

Zeitschrift:	L'Enseignement Mathématique
Herausgeber:	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band:	27 (1928)
Heft:	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
Artikel:	SUR LA CONVERGENCE DES SUITES DE FONCTIONS QUASI-ANALYTIQUES
Autor:	Valiron, Georges
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-21868

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Substituons ces valeurs en

$$\Delta^2(\bar{p}, \bar{p}') .$$

Nous aurons après quelques calculs

$$\Delta^2(\bar{p}, \bar{p}') = k(4AC - B^2) \quad (12)$$

ce qui prouve le théorème énoncé et montre en même temps la relation qui existe entre l'expression $4AC - B^2$ et le moment de deux droites fondamentales du connexe (1).

Ainsi à chaque connexe linéo-linéaire (1) appartient une certaine caractéristique, indépendante du choix des coordonnées, qui détermine la position réciproque des deux droites fondamentales du connexe, c'est *le moment des deux droites fondamentales*.

SUR LA CONVERGENCE DES SUITES DE FONCTIONS QUASI-ANALYTIQUES

PAR

Georges VALIRON (Strasbourg).

Je me propose d'étendre dans cette note les théorèmes relatifs aux fonctions holomorphes bornées dans leur ensemble dans un domaine aux fonctions quasi-analytiques satisfaisant à certaines conditions.

1. — La famille des fonctions $f(x)$, dérivables et de dérivée uniformément bornée sur un segment $a \leqq x \leqq b$, ($|f'(x)| < M$ quelle que soit la fonction et quel que soit x sur (a, b)), est une famille de fonctions également continues. Il s'ensuit que, *si une suite de fonctions $f(x; n)$ de la famille converge sur un ensemble E de points denses sur le segment (a, b) , cette suite converge uniformément*

ment sur tout le segment. Partageons, en effet, le segment (a, b) en segments égaux de longueur assez petite pour que, sur chacun d'eux, l'oscillation de chaque fonction de la famille soit moindre que ε . Prenons sur chaque segment partiel un point de x_i de E. Pour tous ces x_i qui sont en nombre fini, on aura

$$|f(x_i; n) - f(x_i; m)| < \varepsilon$$

dès que n et m sont supérieurs à un nombre $N(\varepsilon)$. Si x est un point de (a, b) et x_i le point choisi de E appartenant au même segment partiel, on a, quel que soit n ,

$$|f(x; n) - f(x_i; n)| < \varepsilon.$$

Donc, si n et m sont supérieurs à $N(\varepsilon)$, on a

$$|f(x; n) - f(x; m)| < 3\varepsilon.$$

On déduit de là que *de toute suite de fonctions $f(x)$ de la famille considérée, qui sont en outre bornées dans leur ensemble sur (a, b) , on peut extraire une suite qui converge uniformément sur (a, b) .* Il suffit en effet de faire des extractions successives de façon à obtenir une suite convergeant en une suite de points denses sur (a, b) . De même, le procédé de la diagonale montre que:

I. *Si les fonctions $f(x)$ sont dérивables dans l'intervalle $a < x < b$ et si les fonctions et dérivées sont bornées dans leur ensemble à l'intérieur de cet intervalle I (c'est-à-dire que $|f(x)|$ et $|f'(x)|$ sont inférieurs à un nombre $M(S)$ sur un segment S quelconque appartenant à I), de toute suite de fonctions $f(x)$ on peut extraire une suite uniformément convergente à l'intérieur de I (c'est-à-dire sur tout segment appartenant à I).*

2. — Nous nous appuierons d'autre part sur la proposition suivante:

II. *Si la suite de fonctions $f(x; n)$ converge uniformément vers $F(x)$ sur le segment (a, b) et si ces fonctions ont des dérivées secondes vérifiant sur (a, b) l'inégalité*

$$|f''(x; n)| < M',$$

$F(x)$ est dérivable sur (a, b) et $F'(x)$ est la limite de la suite $f'(x; n)$ qui converge uniformément sur (a, b) .

