > 2$ ,  $2(n-1)$  invariants étant fournis séparément par les équations  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = 0$ , on doit trouver deux nouveaux invariants. En fait, les choses ne se passent pas aussi régulièrement dès le début.

Il est préférable de traiter plus symétriquement le système (61), ce qui permet en particulier d'obtenir des formes normées plus simples pour les expressions de Pfaff; mais nous ne traiterons pas directement ce système, devant retrouver un système analogue dans le problème suivant, relatif à la conservation d'une équation quadratique.

### CONSERVATION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE.

26. — Soit l'équation quadratique

$$\chi \equiv L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = 0 \quad (62)$$

qui sera conservée moyennant les conditions

$$\frac{\delta L - 2L\xi'}{L} = \frac{\delta M - M(\xi' + \eta')}{M} = \frac{\delta N - 2N\eta'}{N} \quad (63)$$

Dans le cas général  $L \neq 0$ ,  $M \neq 0$ ,  $N \neq 0$ , on pose

$$L = e^{2l} \quad M = e^m \quad N = e^{2n}$$

Comme nous venons de l'indiquer au cas précédent,  $n(n+1)$  invariants distincts sont à prévoir jusqu'à l'ordre  $n$ , et  $2n$  nouveaux pour cet ordre. Mais en posant

$$\mu = e^{2(m-l-n)} = \frac{M^2}{LN} \quad (64)$$

$$P = \frac{L}{N} = e^{2p} \quad p = l - n$$

on voit aussitôt que  $\mu$  est un invariant d'ordre zéro; en effet, tout invariant de la forme  $\chi$ , qui ne dépend que du rapport des coefficients de cette forme, est aussi invariant de l'équation  $\chi = 0$ . Les équations à écrire sont

$$\delta\mu = 0 \quad \delta p = \xi' - \eta' \quad [V, 0]$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \delta p_{10} = p_{10}\xi' + \xi'' & \delta p_{01} = p_{01}\eta' - \eta'' \\ \delta\mu_{10} = \mu_{10}\xi' & \delta\mu_{01} = \mu_{01}\eta' \end{array} \right. \quad [V, 1]$$

En écartant le cas des équations invariantes  $\mu_{10} = 0$ ,  $\mu_{01} = 0$ , on trouve pour le premier ordre un seul nouvel invariant

$$\tau = \frac{\mu_{10}}{\mu_{01}} e^{-P} \quad (65)$$

(ce qui donne bien 2 invariants jusqu'au 1<sup>er</sup> ordre inclus); du reste  $\tau = \frac{\rho}{\sigma}$ .  $\rho$  et  $\sigma$  étant deux invariants du 1<sup>er</sup> ordre de la forme  $\chi$  (n° 16). On peut ensuite substituer à la seconde équation [V, 0]

$$\delta\tau = 0 \quad [V, 0']$$

et en posant

$$\mu_{10} = e^x \quad \mu_{01} = e^y \quad (66)$$

on peut écrire les deux dernières équations [V, 1] sous la forme

$$\delta x = \xi' \quad \delta y = \eta' \quad [V, 1']$$

Dans les équations dérivées, on pourra encore substituer celles en  $\delta\tau_{10}$  et  $\delta\tau_{01}$  à celles en  $\delta x_{10}$  et  $\delta y_{01}$ , de sorte que nous écrirons

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta p_{20} = 2p_{20}\xi' + p_{10}\xi'' + \xi''' \quad \delta p_{02} = 2p_{02}\eta' + p_{01}\eta'' - \eta''' \\ \delta p_{11} = p_{11}(\xi' + \eta') \\ \delta\tau_{10} = \tau_{10}\xi' \quad \delta\tau_{01} = \tau_{01}\eta' \\ \delta y_{10} = y_{10}\xi' \quad \delta x_{01} = x_{01}\eta' \end{array} \right. \quad [V, 2]$$

soit 7 équations au lieu de 6, les deux dernières n'étant pas indépendantes, à cause de la relation

$$\mu_{11} = x_{01}e^x = y_{10}e^y \quad (67)$$

On obtiendra donc les 4 invariants distincts du 3<sup>me</sup> ordre<sup>1</sup>

$$\varepsilon = \mu_{11}e^{-x-y} \quad \zeta = p_{11}e^{-x-y} \quad \theta = \tau_{10}e^{-x} \quad \varphi = \tau_{01}e^{-y} \quad (68)$$

