

I

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

sans recourir à aucune représentation approchée, exponentielle ou autre, et que l'étude directe donne des renseignements d'un grand intérêt sur les statistiques <sup>1</sup>.

## I

1. — Tout d'abord, la formule de Stirling permet d'écrire, en logarithmes décimaux :

$$\begin{aligned} \log y_x = & -\log \sqrt{2\pi} + \frac{1}{2} \log \frac{m}{(mp-x)(mq+x)} + (mp-x) \log \frac{mp}{mp-x} \\ & + (mq+x) \log \frac{mq}{mq+x} + \frac{M}{12m} - \frac{M}{12} \times \frac{m}{(mp-x)(mq+x)} ; \\ & -\log \sqrt{2\pi} = \bar{1},6009101 ; \quad M = \log e = 0,4342945 . \quad (2) \end{aligned}$$

Cette formule donne  $y_x$  avec 5 décimales exactes, quand on prend les logarithmes avec 7 décimales.

On peut donc calculer, avec une approximation dépassant les besoins de toutes les statistiques, les valeurs numériques de  $y_x$  pour toutes les valeurs possibles de  $m$  ( $m > 0$ , entier ou non entier), de  $p$  ( $0 < p < 1$ ), de  $q$  ( $p + q = 1$ ), de  $x$  ( $mp - x$ ,  $mq + x$  entiers ou fractionnaires, mais  $mp - x \geq 0$ ,  $mq + x \geq 0$ ).

Quand  $m$ ,  $mp - x$ ,  $mq + x$  sont entiers, on peut aussi calculer  $y_x$  par les Tables de factorielles <sup>2</sup>: les deux procédés donnent les mêmes résultats.

2. — Soit

$$y_x = \frac{1000!}{(100-x)!(900+x)!} 0,1^{100-x} \times 0,9^{900+x} ,$$

c'est la formule (1) pour  $m = 1000$ ;  $p = 0,1$ ;  $q = 0,9$ . Dans le problème de 1000 tirages de boules d'une urne contenant 9 fois

<sup>1</sup> Le lecteur voudra bien se reporter pour les démonstrations des formules qui vont être données aux *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1927 et 1928.

<sup>2</sup> F. J. DUARTE, Tables de  $\log n!$  à 33 décimales, pour toutes les valeurs entières de  $n$ , de  $n = 1$  à  $n = 3000$ . Imprimerie A. Kundig à Genève, 1927, 30 fr. fr.

plus de boules rouges que de boules noires, on sera amené à calculer <sup>1</sup>

$$y_0 = 0,042017 ; y_1 = 0,041970 ; y_2 = 0,041458 ; y_3 = 0,040494 \dots$$

$$y_{-1} = 0,041601 ; y_{-2} = 0,040740 ; y_{-3} = 0,039466 \dots$$

Mais, perdant de vue ce problème de boules tirées d'une urne, on peut de façon semblable, calculer (form. 1) les valeurs de  $y$  pour

$$x = h , \quad x = 1 + h ; \quad x = 2 + h , \dots , \quad x = -1 + h ,$$

$$x = -2 + h , \dots$$

$h$  étant une constante numérique quelconque: la formule (2) le permet.

Aussi bien, mettant la constante  $h$  en évidence, ce n'est plus la fonction (1) que nous étudierons, c'est la fonction plus générale.

$$y_{x+h} = \frac{m!}{(mp - x - h)! (mq + x + h)!} p^{mp-x-h} q^{mq+x+h} \quad (3)$$

où:

$m$  est un nombre positif quelconque, entier ou fractionnaire,

$p, q$  sont des nombres compris entre 0 et 1, dont la somme est 1;

$h$  est un nombre positif ou négatif, ordinairement fractionnaire, voisin dans les applications, de 0, 1, —1;

$x$  est un nombre entier, positif ou négatif: il n'y a pas lieu, dans l'étude des statistiques, de considérer des valeurs fractionnaires de  $x$ ; les valeurs de  $x$  doivent vérifier les inégalités

$$mp - x - h \geq 0 , \quad mq + x + h \geq 0 .$$

3. — On calcule les valeurs de  $y_{x+h}$  par la formule suivante, qui n'est autre que la formule (2) légèrement modifiée

$$\log y_{x+h} = -\log \sqrt{2\pi} + \frac{1}{2} \log \frac{m}{(mp - x - h)(mq + x + h)}$$

$$+ (mp - x - h) \log \frac{mp}{mp - x - h} + (mq + x + h) \log \frac{mq}{mq + x + h}$$

$$+ \frac{M}{12m} - \frac{M}{12} \times \frac{m}{(mp - x - h)(mq + x + h)} ; \quad (4)$$

$$-\log \sqrt{2\pi} = 1,6009101 ; \quad M = \log e = 0,4342945 \quad (\log. \text{ décimaux})$$

<sup>1</sup> Le lecteur trouvera quantités de tableaux de valeurs numériques de  $y_x$  dans: *Annales Soc. Sc. Brux.*, 1926; *Mém. N° 10 de l'Office nat. météor. de France*; *Calcul des probabilités et statistiques*, par R. DE MONTESSUS DE BALLORE, Chiron, Paris, 1926.

Mais quand on a plusieurs valeurs de  $y_{x+h}$  à calculer, il est plus simple, plus rapide, de calculer seulement  $y_h$  par la formule

$$\begin{aligned} \log y_h &= -\log \sqrt{2\pi} + \frac{1}{2} \log \frac{m}{(mp-h)(mq+h)} \\ &+ (mp-h) \log \frac{mp}{mp-h} + (mq+h) \log \frac{mq}{mq+h} \\ &+ \frac{M}{12m} - \frac{M}{12} \times \frac{m}{(mp-h)(mq+h)} ; \quad -\log \sqrt{2\pi} = \bar{1},600\,9101 ; \\ M &= \log e = 0,434\,2945 \quad (\text{log. décimaux}) , \end{aligned} \quad (5)$$

et de calculer *ensuite* les autres valeurs de  $y_h$  par les formules de récurrence

$$\begin{aligned} y_{-1+h} &= \frac{mq+h}{mp-h+1} \frac{p}{q} y_h , \quad y_{-2+h} = \frac{mq+h-1}{mp-h+2} \frac{p}{q} y_{-1+h} , \\ y_{-3+h} &= \frac{mq+h-2}{mp-h+3} \frac{p}{q} y_{-2+h} , \dots \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} y_{1+h} &= \frac{mp-h}{mq+h+1} \frac{q}{p} y_h , \quad y_{2+h} = \frac{mp-h-1}{mq+h+2} \frac{q}{p} y_{1+h} , \\ y_{3+h} &= \frac{mp-h-2}{mq+h+3} \frac{q}{p} y_{2+h} , \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Les formules générales sont

$$y_{-x+h} = \frac{mq+h-(x-1)p}{mp-h+x} \frac{p}{q} y_{-x+1+h} , \quad (6')$$

$$y_{x+h} = \frac{mp-h-(x-1)q}{mq+h+x} \frac{q}{p} y_{x-1+h} . \quad (7')$$

4. — Ce ne sont pas précisément les nombres  $y_x$  de la formule (3) que nous allons considérer, mais les nombres

$$Y_{x+h} = A \frac{m!}{(mp-x-h)!(mq+x+h)} p^{mp-x-h} q^{mq+x+h} = Ay_{x+h}$$

(A constante positive quelconque) (8)

les nombres  $Y_{x+h}$  obéissent, comme les nombres  $y_x$ , aux lois de récurrence (6) et (7).