**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 27 (1928)

**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LA CONVERGENCE DES SUITES DE FONCTIONS QUASI-ANALYTIQUES

**Autor:** Valiron, Georges

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-21868

Substituons ces valeurs en

$$\Delta^2(\bar{p}\,,\ \bar{p}') \ .$$

Nous aurons après quelques calculs

$$\Delta^2(\bar{p}\,,\ \bar{p}') = k(4\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2) \tag{12}$$

ce qui prouve le théorème énoncé et montre en même temps la relation qui existe entre l'expression $4\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2$ et le moment de deux droites fondamentales du connexe (1).

Ainsi à chaque connexe linéo-linéaire (1) appartient une certaine caractéristique, indépendante du choix des coordonnées, qui détermine la position réciproque des deux droites fondamentales du connexe, c'est *le moment des deux droites fondamentales.*

---

# SUR LA CONVERGENCE DES SUITES DE FONCTIONS QUASI-ANALYTIQUES

PAR

Georges VALIRON (Strasbourg).

---

Je me propose d'étendre dans cette note les théorèmes relatifs aux fonctions holomorphes bornées dans leur ensemble dans un domaine aux fonctions quasi-analytiques satisfaisant à certaines conditions.

1\. — La famille des fonctions $f(x)$, dérivables et de dérivée uniformément bornée sur un segment $a \leqq x \leqq b$, ($|f'(x)| < \mathrm{M}$ quelle que soit la fonction et quel que soit $x$ sur $(a,b)$), est une famille de fonctions également continues. Il s'ensuit que, *si une suite de fonctions $f(x;\, n)$ de la famille converge sur un ensemble* E *de points denses sur le segment* $(a,b)$, *cette suite converge uniformé-*

*ment sur tout le segment.* Partageons, en effet, le segment $(a,b)$ en segments égaux de longueur assez petite pour que, sur chacun d'eux, l'oscillation de chaque fonction de la famille soit moindre que $\varepsilon$. Prenons sur chaque segment partiel un point de $x_i$ de E. Pour tous ces $x_i$ qui sont en nombre fini, on aura

$$|f(x_i;\ n) - f(x_i;\ m)| < \varepsilon$$

dès que $n$ et $m$ sont supérieurs à un nombre $N(\varepsilon)$. Si $x$ est un point de $(a, b)$ et $x_i$ le point choisi de E appartenant au même segment partiel, on a, quel que soit $n$,

$$|f(x;\ n) - f(x_i;\ n)| < \varepsilon .$$

Donc, si $n$ et $m$ sont supérieurs à $N(\varepsilon)$, on a

$$|f(x;\ n) - f(x;\ m)| < 3\varepsilon .$$

On déduit de là que *de toute suite de fonctions* f(x) *de la famille considérée, qui sont en outre bornées dans leur ensemble sur* (a, b), *on peut extraire une suite qui converge uniformément sur* (a, b). Il suffit en effet de faire des extractions successives de façon à obtenir une suite convergeant en une suite de points denses sur $(a,b)$. De même, le procédé de la diagonale montre que:

I. *Si les fonctions* f(x) *sont dérivables dans l'intervalle* $a<x<b$ *et si les fonctions et dérivées sont bornées dans leur ensemble à l'intérieur de cet intervalle I* (c'est-à-dire que $|f(x)|$ et $|f'(x)|$ sont inférieurs à un nombre M(S) sur un segment S quelconque appartenant à I), *de toute suite de fonctions* f(x) *on peut extraire une suite uniformément convergente à l'intérieur de I* (c'est-à-dire sur tout segment appartenant à I).

2. — Nous nous appuierons d'autre part sur la proposition suivante:

II. *Si la suite de fonctions* f(x;n) *converge uniformément vers* F(x) *sur le segment* (a,b) *et si ces fonctions ont des dérivées secondes vérifiant sur* (a,b) *l'inégalité*

$$|f''(x;\ n)| < M' ,$$

F(x) *est dérivable sur* (a, b) *et* F'(x) *est la limite de la suite* f'(x; n) *qui converge uniformément sur* (a,b).

