II

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

II

5. — Nous poserons

$$\left\{\begin{aligned} s_0' &= y_{1+h} + y_{2+h} + y_{3+h} + \dots + y_{n+h} \\ s_0'' &= y_{-1+h} + y_{-2+h} + y_{-3+h} + \dots + y_{-n'+h} \end{aligned}\right. \tag{9}$$

$$\left\{\begin{aligned} s_1' &= y_{1+h} + 2y_{2+h} + 3y_{3+h} + \dots + ny_{n+h} \\ s_1'' &= y_{-1+h} + 2y_{-2+h} + 3y_{-3+h} + \dots + n'y_{-n'+h} \end{aligned}\right. \tag{10}$$

$$\left\{\begin{aligned} s_2' &= y_{1+h} + 2^2y_{2+h} + 3^2y_{3+h} + \dots + n^2y_{n+h} \\ s_2'' &= y_{-1+h} + 2^2y_{-2+h} + 3^2y_{-3+h} + \dots + n'^2y_{-n'+h} \end{aligned}\right. \tag{11}$$

$$\left\{\begin{aligned} S_0' &= Y_{1+h} + Y_{2+h} + Y_{3+h} + \dots + Y_{n+h} \\ S_0'' &= Y_{-1+h} + Y_{-2+h} + Y_{-3+h} + \dots + Y_{-n'+h} \end{aligned}\right. \tag{12}$$

$$\left\{\begin{aligned} S_1' &= Y_{1+h} + 2Y_{2+h} + 3Y_{3+h} + \dots + nY_{n+h} \\ S_1'' &= Y_{-1+h} + 2Y_{-2+h} + 3Y_{-3+h} + \dots + n'Y_{-n'+h} \end{aligned}\right. \tag{13}$$

$$\left\{\begin{aligned} S_2' &= Y_{1+h} + 2^2Y_{2+h} + 3^2Y_{3+h} + \dots + n^2Y_{n+h} \\ S_2'' &= Y_{-1+h} + 2^2Y_{-2+h} + 3^2Y_{-3+h} + \dots + n^2Y_{-n'+h} \end{aligned}\right. \tag{14}$$

$$\lambda = mpq + ph \quad (15) \qquad\qquad \mu = mpq - qh \quad (16)$$

Si l'on donne à n, n' des valeurs soumises aux conditions déjà énoncées au N° 2:

$$mp - n - h \geqq 0 \,, \qquad mq + n + h \geqq 0 \,, \qquad mp - n' + h \geqq 0 \,,$$
$$mq + n' + h \geqq 0 \,,$$

on a les formules EXACTES suivantes, *exactes quels que soient* n, n' *:*

$$h = \lambda - \mu \tag{17}$$

$$\lambda s_0' - \mu(s_0' + y_h - y_{n+h}) + s_1' - qny_{n+h} = 0 \tag{18}$$

$$-\lambda(s_0'' + y_h - y_{-n'+h}) + \mu s_0'' + s_1'' - pn'y_{-n'+h} = 0 \tag{19}$$

$$\lambda(s_0' - s_1') + \mu(s_1' - ny_{n+h}) + ps_1' - s_2' + qn^2y_{n+h} = 0 \tag{20}$$

$$\lambda(s_1'' - n'y_{-n'+n}) + \mu(s_0'' - s_1'') + qs_1'' - s_2'' + pn'^2y_{-n'+h} = 0 \,. \tag{21}$$

Les formules (18) à (21) sont nouvelles. Voici comment on les obtient.

Ecrivons comme il suit les formules (6′), (7′):

$$(\mu + qx) y_{-x+h} + [(x-1)p - \lambda] y_{-x+1-h} = 0 \ .$$

$$(\lambda + px) y_{x+h} + [(x-1)q - \mu] y_{x-1+h} = 0 \ ; \quad (6''),\ (7'')$$

faisons $x = 1, 2, 3, \ldots n$ dans (7″) et ajoutons les résultats obtenus: après réductions, on trouve la formule (18).

