Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 27 (1928)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: STATISTIQUES ET PROBABILITÉS

Autor: de Montessus de Ballore, R.

Kapitel: II

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21869

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 17.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

II

5. — Nous poserons

$$\left\{\begin{aligned} s_0' &= y_{1+h} + y_{2+h} + y_{3+h} + \dots + y_{n+h} \\ s_0'' &= y_{-1+h} + y_{-2+h} + y_{-3+h} + \dots + y_{-n'+h} \end{aligned}\right. \tag{9}$$

$$\left\{\begin{aligned} s_1' &= y_{1+h} + 2y_{2+h} + 3y_{3+h} + \dots + ny_{n+h} \\ s_1'' &= y_{-1+h} + 2y_{-2+h} + 3y_{-3+h} + \dots + n'y_{-n'+h} \end{aligned}\right. \tag{10}$$

$$\left\{\begin{aligned} s_2' &= y_{1+h} + 2^2y_{2+h} + 3^2y_{3+h} + \dots + n^2y_{n+h} \\ s_2'' &= y_{-1+h} + 2^2y_{-2+h} + 3^2y_{-3+h} + \dots + n'^2y_{-n'+h} \end{aligned}\right. \tag{11}$$

$$\left\{\begin{aligned} S_0' &= Y_{1+h} + Y_{2+h} + Y_{3+h} + \dots + Y_{n+h} \\ S_0'' &= Y_{-1+h} + Y_{-2+h} + Y_{-3+h} + \dots + Y_{-n'+h} \end{aligned}\right. \tag{12}$$

$$\left\{\begin{aligned} S_1' &= Y_{1+h} + 2Y_{2+h} + 3Y_{3+h} + \dots + nY_{n+h} \\ S_1'' &= Y_{-1+h} + 2Y_{-2+h} + 3Y_{-3+h} + \dots + n'Y_{-n'+h} \end{aligned}\right. \tag{13}$$

$$\left\{\begin{aligned} S_2' &= Y_{1+h} + 2^2Y_{2+h} + 3^2Y_{3+h} + \dots + n^2Y_{n+h} \\ S_2'' &= Y_{-1+h} + 2^2Y_{-2+h} + 3^2Y_{-3+h} + \dots + n^2Y_{-n'+h} \end{aligned}\right. \tag{14}$$

$$\lambda = mpq + ph \quad (15) \qquad\qquad \mu = mpq - qh \quad (16)$$

Si l'on donne à n, n' des valeurs soumises aux conditions déjà énoncées au N° 2:

$$mp - n - h \geqq 0\ , \qquad mq + n + h \geqq 0\ , \qquad mp - n' + h \geqq 0\ ,$$
$$mq + n' + h \geqq 0\ ,$$

on a les formules EXACTES suivantes, *exactes quels que soient n, n' :*

$$h = \lambda - \mu \tag{17}$$

$$\lambda s_0' - \mu(s_0' + y_h - y_{n+h}) + s_1' - qny_{n+h} = 0 \tag{18}$$

$$-\lambda(s_0'' + y_h - y_{-n'+h}) + \mu s_0'' + s_1'' - pn'y_{-n'+h} = 0 \tag{19}$$

$$\lambda(s_0' - s_1') + \mu(s_1' - ny_{n+h}) + ps_1' - s_2' + qn^2y_{n+h} = 0 \tag{20}$$

$$\lambda(s_1'' - n'y_{-n'+h}) + \mu(s_0'' - s_1'') + qs_1'' - s_2'' + pn'^2y_{-n'+h} = 0\ . \tag{21}$$

Les formules (18) à (21) sont nouvelles. Voici comment on les obtient.

Ecrivons comme il suit les formules (6′), (7′):

$$(\mu + qx) y_{-x+h} + [(x-1)p - \lambda] y_{-x+1-h} = 0 \ .$$
$$(\lambda + px) y_{x+h} + [(x-1)q - \mu] y_{x-1+h} = 0 \ ; \quad (6''),\ (7'')$$

faisons $x = 1, 2, 3, \ldots n$ dans (7″) et ajoutons les résultats obtenus: après réductions, on trouve la formule (18).

