

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 27 (1928)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR UN POINT D'INTERSECTION DE SIX DROITES  
**Autor:** Franke, Gustav  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-21874>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 11.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

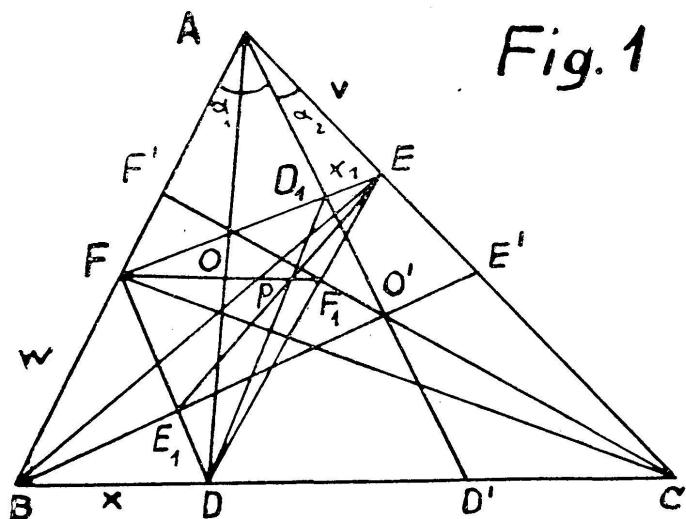
# SUR UN POINT D'INTERSECTION DE SIX DROITES

PAR

Gustav FRANKE (Berlin-Steglitz).

Je vais donner la généralisation d'un théorème, dont M. A. STREIT a démontré quelques cas spéciaux dans *L'Enseignement Mathématique* (Tome XXVI, p. 97-138).

Soit DEF le triangle des pieds des transversales menées par un point quelconque O aux sommets d'un triangle donné ABC. Joignons un point quelconque P aux sommets du triangle DEF. Soient  $D_1$ ,  $E_1$ ,  $F_1$  les points d'intersection de ces transversales avec les côtés du triangle DEF. Nous allons montrer que les droites joignant les sommets du triangle ABC à ces derniers points concourent en un même point  $O'$  (Fig. 1).



*Démonstration.* — Soient  $D'$ ,  $E'$ ,  $F'$  les points d'intersection des transversales  $AD_1$ ,  $BE_1$ ,  $CF_1$  avec les côtés du triangle donné.

Les angles du triangle donné sont divisés par ces transversales de telle façon que:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha; \quad \beta_1 + \beta_2 = \beta; \quad \gamma_1 + \gamma_2 = \gamma.$$

Soient encore  $x, y, z$  resp.  $u, v, w$  les segments non-consécutifs déterminés par les points D, E, F sur les côtés du triangle ABC, et  $x_1, y_1, z_1$  resp.  $u_1, v_1, w_1$  les segments déterminés par les points  $D_1, E_1, F_1$  sur les côtés du triangle DEF, tel que selon le théorème de Ceva:

$$x \cdot y \cdot z = u \cdot v \cdot w \quad \text{et} \quad x_1 \cdot y_1 \cdot z_1 = u_1 \cdot v_1 \cdot w_1.$$

Alors on a:

$$\frac{x_1}{v} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin AD_1 E}; \quad \frac{u_1}{z} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin AD_1 F},$$

d'où il suit:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{u_1}{x_1} \cdot \frac{v}{z}.$$

D'autre part, on a:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta} = \frac{BD'}{AD'}; \quad \frac{\sin \alpha_2}{\sin \gamma} = \frac{CD'}{AD'}.$$

Il en résulte que:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \cdot \frac{BD'}{CD'}.$$

C'est pourquoi il suit:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \cdot \frac{BD'}{CD'} = \frac{u_1}{x_1} \cdot \frac{v}{z},$$

c'est-à-dire:

$$\frac{BD'}{CD'} = \frac{u_1}{x_1} \cdot \frac{v}{z} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}. \quad (1)$$

De même on trouve:

$$\frac{CE'}{AE'} = \frac{v_1}{y_1} \cdot \frac{w}{x} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \quad (2)$$

$$\frac{AF'}{BF'} = \frac{w_1}{z_1} \cdot \frac{u}{y} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \quad (3)$$

