Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 27 (1928)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UN POINT D'INTERSECTION DE SIX DROITES
Autor: Franke, Gustav
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21874

SUR UN POINT D'INTERSECTION DE SIX DROITES

PAR

Gustav FRANKE (Berlin-Steglitz).

Je vais donner la généralisation d'un théorème, dont M. A. STREIT a démontré quelques cas spéciaux dans *L'Enseignement Mathématique* (Tome XXVI, p. 97-138).

Soit DEF le triangle des pieds des transversales menées par un point quelconque O aux sommets d'un triangle donné ABC. Joignons un point quelconque P aux sommets du triangle DEF. Soient D_1, E_1, F_1 les points d'intersection de ces transversales avec les côtés du triangle DEF. Nous allons montrer que les droites joignant les sommets du triangle ABC à ces derniers points concourent en un même point O′ (Fig. 1).

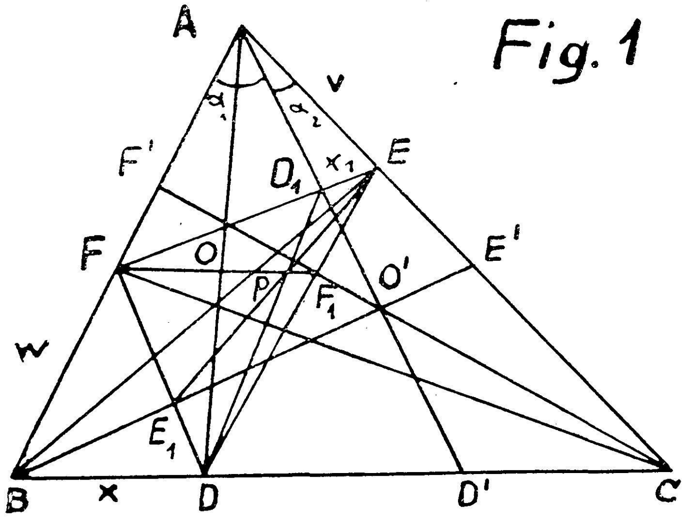

Fig. 1

Démonstration. — Soient D′, E′, F′ les points d'intersection des transversales AD_1, BE_1, CF_1 avec les côtés du triangle donné.

Les angles du triangle donné sont divisés par ces transversales de telle façon que:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha \ ; \qquad \beta_1 + \beta_2 = \beta \ ; \qquad \gamma_1 + \gamma_2 = \gamma \ .$$

Soient encore x, y, z resp. u, v, w les segments non-consécutifs déterminés par les points D, E, F sur les côtés du triangle ABC, et x_1, y_1, z_1 resp. u_1, v_1, w_1 les segments déterminés par les points D_1, E_1, F_1 sur les côtés du triangle DEF, tel que selon le théorème de Ceva:

$$x \cdot y \cdot z = u \cdot v \cdot w \qquad \text{et} \qquad x_1 \cdot y_1 \cdot z_1 = u_1 \cdot v_1 \cdot w_1 \ .$$

Alors on a:

$$\frac{x_1}{v} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin AD_1E} \ ; \qquad \frac{u_1}{z} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin AD_1F} \ ,$$

d'où il suit:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{u_1}{x_1} \cdot \frac{v}{z} \ .$$

D'autre part, on a:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta} = \frac{BD'}{AD'} \ ; \qquad \frac{\sin \alpha_2}{\sin \gamma} = \frac{CD'}{AD'} \ .$$

Il en résulte que:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \cdot \frac{BD'}{CD'} \ .$$

C'est pourquoi il suit:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \cdot \frac{BD'}{CD'} = \frac{u_1}{x_1} \cdot \frac{v}{z} \ ,$$

c'est-à-dire:

$$\frac{BD'}{CD'} = \frac{u_1}{x_1} \cdot \frac{v}{z} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \ . \qquad (1)$$

De même on trouve:

$$\frac{CE'}{AE'} = \frac{v_1}{y_1} \cdot \frac{w}{x} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \qquad (2)$$

$$\frac{AF'}{BF'} = \frac{w_1}{z_1} \cdot \frac{u}{y} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \qquad (3)$$

En multipliant ces trois équations, on trouve, parce que

$$x_1 \cdot y_1 \cdot z_1 = u_1 \cdot v_1 \cdot w_1 \qquad \text{et} \qquad x \cdot y \cdot z = u \cdot v \cdot w:$$

$$\frac{BD'}{CD'} \cdot \frac{CE'}{AE'} \cdot \frac{AF'}{BF'} = 1$$

ce qui est la condition du théorème de Ceva. Aussi les transversales AD_1, BE_1, CF_1 concourent-elles en un même point.