Les paramètres différentiels d'une fonction  $f$

$$\mathfrak{D}_u f = f_{10}e^{-x} \quad \mathfrak{D}_v f = f_{01}e^{-y} \quad (69)$$

<sup>1</sup> Les lettres  $\varepsilon$ ,  $\zeta$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  sont ici employées pour représenter des invariants différents de ceux précédemment désignés par les mêmes symboles.

donnent lieu aux relations

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{I}_u \mathfrak{I}_v f = f_{11} e^{-x-y} - \varepsilon \mathfrak{I}_v f \quad \mathfrak{I}_v \mathfrak{I}_u f = f_{11} e^{-x-y} - \varepsilon \mathfrak{I}_u f \\ (\mathfrak{I}_u \mathfrak{I}_v) f = \varepsilon (\mathfrak{I}_u f - \mathfrak{I}_v f) \quad \mathfrak{I}_{uv} f = f_{11} e^{-x-y} \end{array} \right. \quad (70)$$

et permettent de former tous les invariants suivants à partir des invariants essentiels  $\mu, \tau, \varepsilon, \zeta$ . Dans le cas général,  $\theta \neq \varphi$ , les invariants  $\mu, \tau, \theta, \varphi$  sont suffisants; en effet les conditions

$$\delta \mu = \delta \tau = \delta \theta = \delta \varphi = 0$$

permettent alors, en tenant compte des relations

$$\mu_{10} e^{-x} = \mu_{01} e^{-y} = 1 \quad (66')$$

d'où

$$\delta(\mu_{10} e^{-x}) = \delta(\mu_{01} e^{-y}) = 0$$

de retrouver  $\xi_{01} = \eta_{10} = 0$  et les équations [V, 0].

27. — *Cas particuliers.* — Si deux des quantités L, M, N sont nulles, les équations réductibles aux formes  $du^2 = 0$ ,  $dudv = 0$ ,  $dv^2 = 0$ , n'ont pas d'invariants.

Si L ou N est nul, l'équation a une forme  $\omega dv = 0$  ou  $\omega du = 0$ ; l'on est par suite ramené au cas de l'équation  $\omega = 0$ .

Si M = 0, la conservation de l'équation quadratique se traite exactement comme celle d'une équation de Pfaff; on part en effet de la seule relation

$$\delta p = \xi' - \eta'$$

analogue à [IV, 0] du no 18. L'équation a ici une forme  $\omega_1 \omega_2 = 0$ , où les formes de Pfaff  $\omega_1$  et  $\omega_2$  ne diffèrent que par le signe du coefficient C (c'est-à-dire  $C_1 + C_2 = 0$ ). De même, dans le cas  $\mu_{10} = \mu_{01} = 0$ , donc  $\mu$  constant, tous les invariants, en dehors de  $\mu$ , sont formés comme dans le cas précédent  $\mu = 0$ , c'est-à-dire comme pour une équation de Pfaff.

Nous ne traiterons pas le cas où une seule des quantités  $\mu_{10}$  et  $\mu_{01}$  serait nulle, ni les autres cas particuliers qui se présentent ensuite.

28. — *Formes normées et normales.* — On peut évidemment, pour conserver l'équation  $\chi = 0$ , ramener le problème à celui

de la conservation d'une forme quadratique normée par un facteur convenable; en considérant deux formes équivalentes, les relations

$$\frac{\bar{L}U'^2}{L} = \frac{\bar{M}U'V'}{M} = \frac{\bar{N}V'^2}{N} = \frac{\bar{\chi}}{\chi} \quad (71)$$

montrent qu'on obtiendra des facteurs normants en utilisant des invariants relatifs ( $\Sigma$ ), ( $\Sigma_1$ ) ou ( $\Sigma_2$ ) de l'équation  $\chi = 0$ ; les formes normées seront toujours caractérisées par certaines relations entre leurs invariants.