En multipliant ces trois équations, on trouve, parce que

$$x_1 \cdot y_1 \cdot z_1 = u_1 \cdot v_1 \cdot w_1 \quad \text{et} \quad x \cdot y \cdot z = u \cdot v \cdot w;$$

$$\frac{BD'}{CD'} \cdot \frac{CE'}{AE'} \cdot \frac{AF'}{BF'} = 1$$

ce qui est la condition du théorème de Ceva. Aussi les transversales  $AD_1$ ,  $BE_1$ ,  $CF_1$  concourent-elles en un même point.

*Réiproque.* — Si l'on joint les sommets du triangle, formé par les pieds de trois transversales se coupant en un point, aux points d'intersection des côtés de ce triangle avec trois transversales joignant les sommets du triangle donné à un point quelconque, ces droites concourent en un même point.

La démonstration se fait d'une manière analogue. On peut aussi avoir recours à la méthode analytique. Cela nous permettra d'établir quelques relations remarquables.

Soient  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$  les équations des côtés  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$  (Fig. 2). Alors les transversales joignant les sommets du triangle aux points  $O$  et  $O'$  sont représentées par les équations suivantes:

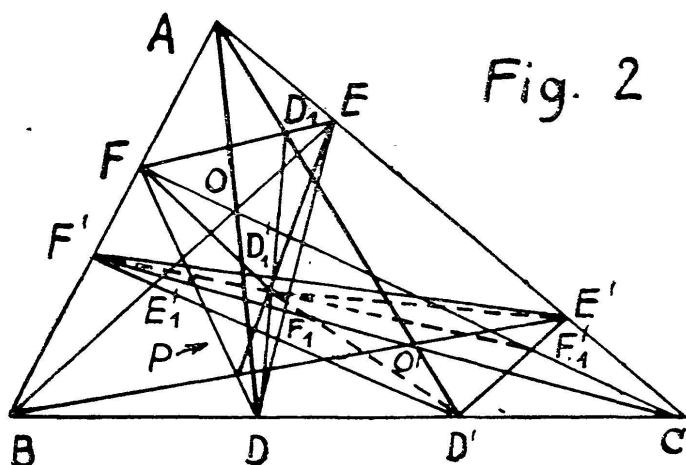


Fig. 2

$$(AD) \quad a_2 x_2 - a_3 x_3 = 0$$

$$(BE) \quad a_3 x_3 - a_1 x_1 = 0$$

et par conséquent:

$$(CF) \quad a_1 x_1 - a_2 x_2 = 0 .$$

En choisissant les paramètres  $p_{1,2,3}$  pour le second triple de transversales, on trouve:

$$(AD') \quad p_2 x_2 - p_3 x_3 = 0$$

$$(BE') \quad p_3 x_3 - p_1 x_1 = 0 ,$$

et par conséquent:

$$(CF') \quad p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 .$$

A l'aide de ces équations on trouve immédiatement les équations des côtés du triangle DEF, qui sont:

$$(EF) \quad -a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

$$(FD) \quad a_1x_1 - a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

$$(DE) \quad a_1x_1 + a_2x_2 - a_3x_3 = 0$$

et les équations des côtés du triangle D'E'F', qui sont:

$$(E'F') \quad -p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = 0 ,$$

$$(E'D') \quad p_1x_1 - p_2x_2 + p_3x_3 = 0 ,$$

$$(D'E') \quad p_1x_1 + p_2x_2 - p_3x_3 = 0 .$$

Pour démontrer que les transversales  $DD_1$ ,  $EE_1$  et  $FF_1$  concourent en un point, il faut maintenant former leurs équations.  $DD_1$  devant passer à la fois par le point d'intersection des droites  $x_1 = 0$  (BC) et (AD) et par le point d'intersection des droites (EF) et (AD'), doit vérifier les équations suivantes:

$$x_1 - q \cdot (a_2x_2 - a_3x_3) = 0 , \quad (1)$$

$$(-a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) - r \cdot (p_2 \cdot x_2 - p_3 \cdot x_3) = 0 . \quad (2)$$