Supposons en effet que x et $x + h$ appartiennent à (a, b) . On a, d'après la formule de Taylor

$$\left| \frac{f(x + h; n) - f(x; n)}{h} - f'(x; n) \right| < M' \frac{|h|}{2}. \quad (1)$$

En écrivant la même inégalité pour une autre valeur m et en prenant m et n assez grands pour que

$$|f(x; n) - f(x; m)| < |h|^2$$

sur (a, b) , on aura en retranchant

$$|f'(x; n) - f'(x; m)| < M' |h| + 2|h|.$$

La suite $f'(x; n)$ converge donc uniformément sur (a, b) , et si $F^1(x)$ est la fonction limite, on a, en faisant croître n indéfiniment dans (1)

$$\left| \frac{F(x + h) - F(x)}{h} - F^1(x) \right| \leq \frac{1}{2} M' |h|,$$

ce qui achève la démonstration.

On peut évidemment remplacer l'hypothèse faite par d'autres moins restrictives. Il suffit de supposer que le premier membre de (1) tende vers 0 uniformément lorsque h tend vers 0. On montre d'ailleurs aisément que: la suite de fonctions dérivables $f(x; n)$ tendant uniformément vers $F(x)$, la condition nécessaire et suffisante pour que $F'(x)$ existe et que $f'(x; n)$ tende uniformément vers $F'(x)$ est que, ϵ étant donné arbitrairement petit, on ait sur (a, b)

$$\left| \frac{f(x + h; n) - f(x; n)}{h} - f'(x; n) \right| < \epsilon$$

pourvu que $h < h(\epsilon)$ et que $n > N(h)$.

3. — Considérons alors une famille de fonctions quasi-analytiques d'une classe déterminée A_p . La série

$$\sum \frac{1}{A_p}$$

est divergente, et, $f(x)$ étant une fonction de la famille, $f(x)$ est indéfiniment dérivable et l'on a, pour tout entier p , positif ou nul,

$$|f^{(p)}(x)| < M^{p+1} A_p^p. \quad (2)$$

Nous dirons que les fonctions de la famille considérée sont également quasi-analytiques lorsque le nombre M figurant dans (2) est le même pour toutes ces fonctions. En appliquant la proposition II, on voit que

III. Si une suite de fonctions $f(x; n)$ également quasi-analytiques d'une classe A_p converge uniformément sur le segment (a, b) , la fonction limite $F(x)$ est quasi-analytique sur ce segment et de la même classe ; la suite des dérivées $f^{(q)}(x; n)$ converge uniformément sur (a, b) vers $F^{(q)}(x)$.

On peut remarquer que cette proposition reste vraie si, pour chaque entier p , les fonctions de la suite vérifient l'inégalité

$$|f^{(p)}(x; n)| < M^{p+1} A_p^p \quad (3)$$

à partir d'une valeur $N(p)$ de n . Or ces conditions (3) sont nécessairement vérifiées si pour chaque p , positif ou nul, $f^{(p)}(x; n)$ tend uniformément vers $F^{(p)}(x)$, $F(x)$ étant quasi-analytique de la classe A_p . En disant encore dans ce cas que les fonctions de la suite sont également quasi-analytiques de la classe A_p , on voit que cette condition d'égale quasi-analyticité est nécessaire et suffisante pour que le théorème de Weierstrass sur les suites de fonctions holomorphes s'étende à ces fonctions.

Il existe d'ailleurs des suites uniformément convergentes vers une fonction quasi-analytique et dont certaines suites dérivées ne convergent plus. Il suffit de prendre

$$f(x; n) = F(x) + n^{-c} \sin nx ,$$

c étant positif.