Considérons en particulier la forme que nous appellerons *normale* (dans le cas général)

$$\gamma^* \equiv Q\chi \equiv L^*du^2 + 2M^*du dv + N^*dv^2 \quad (72)$$

(les quantités se rapportant à cette forme étant marquées d'un astérisque), avec le facteur normant du premier ordre

$$Q = \frac{\mu_{10}\mu_{01}}{\sqrt{LN}} = \frac{e^{x+y}}{\sqrt{LN}} = \rho\sigma \quad (73)$$

donnant

$$L^* = e^{x+y+p} = e^{2x-\log\tau}, \quad N^* = e^{x+y-p} = e^{2y+\log\tau}, \quad M^* = \sqrt{\rho L^* N^*} \quad (74)$$

et calculons les premiers invariants de la forme  $\chi^*$  en fonction de ceux de l'équation  $\chi = 0$

$$\mu^* = \mu, \quad \lambda^* = \epsilon\sqrt{\tau} + \frac{\theta}{2\sqrt{\tau}}, \quad v^* = \frac{1}{\tau} \left( \epsilon\sqrt{\tau} - \frac{\theta}{2\sqrt{\tau}} \right), \quad \rho^* = \sqrt{\tau}, \quad \sigma^* = \frac{1}{\sqrt{\tau}}. \quad (75)$$

On voit que  $\rho^* \sigma^* = 1$ ; par suite une forme quadratique normale est caractérisée par la relation

$$\rho\sigma = 1 \quad (76)$$

entre deux de ses invariants du premier ordre; cette relation entraîne en effet

$$\mu_{10}\mu_{01} = e^{l+n} \quad \text{ou} \quad e^{x+y} = e^{l+n}$$

par suite

$$L^* = L \quad M^* = M \quad N^* = N \quad Q = 1$$

Si l'on se reporte aux décompositions d'une forme  $\chi$  indiquées au n° 17, soit

$$\gamma \equiv \omega_1 \omega_2 \equiv \omega^2 + \gamma_0 \quad \gamma_0 \equiv 2M_0 du dv \quad (33)$$

on voit que l'on a ici

$$\gamma^* \equiv {}^*\omega^2 + \gamma_0^* \quad {}^*\omega \equiv \sqrt{Q} \omega$$

et la forme  ${}^*\omega$  n'est pas normale au sens du n° 22, ni même normée intrinsèquement, mais seulement par rapport à la forme  $\chi$ ; on devrait naturellement employer un autre facteur normant pour  $\gamma$  dans le cas  $\mu = \text{constante}$ .

### EQUATION DE PFAFF ET FORME QUADRATIQUE PARTICULIÈRE. CONCLUSION.

29. — Envisageons enfin le problème de la conservation simultanée de l'équation

$$\omega \equiv A du + B dv = 0 \quad C = \frac{A}{B} = e^c \quad (34)$$

et de la forme quadratique

$$\gamma_0 \equiv 2M_0 du dv \quad M_0 = e^{m_0} \quad (77)$$

On obtient les conditions

$$\delta c = \xi' - \tau' \quad \delta m_0 = \xi' + \tau' \quad [\text{VI}, \ 0]$$

ou, en posant

$$\begin{aligned} m_0 + c &= 2z & m_0 - c &= 2w \\ \delta z &= \xi' & \delta w &= \tau' \end{aligned} \quad [\text{VI}, \ 0']$$

conditions analogues à celles obtenues pour la conservation de la forme

$$\tilde{\omega} \equiv \tilde{A} du + \tilde{B} dv \quad \tilde{A} = \sqrt{\frac{A}{B} M_0} \quad \tilde{B} = \sqrt{\frac{B}{A} M_0} \quad (78)$$

On utilise donc ici un facteur normant d'ordre zéro

$$H = \sqrt{\frac{M_0}{AB}} \quad (79)$$

et l'on peut aussi rattacher aux formes  $\tilde{\omega}$  et  $\gamma_0$  la forme quadratique

$$\tilde{\gamma} \equiv \tilde{\omega}^2 - \gamma_0$$

dont l'invariant  $\tilde{\gamma}$  d'ordre zéro est nul.

30. — *Conclusions générales.* — Nous avons, au cours des paragraphes précédents, traité un certain nombre de cas séparés; le procédé de recherche des invariants: invariants *distincts* des divers ordres, invariants *essentiels* et paramètres différentiels, a été assez uniforme pour qu'on puisse traiter de même les cas qui se présenteraient, par exemple, pour des formes ou équations de Monge de degré supérieur au second. Il n'est pas plus difficile, dans chaque cas, de rechercher les conditions suffisantes d'équivalence, ou, comme nous l'avons dit, les invariants *suffisants*, c'est-à-dire ceux qui assurent la conservation des formes ou équations en jeu, pour les transformations  $\Sigma$ . Mais les divers exemples traités montrent qu'une recherche particulière est nécessaire pour chaque cas envisagé, si l'on veut traiter intrinsèquement chacun de ces cas, sans profiter des résultats acquis dans des études voisines. Nous avons vu d'ailleurs que l'utilisation de tels résultats entraîne des détours dans la formation des invariants, et peut mener à des choix différents d'invariants essentiels, de paramètres différentiels, de conditions suffisantes, de facteurs normants.