On déduit la formule (19) de la formule (18) en comparant (6″) et (7″): il suffit de changer dans (18), les s' en s'', p en q, n en n', λ en μ.

Pour obtenir (20), on multiplie (7″) par $x-1$ et on écrit le résultat

$$[px^2 + (\lambda - p)x - \lambda] y_{x+h} + [(x-1)^2 q - \mu(x-1)] y_{x-1+h} = 0 \ .$$

Dans cette formule, on fait encore $x = 1, 2, 3, \ldots n$, on ajoute les résultats et cela donne la formule (20). De (20), on déduit (21), comme de (18) on a déduit (19).

Les formules (18) à (21) *généralisent* d'autres formules plus simples, relatives au cas de $h = 0$, que j'ai données peu après M. Ragnar Frisch, dont j'ignorais les travaux [1].

Observons que les formules relatives au cas de $h = 0$ ne nous seraient ici d'aucune utilité.

Les formules (18) *à* (21) *se simplifient beaucoup si* n, n′ *sont assez grands pour qu'on puisse négliger les termes en* y_{n+h}, y_{-n+h}, *ce qui est toujours le cas dans les statistiques que nous visons.*

Elles deviennent, en effet, dans cette hypothèse

$$-\lambda s'_0 + \mu(s'_0 + y_h) = s'_1 \qquad (22)$$

$$\lambda(s''_0 + y_h) - \mu s''_0 = s''_1 \qquad (23)$$

$$\lambda(s'_0 - s'_1) + \mu s'_1 = s'_2 - p s'_1 \qquad (24)$$

$$\lambda s''_1 + \mu(s''_0 - s''_1) = s''_2 - q s''_1 \ . \qquad (25)$$

---

[1] D. Mirimanoff, « A propos d'une formule de M. de Montessus de Ballore », *Enseignement Mathématique*, XXVI[e] année, 1927. M. Mirimanoff propose d'appeler les formules relatives au cas de $h = 0$: formules de Frisch-Montessus de Ballore. J'ai donné les formules relatives au cas de $h = 0$, dans: *Ann. Soc. Scient. de Bruxelles*, 1927: « La Formule fondamentale de la Statistique ».

Nous leur adjoindrons la formule

$$y_h + s_0' + s_0'' = 1 \tag{26}$$

qui, elle aussi, est approchée, et dont l'approximation est de même ordre que celle des formules (22) à (25).

6. — Les formules (15), (16), (17), (22)-(26) vont nous fournir l'instrument de calcul *nécessaire et suffisant* pour l'étude des questions qui suivront.

En les transformant algébriquement, en abandonnant les sommes s pour les sommes S, qui se présentent (et non pas les s) dans les calculs — les calculs de statistique — en posant

$$\left\{\begin{aligned} A &= S_0' S_1'' + S_0'' S_1' \\ C &= S_2' S_1'' + S_2'' S_1' - S_1' S_1'' \\ S &= S_0'' + S_0' + Y_h \end{aligned}\right. \tag{27}$$

on déduit des formules (17), (22) à (26):

$$h = \frac{S_1'' - S_1'}{S} \tag{28}$$

$$p = \frac{S_2'}{S_1'} - \frac{C}{A}\frac{S_0'}{S_1'} + h\left(1 - \frac{S_0' S_0''}{A}\right) \tag{29}$$

$$q = \frac{S_2''}{S_1''} - \frac{C}{A}\frac{S_0''}{S_1''} - h\left(1 - \frac{S_0' S_0''}{A}\right) \tag{30}$$

$$\lambda = \frac{C}{A} + h\frac{S_0'' S_1''}{A} \tag{31}$$

$$\mu = \frac{C}{A} - h\frac{S_0' S_1''}{A}\,. \tag{32}$$