On peut former des familles de fonctions également quasi-analytiques en utilisant des séries de Fourier. En prenant par exemple

$$f(x) = \sum a_n e^{-\frac{n}{\log n}} \sin 2\pi n x ,$$

les $|a_n|$ étant bornés, on obtient des fonctions périodiques de la classe $A_p = p \log p$ de M. Denjoy et qui ne sont pas d'une classe inférieure si les a_n ne tendent pas vers 0¹. En prenant des a_n de valeur absolue constante et de signes convenables, on peut

¹ Voir par exemple le Mémoire de M. DE LA VALLÉE-POUSSIN (*Bull. Soc. math.*, 1924).

faire en sorte que la fonction soit effectivement de la classe $p \log p$ en un point donné d'abscisse rationnelle. Soit alors $f(x; 1), f(x; 2), \dots, f(x; n), \dots$ une suite de fonctions qui sont effectivement de la classe considérée chacune en un point au moins, $f(x; n)$ en x_n , les points x_n étant denses sur le segment $0,1$. La fonction $f(x; 1) + f(x; 2)\beta_2$ est de la classe A_p en x_1 et x_2 sauf au plus pour deux valeurs de β_2 . β_2 étant distinct de ces valeurs exceptionnelles,

$$f(x; 1) + \beta_2 f(x; 2) + \beta_3 f(x; 3)$$

est de la classe A_p en x_1, x_2 et x_3 sauf au plus pour deux valeurs de β_3 . On peut continuer ce procédé et il est loisible de supposer que la série $|\Sigma \beta_n|$ converge. On obtient ainsi une infinité de fonctions distinctes qui sont également quasi-analytiques de la classe A_p sur le segment $(0, 1)$ et qui ne sont d'une classe inférieure sur aucune portion du segment.

4. — Les théorèmes sur les fonctions holomorphes bornées dans leur ensemble dans un domaine s'appliquent à une famille \mathcal{F} de fonctions quasi-analytiques dans un intervalle I qui sont également quasi-analytiques d'une classe A_p sur tout segment appartenant à cet intervalle. Des propositions I et III découle l'extension du théorème de M. Montel:

IV. *De toute suite de fonctions de la famille \mathcal{F} on peut extraire une suite qui converge uniformément à l'intérieur de I vers une fonction quasi-analytique de la même classe; les dérivées d'ordre p des fonctions de cette suite convergent uniformément vers la dérivée d'ordre p de la fonction limite.*

Une fonction quasi-analytique sur un segment est identiquement nulle si sa valeur et les valeurs de ses dérivées sont nulles en un point du segment; ses zéros sont donc isolés, la fonction est déterminée d'une façon unique par ses valeurs en une suite de points ayant un point d'accumulation sur ce segment. Le théorème de Vitali s'applique donc:

V. *Si les fonctions $f(x; n)$, également quasi-analytiques de la classe A_p dans un intervalle, convergent en des points de cet intervalle admettant un point limite intérieur à l'intervalle, elles convergent uniformément à l'intérieur de cet intervalle.*

On le montre par le procédé utilisé par M. Montel en s'appuyant sur ce que les fonctions limites de la suite sont toutes égales. De la même façon on établit la proposition suivante, qui complète dans un autre sens le théorème de Stieltjes:

VI. *Si les fonctions $f(x; n)$ sont également quasi-analytiques d'une classe A_p dans un intervalle et si x_0 appartenant à cet intervalle, la suite $f^{(q)}(x_0; n)$ converge pour chaque valeur de q , les fonctions $f(x; n)$ convergent uniformément à l'intérieur de l'intervalle.*

STATISTIQUES ET PROBABILITÉS

PAR

R. DE MONTESSUS DE BALLORE (Paris).

J'appellerai « Fonction de probabilité simple » la fonction

$$y_x = \frac{m!}{(mp - x)! (mq + x)!} p^{mp-x} q^{mq+x}. \quad (1)$$

Elle se présente dès le début du Calcul des Probabilités.

On la retrouve dans la Théorie des Erreurs accidentelles d'observation, dans l'étude des statistiques simples de toute nature: démographie, météorologie, histoire naturelle, applications de la chimie, certains phénomènes physiques, etc.

La représentation *approchée* de la fonction de probabilité simple (1) par l'exponentielle

$$e^{-h^2 x^2}$$

et par les variétés d'exponentielles, a donné beaucoup de mécomptes, il faut avoir le courage de le reconnaître, en dehors de l'étude des erreurs accidentelles d'observation.

Je vais montrer qu'on peut étudier *directement* la fonction (1)