

# LES MOYENNES ARITHMÉTIQUES DANS LA THÉORIE DU POTENTIEL

Autor(en): **Kellogg, Oliver D.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-21865>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# LES MOYENNES ARITHMÉTIQUES DANS LA THÉORIE DU POTENTIEL <sup>1</sup>

PAR

Oliver D. KELLOGG (Harvard).

---

La notion de moyenne arithmétique, introduite dans la théorie du potentiel par GAUSS <sup>2</sup>, et utilisée par ZAREMBA <sup>3</sup>, LEBESGUE <sup>4</sup>, et autres, est sans doute destinée à jouer un rôle d'importance croissante dans cette théorie. Je me propose d'indiquer brièvement quelques-uns des services qu'elle peut rendre.

1. — *Quelques propriétés de la moyenne arithmétique.* — Soit  $T$  un continuum ouvert, ou domaine. Soit  $T_a$  l'ensemble des points de  $T$  dont la distance à la frontière de  $T$  dépasse le nombre positif  $a$ , assez petit pour que  $T_a$  contienne des points. Soit  $W$  une fonction définie dans  $T$ , et intégrable. Nous appelons *moyenne arithmétique de  $W$  sur un cercle* la fonction

$$W_1(x, y) = W_1(P) = \frac{1}{\pi a^2} \int_C \int W dS,$$

où  $C$  est le cercle de rayon  $a$  de centre  $P(x, y)$ .

On établit sans peine les propriétés suivantes de  $W_1$ :

I. *Si  $W$  est bornée dans  $T$ ,  $W_1$  satisfait à une condition uniforme de Lipschitz dans  $T_a$ .* Par exemple, si  $|W| \leq B$ ,

$$|W_1(P) - W_1(Q)| \leq \frac{2B}{a} \cdot h,$$

---

<sup>1</sup> Conférence faite à Genève, au Colloque mathématique des Universités de la Suisse romande, le 28 janvier 1928.

<sup>2</sup> *Allgemeine Lehrsätze*, Gesammelte Werke, V, p. 200.

<sup>3</sup> *Atti del Congr. Internat. dei Mat.* II (1908), p. 194; *Bull. de l'Acad. de Sci. de Cracovie*, 1909, p. 197-264; *Acta Math.* XXXIV (1911), p. 293-316.

<sup>4</sup> *Sur le problème de Dirichlet*, Comptes rendus, t. CLIV (1912), p. 335.

P et Q étant deux points quelconques de  $T_a$  à distance  $h$ .

II. Si  $W$  est uniformément continue dans  $T$ , les dérivées

$$\frac{\partial W_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial W_1}{\partial y}$$

existent et sont uniformément continues dans  $T_a$ . En effet, on déduit de la définition de  $W_1$  la formule

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} = \frac{1}{\pi a^2} \int_c W \cos(n, x) ds, \quad (1)$$

où  $c$  désigne la circonférence de  $C$  et  $(n, x)$  l'angle entre le rayon de  $C$  et l'axe des  $x$ . Si  $B$  est une borne pour  $|W|$ , alors

$$\left| \frac{\partial W_1}{\partial x} \right| \leq \frac{4B}{\pi a}. \quad (2)$$

III. Si  $W$  est uniformément continue dans  $T$ , et si ses dérivées du premier ordre sont continues dans  $T$ , on a alors dans  $T_a$ ,

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} = \frac{1}{\pi a^2} \int_c \int \frac{\partial W}{\partial x} dS, \quad (3)$$

c'est-à-dire que les dérivées de  $W_1$  sont les moyennes arithmétiques des dérivées correspondantes de  $W$ . Cette formule dérive de (1) par une application de l'identité de Green.

2. — Les fonctions qui sont égales à leurs propres moyennes arithmétiques. — Soit  $V$  une fonction intégrable et bornée dans  $T$ , et telle que, pour tout  $a > 0$ , on ait dans  $T_a$

$$V = \frac{1}{\pi a^2} \int_c \int v dS.$$

Il suit de (I) que  $V$  est uniformément continue dans  $T_a$ , de (II) que les dérivées du premier ordre de  $V$  existent et sont uniformément continues dans  $T_{2a}$ , et de (III) que ces dérivées sont égales à leurs propres moyennes arithmétiques dans  $T_{2a}$ . On peut alors appliquer aux dérivées le même raisonnement, et conclure, puisque  $a$  est aussi petit qu'on veut, que les dérivées

d'ordre quelconque existent et sont continues dans chaque région fermée appartenant à T. De plus, V est harmonique dans T.

