



Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## II

5. — Nous poserons

$$\left\{ \begin{array}{l} s'_0 = y_{1+h} + y_{2+h} + y_{3+h} + \dots + y_{n+h} \\ s''_0 = y_{-1+h} + y_{-2+h} + y_{-3+h} + \dots + y_{-n'+h} \end{array} \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s'_1 = y_{1+h} + 2y_{2+h} + 3y_{3+h} + \dots + ny_{n+h} \\ s''_1 = y_{-1+h} + 2y_{-2+h} + 3y_{-3+h} + \dots + n'y_{-n'+h} \end{array} \right. \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s'_2 = y_{1+h} + 2^2y_{2+h} + 3^2y_{3+h} + \dots + n^2y_{n+h} \\ s''_2 = y_{-1+h} + 2^2y_{-2+h} + 3^2y_{-3+h} + \dots + n'^2y_{-n'+h} \end{array} \right. \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S'_0 = Y_{1+h} + Y_{2+h} + Y_{3+h} + \dots + Y_{n+h} \\ S''_0 = Y_{-1+h} + Y_{-2+h} + Y_{-3+h} + \dots + Y_{-n'+h} \end{array} \right. \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S'_1 = Y_{1+h} + 2Y_{2+h} + 3Y_{3+h} + \dots + nY_{n+h} \\ S''_1 = Y_{-1+h} + 2Y_{-2+h} + 3Y_{-3+h} + \dots + n'Y_{-n'+h} \end{array} \right. \quad (13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S'_2 = Y_{1+h} + 2^2Y_{2+h} + 3^2Y_{3+h} + \dots + n^2Y_{n+h} \\ S''_2 = Y_{-1+h} + 2^2Y_{-2+h} + 3^2Y_{-3+h} + \dots + n'^2Y_{-n'+h} \end{array} \right. \quad (14)$$

$$\lambda = mpq + ph \quad (15) \quad \mu = mpq - qh \quad (16)$$

Si l'on donne à  $n$ ,  $n'$  des valeurs soumises aux conditions déjà énoncées au N° 2:

$$\begin{aligned} mp - n - h \geq 0, \quad mq + n + h \geq 0, \quad mp - n' + h \geq 0, \\ mq + n' + h \geq 0, \end{aligned}$$

on a les formules EXACTES suivantes, *exactes quels que soient*  $n$ ,  $n'$ :

$$h = \lambda - \mu \quad (17)$$

$$\lambda s'_0 - \mu(s'_0 + y_h - y_{n+h}) + s'_1 - qny_{n+h} = 0 \quad (18)$$

$$-\lambda(s''_0 + y_h - y_{-n'+h}) + \mu s''_0 + s''_1 - pn'y_{-n'+h} = 0 \quad (19)$$

$$\lambda(s'_0 - s'_1) + \mu(s'_1 - ny_{n+h}) + ps'_1 - s'_2 + qn^2y_{n+h} = 0 \quad (20)$$

$$\lambda(s''_0 - n'y_{-n'+h}) + \mu(s''_0 - s''_1) + qs''_1 - s''_2 + pn'^2y_{-n'+h} = 0 \quad (21)$$

Les formules (18) à (21) sont nouvelles. Voici comment on les obtient.

Ecrivons comme il suit les formules (6'), (7') :

$$(\mu + qx)y_{-x+h} + [(x-1)p - \lambda]y_{-x+1-h} = 0 .$$

$$(\lambda + px)y_{x+h} + [(x-1)q - \mu]y_{x-1+h} = 0 ; \quad (6''), (7'')$$

faisons  $x = 1, 2, 3, \dots n$  dans (7'') et ajoutons les résultats obtenus: après réductions, on trouve la formule (18).

On déduit la formule (19) de la formule (18) en comparant (6'') et (7'') : il suffit de changer dans (18), les  $s'$  en  $s''$ ,  $p$  en  $q$ ,  $n$  en  $n'$ ,  $\lambda$  en  $\mu$ .

Pour obtenir (20), on multiplie (7'') par  $x-1$  et on écrit le résultat

$$[px^2 + (\lambda - p)x - \lambda]y_{x+h} + [(x-1)^2q - \mu(x-1)]y_{x-1+h} = 0 .$$

Dans cette formule, on fait encore  $x = 1, 2, 3, \dots n$ , on ajoute les résultats et cela donne la formule (20). De (20), on déduit (21), comme de (18) on a déduit (19).

Les formules (18) à (21) *généralisent* d'autres formules plus simples, relatives au cas de  $h = 0$ , que j'ai données peu après M. Ragnar FRISCH, dont j'ignorais les travaux <sup>1</sup>.

Observons que les formules relatives au cas de  $h = 0$  ne nous seraient ici d'aucune utilité.

*Les formules (18) à (21) se simplifient beaucoup si  $n, n'$  sont assez grands pour qu'on puisse négliger les termes en  $y_{n+h}, y_{-n+h}$ , ce qui est toujours le cas dans les statistiques que nous visons.*

Elles deviennent, en effet, dans cette hypothèse

$$-\lambda s'_0 + \mu(s'_0 + y_h) = s'_1 \quad (22)$$

$$\lambda(s''_0 + y_h) - \mu s''_0 = s''_1 \quad (23)$$

$$\lambda(s'_0 - s'_1) + \mu s'_1 = s'_2 - p s'_1 \quad (24)$$

$$\lambda s''_1 + \mu(s''_0 - s''_1) = s''_2 - q s''_1 . \quad (25)$$

<sup>1</sup> D. MIRIMANOFF, « A propos d'une formule de M. de Montessus de Ballore », *Enseignement Mathématique*, XXVI<sup>e</sup> année, 1927. M. Mirimanoff propose d'appeler les formules relatives au cas de  $h = 0$ : formules de Frisch-Montessus de Ballore. J'ai donné les formules relatives au cas de  $h = 0$ , dans: *Ann. Soc. Scient. de Bruxelles*, 1927: « La Formule fondamentale de la Statistique ».

Nous leur adjoindrons la formule

$$y_h + s'_0 + s''_0 = 1 \quad (26)$$

qui, elle aussi, est approchée, et dont l'approximation est de même ordre que celle des formules (22) à (25).

6. — Les formules (15), (16), (17), (22)-(26) vont nous fournir l'instrument de calcul *nécessaire et suffisant* pour l'étude des questions qui suivront.

En les transformant algébriquement, en abandonnant les sommes  $s$  pour les sommes  $S$ , qui se présentent (et non pas les  $s$ ) dans les calculs — les calculs de statistique — en posant

$$\begin{cases} A = S'_0 S''_1 + S''_0 S'_1 \\ C = S'_2 S''_1 + S''_2 S'_1 - S'_1 S''_1 \\ S = S''_0 + S'_0 + Y_h \end{cases} \quad (27)$$

on déduit des formules (17), (22) à (26):

$$h = \frac{S''_1 - S'_1}{S} \quad (28)$$

$$p = \frac{S'_2}{S'_1} - \frac{C}{A} \frac{S'_0}{S'_1} + h \left( 1 - \frac{S'_0 S''_0}{A} \right) \quad (29)$$

$$q = \frac{S''_2}{S''_1} - \frac{C}{A} \frac{S''_0}{S''_1} - h \left( 1 - \frac{S'_0 S''_0}{A} \right) \quad (30)$$

$$\lambda = \frac{C}{A} + h \frac{S''_0 S''_1}{A} \quad (31)$$

$$\mu = \frac{C}{A} - h \frac{S'_0 S''_1}{A} \quad (32)$$