On déduit la formule (19) de la formule (18) en comparant (6″) et (7″): il suffit de changer dans (18), les s' en s'', p en q, n en n', λ en μ.

Pour obtenir (20), on multiplie (7″) par $x-1$ et on écrit le résultat

$$[px^2 + (\lambda - p)x - \lambda] y_{x+h} + [(x-1)^2 q - \mu(x-1)] y_{x-1+h} = 0 \ .$$

Dans cette formule, on fait encore $x = 1, 2, 3, \ldots n$, on ajoute les résultats et cela donne la formule (20). De (20), on déduit (21), comme de (18) on a déduit (19).

Les formules (18) à (21) *généralisent* d'autres formules plus simples, relatives au cas de $h = 0$, que j'ai données peu après M. Ragnar Frisch, dont j'ignorais les travaux [1].

Observons que les formules relatives au cas de $h = 0$ ne nous seraient ici d'aucune utilité.

Les formules (18) *à* (21) *se simplifient beaucoup si* n, n′ *sont assez grands pour qu'on puisse négliger les termes en* y_{n+h}, y_{-n+h}, *ce qui est toujours le cas dans les statistiques que nous visons.*

Elles deviennent, en effet, dans cette hypothèse

$$-\lambda s'_0 + \mu(s'_0 + y_h) = s'_1 \qquad (22)$$

$$\lambda(s''_0 + y_h) - \mu s''_0 = s''_1 \qquad (23)$$

$$\lambda(s'_0 - s'_1) + \mu s'_1 = s'_2 - p s'_1 \qquad (24)$$

$$\lambda s''_1 + \mu(s''_0 - s''_1) = s''_2 - q s''_1 \ . \qquad (25)$$

[1] D. Mirimanoff, « A propos d'une formule de M. de Montessus de Ballore », *Enseignement Mathématique*, XXVI[e] année, 1927. M. Mirimanoff propose d'appeler les formules relatives au cas de $h = 0$: formules de Frisch-Montessus de Ballore. J'ai donné les formules relatives au cas de $h = 0$, dans: *Ann. Soc. Scient. de Bruxelles*, 1927: « La Formule fondamentale de la Statistique ».

Nous leur adjoindrons la formule

$$y_h + s'_0 + s''_0 = 1 \tag{26}$$

qui, elle aussi, est approchée, et dont l'approximation est de même ordre que celle des formules (22) à (25).

6. — Les formules (15), (16), (17), (22)-(26) vont nous fournir l'instrument de calcul *nécessaire et suffisant* pour l'étude des questions qui suivront.

En les transformant algébriquement, en abandonnant les sommes s pour les sommes S, qui se présentent (et non pas les s) dans les calculs — les calculs de statistique — en posant

$$\left\{\begin{aligned} A &= S'_0 S''_1 + S''_0 S'_1 \\ C &= S'_2 S''_1 + S''_2 S'_1 - S'_1 S''_1 \\ S &= S''_0 + S'_0 + Y_h \end{aligned}\right. \tag{27}$$

on déduit des formules (17), (22) à (26):

$$h = \frac{S''_1 - S'_1}{S} \tag{28}$$

$$p = \frac{S'_2}{S'_1} - \frac{C}{A}\frac{S'_0}{S'_1} + h\left(1 - \frac{S'_0 S''_0}{A}\right) \tag{29}$$

$$q = \frac{S''_2}{S''_1} - \frac{C}{A}\frac{S''_0}{S''_1} - h\left(1 - \frac{S'_0 S''_0}{A}\right) \tag{30}$$

$$\lambda = \frac{C}{A} + h\frac{S''_0 S'_1}{A} \tag{31}$$

$$\mu = \frac{C}{A} - h\frac{S'_0 S''_1}{A}\,. \tag{32}$$