Montrons d'abord que V est égale à sa propre moyenne arithmétique sur les circonférences. Puisque elle est égale à sa propre moyenne sur les surfaces de cercles, on a

$$r^2 V = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^r V r dr d\mathfrak{Z} .$$

La dérivation de cette égalité par rapport à r donne

$$2rV = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} V r d\mathfrak{Z} , \quad (4)$$

$$V = \frac{1}{2\pi a} \int_c V ds .$$

qui est la relation cherchée.

De plus, si on supprime le facteur r dans (4), et qu'on différentie l'équation trouvée par rapport à r, on a, puisque la valeur au centre du cercle ne dépend pas de r,

$$0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial V}{\partial r} d\mathfrak{Z} , \quad \text{et} \quad \int_c \frac{\partial V}{\partial n} ds = 0 .$$

Maintenant, en appliquant l'équation (1) aux dérivées premières de V, on a

$$\begin{aligned} \nabla^2 V &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{1}{\pi a^2} \int_c \left[ \frac{\partial V}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(n, y) \right] ds \\ &= \frac{1}{\pi a^2} \int_c \frac{\partial V}{\partial n} ds , \end{aligned} \quad (5)$$

quantité qui, comme nous venons de le voir, est nulle. V est donc bien harmonique dans T.

En intégrant la relation (4) on voit que si V est continue dans T et égale à sa propre moyenne arithmétique sur toute circonférence comprise dans T (et pour tout point intérieur), elle est aussi égale à sa propre moyenne arithmétique sur tout cercle

dans  $T$ . On a aussi une démonstration de la réciproque due à Koebe du théorème de Gauss :

*Si  $V$  est continue dans  $T$ , et égale à sa propre moyenne arithmétique sur la circonférence de chaque cercle dans  $T$ ,  $V$  est harmonique dans  $T$ .*

L'inégalité (2) dit que, si une fonction  $V$  est harmonique dans  $T$ , et si  $|V| \leq B$ , alors dans une région fermée  $R$  dans  $T$ , les dérivées du premier ordre ne sont pas plus grandes que  $\frac{4}{\pi} \cdot \frac{B}{a}$ , où  $a$  est la plus petite distance d'un point de  $R$  à la frontière de  $T$ . On peut en tirer des inégalités pour les dérivées d'ordre supérieur. La formule (2) est aussi une conséquence d'une inégalité de Harnack. On peut démontrer qu'une inégalité plus étroite n'existe pas, c'est-à-dire que le coefficient  $4/\pi$  ne peut pas être remplacé par un plus petit.

Si les dérivées du premier ordre de  $V$  sont continues dans  $T$ , et si

$$\int_c \frac{dV}{dn} ds = 0$$

pour toute courbe fermée dans  $T$ , ou même si cette égalité a lieu pour toute circonférence comprise dans  $T$  ainsi que pour tout point intérieur, alors  $V$  est harmonique dans  $T$ . C'est le théorème de Bôcher. Car, si on intègre par rapport à  $r$  l'équation équivalente

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial V}{\partial r} d\mathfrak{S} = 0$$

de 0 à  $r$ , on trouve

$$\int_0^{2\pi} V d\mathfrak{S} - 2\pi V(x, y) = 0, \quad \text{ou bien} \quad V(x, y) = \frac{1}{2\pi a} \int_c V ds,$$

et  $V$  est égale à sa propre moyenne arithmétique sur toute circonférence comprise dans  $T$ . Cela suffit, d'après le théorème de Koebe, pour que  $V$  soit harmonique dans  $T$ .

3. — *Le théorème de Morera.* — MORERA<sup>1</sup> a démontré que si l'intégrale, d'une fonction continue de la variable complexe

<sup>1</sup> Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere, Rendiconti (2) XIX (1886), p. 304.

$$z = x + iy,$$

$$\int_{\Gamma} f(z) dz$$

est nulle pour toute courbe fermée  $\Gamma$  dans  $T$ , alors  $f(z)$  est analytique dans  $T$ . La démonstration de ce théorème donnée par OSGOOD<sup>1</sup> n'exige pas que l'intégrale soit nulle pour tout rectangle dont les côtés sont parallèles à deux lignes fixes. Nous sommes à même de le démontrer en supposant que les courbes  $\Gamma$  sont des circonférences.