Supposons en effet que $x$ et $x+h$ appartiennent à $(a, b)$. On a, d'après la formule de Taylor

$$\left|\frac{f(x+h;\ n)-f(x;\ n)}{h}-f'(x;\ n)\right|<\mathrm{M}'\,\frac{|h|}{2}\ . \tag{1}$$

En écrivant la même inégalité pour une autre valeur $m$ et en prenant $m$ et $n$ assez grands pour que

$$|f(x;\ n)-f(x;\ m)|<|h|^2$$

sur $(a, b)$, on aura en retranchant

$$|f'(x;\ n)-f'(x;\ m)|<\mathrm{M}'|h|+2|h|\ .$$

La suite $f'(x; n)$ converge donc uniformément sur $(a, b)$, et si $\mathrm{F}^1(x)$ est la fonction limite, on a, en faisant croître $n$ indéfiniment dans (1)

$$\left|\frac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)}{h}-\mathrm{F}^1(x)\right|\leqq\frac{1}{2}\mathrm{M}'|h|\ ,$$

ce qui achève la démonstration.

On peut évidemment remplacer l'hypothèse faite par d'autres moins restrictives. Il suffit de supposer que le premier membre de (1) tende vers 0 uniformément lorsque $h$ tend vers 0. On montre d'ailleurs aisément que: la suite de fonctions dérivables $f(x; n)$ tendant uniformément vers $\mathrm{F}(x)$, la condition nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{F}'(x)$ existe et que $f'(x; n)$ tende uniformément vers $\mathrm{F}'(x)$ est que, $\varepsilon$ étant donné arbitrairement petit, on ait sur $(a, b)$

$$\left|\frac{f(x+h;\ n)-f(x;\ n)}{h}-f'(x;\ n)\right|<\varepsilon$$

pourvu que $h<h(\varepsilon)$ et que $n>\mathrm{N}(h)$.

3. — Considérons alors une famille de fonctions quasi-analytiques d'une classe déterminée $\mathrm{A}_p$. La série

$$\sum\frac{1}{\mathrm{A}_p}$$

est divergente, et, $f(x)$ étant une fonction de la famille, $f(x)$ est indéfiniment dérivable et l'on a, pour tout entier $p$, positif ou nul,

$$|f^{(p)}(x)|<\mathrm{M}^{p+1}\,\mathrm{A}_p^p\ . \tag{2}$$

Nous dirons que les fonctions de la famille considérée sont *également* quasi-analytiques lorsque le nombre M figurant dans (2) est le même pour toutes ces fonctions. En appliquant la proposition II, on voit que

III. *Si une suite de fonctions* f(x; n) *également quasi-analytiques d'une classe* $A_p$ *converge uniformément sur le segment* (a, b), *la fonction limite* F(x) *est quasi-analytique sur ce segment et de la même classe; la suite des dérivées* $f^{(q)}(x; n)$ *converge uniformément sur* (a, b) *vers* $F^{(q)}(x)$.

On peut remarquer que cette proposition reste vraie si, pour chaque entier $p$, les fonctions de la suite vérifient l'inégalité

$$|f^{(p)}(x;\ n)| < M^{p+1} A_p^p \tag{3}$$

*à partir d'une valeur* N(p) *de* n. Or ces conditions (3) sont nécessairement vérifiées si pour chaque $p$, positif ou nul, $f^{(p)}(x;\ n)$ tend uniformément vers $F^{(p)}(x)$, $F(x)$ étant quasi-analytique de la classe $A_p$. En disant encore dans ce cas que les fonctions de la suite sont également quasi-analytiques de la classe $A_p$, on voit que cette condition d'égale quasi-analyticité est nécessaire et suffisante pour que le théorème de Weierstrass sur les suites de fonctions holomorphes s'étende à ces fonctions.

Il existe d'ailleurs des suites uniformément convergentes vers une fonction quasi-analytique et dont certaines suites dérivées ne convergent plus. Il suffit de prendre

$$f(x;\ n) = F(x) + n^{-c} \sin nx\ ,$$

$c$ étant positif.