En transformant ces équations et multipliant la première par  $-a_1$ , elles reçoivent la forme qui suit:

$$-a_1x_1 + q \cdot a_1a_2x_2 - q \cdot a_1a_3 \cdot x_3 = 0 \quad (1)$$

$$-a_1x_1 + (a_2 - r \cdot p_2)x_2 + (a_3 + r \cdot p_3)x_3 = 0 . \quad (2)$$

Comme ces deux équations représentent la même droite, les coefficients des coordonnées doivent être égaux, c'est-à-dire:

$$q \cdot a_1 \cdot a_2 = a_2 - r \cdot p_2$$

$$-q \cdot a_1 \cdot a_3 = a_3 + r \cdot p_3 ,$$

d'où il suit:

$$q = \frac{a_2p_3 + a_3p_2}{a_1 \cdot (a_2p_3 - a_3p_2)} .$$

En substituant cette valeur dans (1), on obtient l'équation de la droite  $DD_1$  sous la forme suivante:

$$(DD_1) \quad a_1x_1 \cdot \frac{a_2p_3 - a_3p_2}{a_2p_3 + a_3p_2} - a_2x_2 + a_3x_3 = 0 .$$

Par permutation circulaire on trouve les équations de  $EE_1$  et  $FF_1$ :

$$(EE_1) \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 \cdot \frac{a_3 p_1 - a_1 p_3}{a_3 p_1 + a_1 p_3} - a_3 x_3 = 0 .$$

$$(FF_1) \quad -a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \cdot \frac{a_1 p_2 - a_2 p_1}{a_1 p_2 + a_2 p_1} = 0 .$$

Le déterminant des coefficients de ces trois équations étant nul, les trois transversales concourent en un même point.

Il est important de déterminer la situation de ce point. En employant une formule connue, on trouve que ses coordonnées sont:

$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{p_2 a_3 + p_3 a_2}{p_1 a_2 + p_2 a_1} ; \quad \frac{x_2}{x_3} = \frac{p_1 a_3 + p_3 a_1}{p_1 a_2 + p_2 a_1}$$

ou:

$$x_1 : x_2 : x_3 = (p_2 a_3 + p_3 a_2) : (p_3 a_1 + p_1 a_3) : (p_1 a_2 + p_2 a_1) .$$

Maintenant je considère le triangle  $D'E'F'$ . Soient  $D'_1$ ,  $E'_1$  et  $F'_1$  les points d'intersection des côtés de ce triangle avec les transversales  $AO$ ,  $BO$ ,  $CO$ . Alors il est évident que les transversales  $D'D'_1$ ,  $E'E'_1$  et  $F'F'_1$  se coupent aussi en un point.

Les équations de ces droites sont obtenues de la même manière ou encore en remplaçant simplement les  $a_1$  par les  $p_1$  et les  $p_1$  par les  $a_1$ .

Voilà les équations en question:

$$(D'D'_1) \quad p_1 x_1 \cdot \frac{p_2 a_3 - p_3 a_2}{p_2 a_3 + p_3 a_2} - p_2 x_2 + p_3 x_3 = 0 .$$

$$(E'E'_1) \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 \cdot \frac{p_3 a_1 - p_1 a_3}{p_3 a_1 + p_1 a_3} - p_3 x_3 = 0 .$$

$$(F'F'_1) \quad -p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 \cdot \frac{p_1 a_2 - p_2 a_1}{p_1 a_2 + p_2 a_1} = 0 .$$

Il est facile de constater que les coordonnées du point d'intersection de ces trois droites sont:

$$x_1 : x_2 : x_3 = (p_2 a_3 + p_3 a_2) : (p_3 a_1 + p_1 a_3) : (p_1 a_2 + p_2 a_1) .$$

Comme on voit, le point d'intersection des transversales  $DD_1$ ,  $EE_1$ ,  $FF_1$  et celui des transversales  $D'D'_1$ ,  $E'E'_1$ ,  $F'F'_1$  ont les mêmes coordonnées; c'est-à-dire ces transversales concourent toutes les six en un même point.