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions continues dans  $T$ , et telles que

$$\int_c (udx - vdy) = 0, \quad \int_c (vdx + udy) = 0 \quad (6)$$

pour toute circonférence  $c$  dans  $T$ . Alors les dérivées du premier ordre de  $u$  et  $v$  existent et sont continues dans  $T$ , et satisfont aux équations de Cauchy-Riemann.

Posons

$$U_a(x, y) = \frac{1}{\pi a^2} \int_c \int u dS, \quad V_a(x, y) = \frac{1}{\pi a^2} \int_c \int v dS,$$

où  $C$  est la surface du cercle de rayon  $a$  et de centre  $(x, y)$ . Alors dans  $T_a$ , les dérivées de  $U_a$  et  $V_a$  sont continues, d'après la propriété (II) des moyennes arithmétiques, et l'on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_a}{\partial x} &= \frac{1}{\pi a^2} \int_c u dx, & \frac{\partial U_a}{\partial y} &= \frac{1}{\pi a^2} \int_c u dy, \\ \frac{\partial V_a}{\partial x} &= \frac{1}{\pi a^2} \int_c v dx, & \frac{\partial V_a}{\partial y} &= \frac{1}{\pi a^2} \int_c v dy. \end{aligned}$$

Donc, par les équations (6),

$$\frac{\partial U_a}{\partial x} = \frac{\partial V_a}{\partial y}, \quad \frac{\partial U_a}{\partial y} = -\frac{\partial V_a}{\partial x}.$$

Cela veut dire que  $U_a + iV_a$  est une fonction analytique de

<sup>1</sup> Lehrbuch der Funktionentheorie, 4<sup>e</sup> ed. Berlin (1923), p. 302.

$x + iy$  dans  $T_a$ , et, par suite, que  $U_a$  et  $V_a$  sont harmoniques dans  $T_a$ .

Alors  $U_a$  et  $V_a$  sont égales à leurs propres moyennes arithmétiques sur les surfaces de cercles dans  $T_a$ . Puisque cela a lieu pour tout  $a > 0$ , et puisque  $U_a$  et  $V_a$  tendent uniformément vers  $u$  et  $v$  quand  $a$  tend vers 0,  $u$  et  $v$  sont elles aussi égales à leurs moyennes arithmétiques dans chaque région fermée de  $T$ . D'après leurs définitions,  $U_a$  et  $V_a$  sont donc identiques à  $u$  et  $v$ , et leurs dépendances de  $a$  n'est qu'apparente. Donc  $u$  et  $v$  ont des dérivées continues dans  $T$ , qui satisfont aux équations de Cauchy-Riemann, et le théorème de Morera est démontré.

4. — *Les fonctions surharmoniques.* — La fonction continue  $W$  est dite *surharmonique* dans  $T$ , si pour chaque domaine  $T'$  compris dans  $T$ , et pour chaque fonction  $U$ , harmonique dans  $T'$  et continue dans  $T'$  ainsi que sur la frontière de  $T'$ , l'inégalité  $W \geq U$  sur la frontière de  $T'$  entraîne la même inégalité en tout point de  $T'$ .

La fonction continue  $W$  est sousharmonique dans  $T$  si  $-W$  est surharmonique dans  $T$ .

Les fonctions harmoniques dans  $T$  appartiennent à la fois à la classe des fonctions surharmoniques et à celle des fonctions sousharmoniques. Ce sont les seules fonctions qui appartiennent simultanément aux deux classes.

Nous indiquerons quelques propriétés des fonctions surharmoniques qui nous seront utiles.

I. *Si  $W$  est continue et surharmonique dans  $T$ , on a*

$$W(x, y) \geq \frac{1}{2\pi a} \int_e W ds ,$$

*pour toute circonférence  $c$  tracée dans  $T$ .*

Soit  $c$  une telle circonférence, et soit  $U$  la fonction, harmonique dans le cercle dont la circonférence est  $c$ , et qui a, sur  $c$ , les mêmes valeurs que  $W$ . Alors

$$W(x, y) \geq U(x, y) = \frac{1}{2\pi a} \int_c U ds = \frac{1}{2\pi a} \int_c W ds .$$

II. Si  $W$  est continue dans  $T$ , et si, pour chaque point  $P(x, y)$  dans  $T$  il existe un nombre  $\alpha > 0$ , tel que

$$W(x, y) \geq \frac{1}{2\pi a} \int_c W ds$$

pour toute circonférence de centre  $P$  et de rayon  $a < \alpha$ , alors  $W$  est surharmonique dans  $T$ .