Réciproque. — Si l'on joint les sommets du triangle, formé par les pieds de trois transversales se coupant en un point, aux points d'intersection des côtés de ce triangle avec trois transversales joignant les sommets du triangle donné à un point quelconque, ces droites concourent en un même point.

La démonstration se fait d'une manière analogue. On peut aussi avoir recours à la méthode analytique. Cela nous permettra d'établir quelques relations remarquables.

Soient $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ les équations des côtés BC, AC, AB (Fig. 2). Alors les transversales joignant les sommets du triangle aux points O et O′ sont représentées par les équations suivantes:

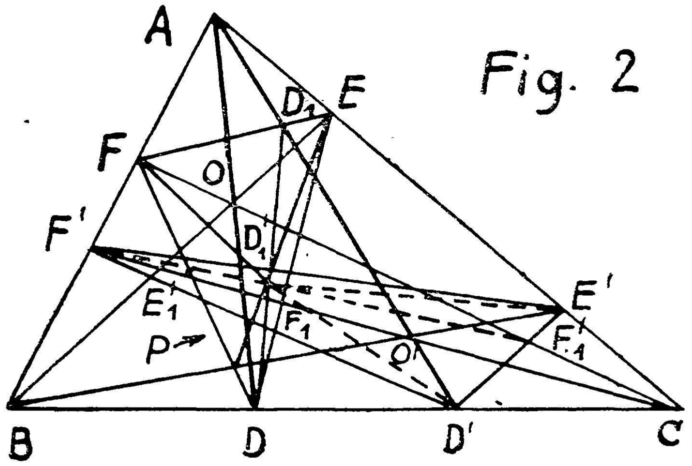

Fig. 2

$$\text{(AD)} \quad a_2 x_2 - a_3 x_3 = 0$$
$$\text{(BE)} \quad a_3 x_3 - a_1 x_1 = 0$$

et par conséquent:

$$\text{(CF)} \quad a_1 x_1 - a_2 x_2 = 0 \, .$$

En choisissant les paramètres $p_{1,2,3}$ pour le second triple de transversales, on trouve:

$$\text{(AD')} \quad p_2 x_2 - p_3 x_3 = 0$$
$$\text{(BE')} \quad p_3 x_3 - p_1 x_1 = 0 \, ,$$

et par conséquent:

$$\text{(CF')} \quad p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \, .$$

A l'aide de ces équations on trouve immédiatement les équations des côtés du triangle DEF, qui sont:

$$
\begin{array}{ll}
(\mathrm{EF}) & -a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0 \\
(\mathrm{FD}) & a_1 x_1 - a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0 \\
(\mathrm{DE}) & a_1 x_1 + a_2 x_2 - a_3 x_3 = 0
\end{array}
$$

et les équations des côtés du triangle D′ E′ F′, qui sont:

$$
\begin{array}{ll}
(\mathrm{E'F'}) & -p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = 0\ , \\
(\mathrm{E'D'}) & p_1 x_1 - p_2 x_2 + p_3 x_3 = 0\ , \\
(\mathrm{D'E'}) & p_1 x_1 + p_2 x_2 - p_3 x_3 = 0\ .
\end{array}
$$

Pour démontrer que les transversales DD_1, EE_1 et FF_1 concourent en un point, il faut maintenant former leurs équations. DD_1 devant passer à la fois par le point d'intersection des droites $x_1 = 0$ (BC) et (AD) et par le point d'intersection des droites (EF) et (AD′), doit vérifier les équations suivantes:

$$x_1 - q \cdot (a_2 x_2 - a_3 x_3) = 0\ , \tag{1}$$

$$(-a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) - r \cdot (p_2 \cdot x_2 - p_3 x_3) = 0\ . \tag{2}$$