Dans une étude générale des transformations  $\Sigma$ , c'est surtout le rôle des invariants et comitants relatifs  $(\Sigma_1)$ ,  $(\Sigma_2)$  et  $(\Sigma)$ , ainsi que des invariants brisés, qui reste primordial; deux invariants relatifs  $r_1$  et  $r_2$ , respectivement  $(\Sigma_1)$  et  $(\Sigma_2)$ , de poids  $(-1)$ , permettant toujours la formation de deux paramètres différentiels  $\frac{f_{10}}{r_1}$  et  $\frac{f_{01}}{r_2}$ , on passera de ceux-ci à d'autres paramètres différentiels  $\frac{f_{10}}{R_1}$  et  $\frac{f_{01}}{R_2}$ , préférables ailleurs, par le moyen des invariants  $\frac{r_1}{R_1}$  et  $\frac{r_2}{R_2}$ . De même à partir d'un facteur normant  $J$  (invariant de la *forme*  $\omega$ , par exemple) on déduira un autre facteur normant  $I$  au moyen d'un invariant  $\frac{R}{r}$ ,  $R$  et  $r$  étant invariants relatifs  $(\Sigma)$  de même poids.

31. — Le cas indiqué au n° 29 a donné l'exemple d'un invariant relatif  $M_0$ , de poids  $(-1)$  et d'ordre nul, donc aussitôt atteint, qui fournissait pour une équation de Pfaff un facteur normant d'ordre zéro. Supposons que l'on ajoute ainsi à des conditions

imposées la conservation d'une forme quadratique  $\chi_0$ ; des invariants ainsi formés, certains seront propres à cette forme, d'autres propres aux autres conditions imposées, d'autres mixtes. Pour se débarrasser de la forme  $\chi_0$  introduite et revenir aux conditions initialement posées, ou complétées par d'autres, il suffira de la substitution, à  $M_0$  et aux expressions analogues, d'invariants relatifs propres aux nouvelles conditions; de sorte que l'adjonction de la forme  $\chi_0$  donnera pour les conditions distinctes, sinon des invariants (absolus ou relatifs) propres à ces conditions du moins des expressions qui, par l'élimination des facteurs étrangers, constitueront ces invariants. Pour préciser par un exemple, revenons à la représentation conforme, où  $du = 0$  et  $d\nu = 0$  seraient les équations des lignes minima du plan ou des surfaces; la forme  $\chi_0$  étant considérée comme un  $ds^2$ , sa conservation mène à un problème d'applicabilité, où l'on peut utiliser les paramètres différentiels de la théorie des surfaces (courbes ou développables): certains invariants du dernier problème seront encore des invariants du problème initial; des combinaisons des autres permettront de trouver les autres invariants cherchés.

Il n'y a du reste là que l'application d'un principe général: les invariants d'un sous-groupe des transformations  $\Sigma$  étant connus, ils comprennent les invariants ( $\Sigma$ ), et peuvent aussi par suite être utilisés à la formation des invariants d'un nouveau sous-groupe.

Remarquons à ce sujet que les invariants relatifs ( $\Sigma_1$ ) et ( $\Sigma_2$ ) sont des invariants absolus respectivement pour les transformations  $\xi' = 0$ , ou  $\eta' = 0$ ; les invariants relatifs ( $\Sigma$ ) et les invariants brisés sont invariants absolus respectivement pour les transformations  $\xi' + \eta' = 0$ , ou  $\xi' - \eta' = 0$ , c'est-à-dire  $\xi = \pm \eta = \text{constante}$ . Tous ces invariants en particulier sont invariants absolus des transformations  $\xi' = \eta' = 0$ , soit  $\xi = K_1$ ,  $\eta = K_2$ ,  $K_1$  et  $K_2$  étant deux constantes. Le rôle que nous avons fait jouer à ces expressions est donc bien en accord avec le principe général énoncé.

Le Havre, le 23 avril 1928.