Soit  $U$  une fonction harmonique dans un domaine  $T'$  compris dans  $T$ , continue dans  $T'$  et sur sa frontière; et soit  $W$  une fonction telle que  $W \geq U$  sur la frontière de  $T'$ . D'après l'hypothèse, pour chaque point  $P$  de  $T'$ , il y a un nombre  $\alpha$  tel que

$$W(x, y) - U(x, y) \geq \frac{1}{2\pi a} \int_c (W - U) ds$$

pour toute circonférence  $c$  dans  $T'$  de centre  $P$  et de rayon  $a < \alpha$ , puisque  $U$  est sa propre moyenne arithmétique. Une telle fonction  $W - U$  ne saurait avoir un minimum dans  $T'$ . Elle est donc plus grande que ou égale à 0 dans  $T'$  puisqu'elle l'est sur la frontière de  $T'$ .  $W$  est donc bien surharmonique dans  $T$ .

III. Si  $W$  est surharmonique et si ses dérivées du second ordre existent et sont continues dans  $T$ , alors

$$\nabla^2 W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \leq 0$$

dans  $T$ , et réciproquement, si les dérivées du second ordre de  $W$  sont continues et satisfont à cette inégalité,  $W$  est surharmonique.

De la formule de Green

$$\int_C \int \nabla^2 W dS = \int_c \frac{\partial W}{\partial n} ds = r \int_0^{2\pi} \frac{\partial W}{\partial r} d\theta$$

on tire

$$\int_0^a \frac{1}{2\pi r} \int_C \int \nabla^2 W dS dr = \frac{1}{2\pi a} \int_c W ds - W(x, y).$$

De cette équation, et des propriétés (I) et (II), découle la conclusion indiquée.



IV. Si  $W$  est continue et surharmonique dans  $T$ , si  $T'$  est un domaine dans  $T$ , et si  $U$  est harmonique dans  $T'$  avec les mêmes valeurs que  $W$  sur la frontière de  $T'$ ; alors la fonction  $W_1$ ,

$$W_1 = U \text{ dans } T'$$

$$W_1 = W \text{ dans le reste de } T,$$

est surharmonique dans  $T$ .

Si  $P(x, y)$  est un point de  $T'$ , alors pour  $a < \alpha$ ,  $\alpha$  étant la distance de  $P$  à la frontière de  $T'$ , on a

$$W_1(x, y) = \frac{1}{2\pi a} \int_c W_1 ds.$$

Si  $P(x, y)$  est un point de  $T - T'$ ,

$$W_1(x, y) = W(x, y) \geq \frac{1}{2\pi a} \int_c W ds \geq \frac{1}{2\pi a} \int_c W_1 ds$$

pour toute circonférence dans  $T$ .

Donc, par la propriété (II), on voit que  $W_1$  est surharmonique dans  $T$ .

5. — *Le problème de Dirichlet pour un domaine quelconque.* — Nous pouvons maintenant faire voir comment on peut résoudre le problème de Dirichlet dans le cas le plus général où la solution existe.

Mais, pour ne pas introduire des complications inutiles, nous nous bornerons au cas où il existe un point extérieur à  $T$ . Alors, par une inversion, nous pouvons revenir au cas où  $T$  est un domaine borné.

Soit  $t$  l'ensemble des points frontières de  $T$ ;  $t$  est un ensemble fermé. Nous empruntons le théorème, maintenant assez bien connu, qui dit que si  $f(P)$  est une fonction définie et continue sur un ensemble borné et fermé  $t$ , il existe une fonction  $F(P)$  continue dans tout le plan, qui sur  $t$ , coïncide avec  $f(P)$ . Appelons une telle fonction  $F(P)$  une extension continue de  $f(P)$  à tout le plan.

Nous commençons par le cas où cette extension est réalisée par un polynôme surharmonique. C'est-à-dire que nous posons le problème suivant: Etant donné un domaine borné  $T$ , et les valeurs  $f(P)$  sur la frontière  $t$  de  $T$  que prend un polynôme en

les coordonnées  $(x, y)$  de  $P$ , surharmonique dans  $T$ , on demande de trouver une fonction  $U$ , harmonique dans  $T$ , continue dans  $T + t$ , qui prenne les valeurs  $f(P)$  sur  $t$ .