En transformant ces équations et multipliant la première par $-a_1$, elles reçoivent la forme qui suit:

$$-a_1 x_1 + q \cdot a_1 a_2 x_2 - q \cdot a_1 a_3 \cdot x_3 = 0 \tag{1}$$

$$-a_1 x_1 + (a_2 - r \cdot p_2)\, x_2 + (a_3 + r \cdot p_3)\, x_3 = 0\ . \tag{2}$$

Comme ces deux équations représentent la même droite, les coefficients des coordonnées doivent être égaux, c'est-à-dire:

$$
\begin{aligned}
q \cdot a_1 \cdot a_2 &= a_2 - r \cdot p_2 \\
-q \cdot a_1 \cdot a_3 &= a_3 + r \cdot p_3\ ,
\end{aligned}
$$

d'où il suit:

$$q = \frac{a_2 p_3 + a_3 p_2}{a_1 \cdot (a_2 p_3 - a_3 p_2)}\ .$$

En substituant cette valeur dans (1), on obtient l'équation de la droite DD_1 sous la forme suivante:

$$(\mathrm{DD_1}) \quad a_1 x_1 \cdot \frac{a_2 p_3 - a_3 p_2}{a_2 p_3 + a_3 p_2} - a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0\ .$$

Par permutation circulaire on trouve les équations de EE_1 et FF_1:

$$(EE_1) \quad a_1x_1 + a_2x_2 \cdot \frac{a_3p_1 - a_1p_3}{a_3p_1 + a_1p_3} - a_3x_3 = 0 .$$

$$(FF_1) \quad -a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \cdot \frac{a_1p_2 - a_2p_1}{a_1p_2 + a_2p_1} = 0 .$$

Le déterminant des coefficients de ces trois équations étant nul, les trois transversales concourent en un même point.

Il est important de déterminer la situation de ce point. En employant une formule connue, on trouve que ses coordonnées sont:

$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{p_2a_3 + p_3a_2}{p_1a_2 + p_2a_1} ; \qquad \frac{x_2}{x_3} = \frac{p_1a_3 + p_3a_1}{p_1a_2 + p_2a_1}$$

ou:

$$x_1 : x_2 : x_3 = (p_2a_3 + p_3a_2) : (p_3a_1 + p_1a_3) : (p_1a_2 + p_2a_1) .$$

Maintenant je considère le triangle $D'\,E'\,F'$. Soient D_1', E_1' et F_1' les points d'intersection des côtés de ce triangle avec les transversales AO, BO, CO. Alors il est évident que les transversales $D'\,D_1'$, $E'\,E_1'$ et $F'\,F_1'$ se coupent aussi en un point.

Les équations de ces droites sont obtenues de la même manière ou encore en remplaçant simplement les a_1 par les p_1 et les p_1 par les a_1.

Voilà les équations en question:

$$\left(D'D_1'\right) \quad p_1x_1 \cdot \frac{p_2a_3 - p_3a_2}{p_2a_3 + p_3a_2} - p_2x_2 + p_3x_3 = 0 .$$

$$\left(E'E_1'\right) \quad p_1x_1 + p_2x_2 \cdot \frac{p_3a_1 - p_1a_3}{p_3a_1 + p_1a_3} - p_3x_3 = 0 .$$

$$\left(F'F_1'\right) \quad -p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 \cdot \frac{p_1a_2 - p_2a_1}{p_1a_2 + p_2a_1} \equiv 0 .$$

Il est facile de constater que les coordonnées du point d'intersection de ces trois droites sont:

$$x_1 : x_2 : x_3 = (p_2a_3 + p_3a_2) : (p_3a_1 + p_1a_3) : (p_1a_2 + p_2a_1) .$$

Comme on voit, le point d'intersection des transversales DD_1, EE_1, FF_1 et celui des transversales $D'\,D_1'$, $E'\,E_1'$, $F'\,F_1'$ ont les mêmes coordonnées; c'est-à-dire ces transversales concourent toutes les six en un même point.