Soit  $R_1, R_2, R_3, \dots$  une suite infinie de régions fermées, non nécessairement distinctes, et dont chacune jouit des propriétés suivantes:

a)  $R_i$  est dans  $T + t$ .

b) Chaque point de  $T$  est intérieur à un cercle qui est dans une infinité des  $R_i$ .

c) On sait résoudre le problème de Dirichlet pour chaque  $R_i$ .

Par exemple, les  $R_i$  peuvent être les sphères employées par Poincaré dans sa méthode de balayage.

On forme maintenant une suite infinie de fonctions:

$W_0$ :  $W_0$  est le polynome surharmonique donné, dont les valeurs sur la frontière  $t$  sont  $f(P)$ ;

$W_1$ : dans  $R_1$ ,  $W_1$  est égale à la fonction harmonique dans  $R_1$  avec les mêmes valeurs sur la frontière de  $R_1$  que  $W_0$ , dans  $T + t - R_1$ ,  $W_1$  est égale à  $W_0$ .

.....

$W_n$ : dans  $R_n$ ,  $W_n$  est égale à la fonction harmonique dans  $R_n$ , avec les mêmes valeurs sur la frontière de  $R_n$  que  $W_{n-1}$ , dans  $T + t - R_n$ ,  $W_n$  est égale à  $W_{n-1}$ .

.....

Les fonctions  $W_i$  sont continues, et, d'après la propriété (IV) des fonctions surharmoniques, elles sont toutes surharmoniques dans  $T$ . Chaque  $W_i$  a les valeurs  $f(P)$  sur  $t$ . La suite  $W_1, W_2, W_3 \dots$  est monotone, jamais croissante. Elle est toujours plus grande que le minimum de  $f(P)$ . *Donc la suite converge en chaque point de  $T + t$ .*

Soit  $P$  un point quelconque de  $T$ . Soient  $R_{n_1}, R_{n_2}, R_{n_3}, \dots$  les régions qui contiennent un cercle fixe  $\sigma$  ayant  $P$  comme centre. Alors la suite partielle infinie  $W_{n_1}, W_{n_2}, W_{n_3} \dots$  est convergente, à termes harmoniques dans  $\sigma$  et monotone. D'après un théorème de Harnack, cette suite converge uniformément dans  $\sigma'$  concentrique à  $\sigma$  et plus petit. Puisque la suite  $W_1, W_2, W_3, \dots$  est monotone et contient la suite  $W_{n_1}, W_{n_2}, W_{n_3}, \dots$ , la première suite aussi converge uniformément dans  $\sigma'$ .

Alors, par le théorème de Heine-Borel, la suite  $W_1, W_2, W_3, \dots$  converge *uniformément* dans chaque région fermée dans  $T$ , et la limite  $U$  est harmonique dans  $T$ .

Nous verrons tout à l'heure que  $U$  est la solution du problème de Dirichlet si la solution existe. Tout d'abord, il s'agit de lever certaines restrictions.

Soit  $F(P)$  un polynome donné, et soit  $M$  le maximum de  $\nabla^2 F(P)$  dans  $T + t$ . Alors

$$F(P) = F(P) - \frac{M}{6}(x^2 + y^2 + z^2) - \left[ -\frac{M}{6}(x^2 + y^2 + z^2) \right]$$

est la différence  $F''(P) - F'(P)$  de deux polynomes surharmoniques dans  $T$ . Si donc, nous formons les suites  $W_0'', W_1'', W_2'' \dots$  et  $W_0', W_1', W_2' \dots$  correspondant à  $F''(P)$  et  $F'(P)$ , la suite  $W_0 = W_0'' - W_0', W_1 = W_1'' - W_1', \dots$  sera la suite correspondant à  $F(P)$  et elle sera uniformément convergente dans chaque région fermée dans  $T$ , et la limite  $U$  sera harmonique dans  $T$ .

De plus, si  $m \leq F(P) \leq M$  sur  $t$ , alors  $m \leq U \leq M$  dans  $T$ .

Car, à chaque  $\varepsilon > 0$ , il correspond une région  $R$ , dans  $T$ , telle que dans  $T + t - R$ ,  $m - \varepsilon \leq W_i \leq M + \varepsilon$ . C'est évident pour  $i = 0$ . Mais en remplaçant  $W_i$  dans une région intérieure à  $T + t$  par une fonction harmonique dans cette région avec les mêmes valeurs sur la frontière que  $W_i$ , on n'augmente jamais le maximum de  $W_i$ , on ne diminue pas le minimum. Par conséquent  $m - \varepsilon \leq U \leq M + \varepsilon$ , et puisque cela a lieu pour chaque  $\varepsilon > 0$ ,  $m \leq U \leq M$ .

Maintenant, soit  $f(P)$  une fonction arbitraire définie et continue sur  $t$ . Soit  $F(P)$  une extension continue de  $f(P)$  dans tout le plan. Soit  $C$  un cercle contenant  $T + t$ . Etant donné  $\varepsilon > 0$ , il existe, d'après le théorème de Weierstrass, un polynome  $G_\varepsilon(P)$  tel que  $|G_\varepsilon(P) - F(P)| < \varepsilon$  dans  $C$ , et par conséquent, tel que

$$G_\varepsilon(P) - \varepsilon < F(P) < G_\varepsilon(P) + \varepsilon$$

dans  $C$ . De ces inégalités, on conclut que la suite  $W_1, W_2, \dots$  correspondant à  $F(P)$  converge uniformément dans chaque région fermée dans  $T$ , et que la fonction limite  $U$  est harmonique dans  $T$ .

6. — *Les valeurs périphériques.* — Nous savons maintenant faire correspondre une fonction  $U$ , harmonique dans  $T$ , à chaque domaine borné  $T$ , et à chaque fonction continue  $f(P)$  sur la frontière de  $T$ . Il reste l'étude des limites de  $U$  aux points de  $t$ . On l'entreprend par la notion de barrière, introduite par Poincaré<sup>1</sup>, perfectionnée par Lebesgue<sup>2</sup>.

La fonction  $U(P, p)$  est une *barrière pour  $T$  au point  $p$*  de la frontière  $t$  de  $T$  si elle est surharmonique dans  $T$ , si elle a la limite 0 en  $p$ , et si en dehors de chaque cercle dont le centre est  $p$ , elle a une borne inférieure positive.

Nous démontrerons qu'en chaque point  $p$  de  $T$  où une barrière existe,  $U$  a la limite  $f(p)$ . En effet, soit  $F(P)$  l'extension continue de  $f(p)$  avec laquelle on forme la suite  $W_0, W_1, W_2, \dots$ . Soit  $\sigma$  un cercle de centre  $p$  tel que dans  $\sigma$

$$F(P) < f(p) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

En dehors de ce cercle,  $F(P)$  aura une borne supérieure positive  $M$ , et la barrière  $U(P, p)$  aura une borne inférieure positive  $m$ . Donc

$$F(P) < f(p) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{m} U(P, p)$$

dans tout le domaine  $T$ . La fonction à droite est surharmonique. Il s'ensuit que  $W_0 = F(P), W_1, W_2, \dots$  satisfont à la même inégalité, et par conséquent,

$$U \leq f(p) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{m} U(P, p).$$

Dans un cercle  $\sigma'$ , concentrique à  $\sigma$ , dans lequel  $U(P, p) < \frac{m\varepsilon}{2M}$ ,

$$U \leq f(p) + \varepsilon.$$

De même, on démontre qu'il y a un cercle  $\sigma''$  dans lequel

$$U \geq f(p) - \varepsilon.$$

Donc  $U$  a bien la valeur limite  $f(p)$  quand  $P$  tend vers  $p$ .

<sup>1</sup> Théorie du Potentiel newtonien, Paris (1899), § 131, p. 286.

<sup>2</sup> L. c.

On sait que la condition nécessaire et suffisante pour que le problème de Dirichlet soit résoluble pour le domaine  $T$  et pour chaque fonction continue périphérique  $f(P)$  est qu'il existe une barrière en chaque point de la frontière  $t$  de  $T$ <sup>1</sup>. Donc *la fonction  $U$  est la solution du problème de Dirichlet quand la solution existe.* Mais, que la solution existe ou non,  $U$  est harmonique dans  $T$  et prend la valeur périphérique donnée en chaque point régulier de la frontière. Les points réguliers sont les points en lesquels les barrières existent.

7. — *Construction des barrières; remarques.* — Soit la région  $T + t$  telle que à chaque point  $p$  de  $t$  correspond un cercle  $\sigma$  dont la circonférence passe par  $p$ , mais qui n'a pas de points communs avec  $T$ . Soit  $\sigma'$  un cercle dans  $\sigma$ , tangent à  $\sigma$  en  $p$ , et soit  $r$  la distance du centre de  $\sigma'$  au point variable  $P$ . Alors  $U(P, p) = \log \frac{r}{a}$  est une barrière pour  $T$  au point  $p$ , où  $a$  est le rayon de  $\sigma'$ . Donc le problème de Dirichlet est possible pour un tel domaine. C'est le critère de Poincaré.

Si on fait la représentation conforme du demi-plan  $v > 0$  du plan de  $w = u + iv$  sur le plan de  $z = x + iy$ , bordé par le segment  $y = 0$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ , la fonction  $v = v(x, y)$  sera positive dans tout le plan à l'exception du segment, où elle est nulle. Puisque une fonction harmonique reste harmonique quand on fait une transformation homographique ou un mouvement euclidien du plan, on peut dire que le problème de Dirichlet est possible pour tout domaine tel que chaque point  $p$  de  $t$  soit l'extrémité d'un segment de droite qui a, avec  $T + t$ , ce seul point commun.

Tout ce qui a été dit dans les paragraphes précédents est aussi valable pour les domaines dans l'espace à trois dimensions. Pour  $0 < n < 1$ , on peut trouver une solution  $P_n(u)$  de l'équation de Legendre

$$\frac{d}{du} \left[ (1 - u^2) \frac{dP_n}{du} \right] + n(n+1) P_n(u) = 0, \quad u = \cos \vartheta$$

<sup>1</sup> KELLOGG, Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences, LVIII (1923), p. 527.

qui est analytique et positive pour  $\mathfrak{D} < \mathfrak{D}_0$ , où  $\mathfrak{D}_0$  est aussi voisin de  $\pi$  qu'on veut. La fonction  $r^n P_n(u)$  sera harmonique et positive en dehors d'un cône assez aigu, et nulle à l'origine. Soit  $C$  un cône de même axe et sommet, avec une ouverture un peu plus grande, et soit  $\sigma$  une sphère, aussi petite qu'on veut, avec le sommet de  $C$  comme centre. Sur  $\sigma$ ,  $r^n P_n(u)$  a un minimum positif  $m$  sur  $C$  et en dehors de  $C$ . Soit  $U(P, p)$  égale à  $m$  en dehors de  $\sigma$ , et égale à la plus petite des fonctions  $r^n P_n(u)$  et  $m$  dans  $\sigma$  et en dehors de  $C$ . Alors  $U(P, p)$  est surharmonique sauf aux points à la fois dans  $\sigma$  et dans  $C$ , et est une barrière au sommet de  $C$  pour chaque domaine n'ayant pas de points communs avec l'intérieur de  $C$  dans  $\sigma$ . On a ainsi le critère de Zaremba: le problème de Dirichlet est possible pour tout domaine à trois dimensions dont chaque point  $p$  de la frontière  $t$  est le sommet d'un cône qui, dans un voisinage de  $p$  n'a pas de point commun avec  $T$ .

On peut construire des barrières beaucoup plus générales. Mais nous ne devons pas aller trop loin dans cette direction là.

Terminons avec la remarque que la méthode que nous avons indiquée renferme, dans les traits essentiels, plusieurs méthodes connues.

Si  $R_1, R_2, R_3, \dots$  sont un système de sphères (ou cercles), la méthode devient la méthode de balayage de Poincaré.

Si la suite  $R_1, R_2, \dots$  ne contient que deux régions distinctes, on a le procédé alterné de Schwarz.

Si la suite  $R_1, R_2, R_3, \dots$  est telle que  $R_i$  soit complètement intérieur à  $R_{i+1}$ , quel que soit  $i$ , on a la méthode indiquée par l'auteur<sup>1</sup>, et perfectionnée par M. N. Wiener<sup>2</sup>.

Genève.

---

<sup>1</sup> *L. c.*

<sup>2</sup> *Journal of Mathematics and Physics of the Massachusetts Institute of Technology*, 2<sup>e</sup> ser, No. 70 (Jan. 1924), No. 78 (April 1924).