On peut former des familles de fonctions également quasi-analytiques en utilisant des séries de Fourier. En prenant par exemple

$$f(x) = \Sigma a_n e^{-\frac{n}{\log n}} \sin 2\pi nx\ ,$$

les $|a_n|$ étant bornés, on obtient des fonctions périodiques de la classe $A_p = p \log p$ de M. Denjoy et qui ne sont pas d'une classe inférieure si les $a_n$ ne tendent pas vers 0[1]. En prenant des $a_n$ de valeur absolue constante et de signes convenables, on peut

[1] Voir par exemple le Mémoire de M. DE LA VALLÉE-POUSSIN (*Bull. Soc. math.*, 1924).

faire en sorte que la fonction soit effectivement de la classe $p \log p$ en un point donné d'abscisse rationnelle. Soit alors $f(x; 1)$, $f(x; 2)$, .., $f(x; n)$, .. une suite de fonctions qui sont effectivement de la classe considérée chacune en un point au moins, $f(x; n)$ en $x_n$, les points $x_n$ étant denses sur le segment 0,1. La fonction $f(x; 1) + f(x; 2)\beta_2$ est de la classe $A_p$ en $x_1$ et $x_2$ sauf au plus pour deux valeurs de $\beta_2$. $\beta_2$ étant distinct de ces valeurs exceptionnelles,

$$f(x; 1) + \beta_2 f(x; 2) + \beta_3 f(x; 3)$$

est de la classe $A_p$ en $x_1$, $x_2$ et $x_3$ sauf au plus pour deux valeurs de $\beta_3$. On peut continuer ce procédé et il est loisible de supposer que la série $|\Sigma \beta_n|$ converge. On obtient ainsi une infinité de fonctions distinctes qui sont également quasi-analytiques de la classe $A_p$ sur le segment (0, 1) et qui ne sont d'une classe inférieure sur aucune portion du segment.

4. — Les théorèmes sur les fonctions holomorphes bornées dans leur ensemble dans un domaine s'appliquent à une famille $\mathcal{F}$ de fonctions quasi-analytiques dans un intervalle I qui sont également quasi-analytiques d'une classe $A_p$ sur tout segment appartenant à cet intervalle. Des propositions I et III découle l'extension du théorème de M. Montel:

IV. *De toute suite de fonctions de la famille $\mathcal{F}$ on peut extraire une suite qui converge uniformément à l'intérieur de* I *vers une fonction quasi-analytique de la même classe; les dérivées d'ordre* p *des fonctions de cette suite convergent uniformément vers la dérivée d'ordre* p *de la fonction limite.*

Une fonction quasi-analytique sur un segment est identiquement nulle si sa valeur et les valeurs de ses dérivées sont nulles en un point du segment; ses zéros sont donc isolés, la fonction est déterminée d'une façon unique par ses valeurs en une suite de points ayant un point d'accumulation sur ce segment. Le théorème de Vitali s'applique donc:

V. *Si les fonctions* f(x; n), *également quasi-analytiques de la classe* $A_p$ *dans un intervalle, convergent en des points de cet intervalle admettant un point limite intérieur à l'intervalle, elles convergent uniformément à l'intérieur de cet intervalle.*

On le montre par le procédé utilisé par M. Montel en s'appuyant sur ce que les fonctions limites de la suite sont toutes égales. De la même façon on établit la proposition suivante, qui complète dans un autre sens le théorème de Stieltjes:

VI. *Si les fonctions* f(x; n) *sont également quasi-analytiques d'une classe* $A_p$ *dans un intervalle et si* $x_0$ *appartenant à cet intervalle, la suite* $f^{(q)}(x_0; n)$ *converge pour chaque valeur de* q, *les fonctions* f(x; n) *convergent uniformément à l'intérieur de l'intervalle.*

---

# STATISTIQUES ET PROBABILITÉS

PAR

R. DE MONTESSUS DE BALLORE (Paris).

---

J'appellerai « Fonction de probabilité simple » la fonction

$$y_x = \frac{m!}{(mp - x)!\,(mq + x)!} p^{mp-x} q^{mq+x} . \tag{1}$$

Elle se présente dès le début du Calcul des Probabilités.

On la retrouve dans la Théorie des Erreurs accidentelles d'observation, dans l'étude des statistiques simples de toute nature: démographie, météorologie, histoire naturelle, applications de la chimie, certains phénomènes physiques, etc.

La représentation *approchée* de la fonction de probabilité simple (1) par l'exponentielle

$$e^{-h^2 x^2}$$

et par les variétés d'exponentielles, a donné beaucoup de mécomptes, il faut avoir le courage de le reconnaître, en dehors de l'étude des erreurs accidentelles d'observation.

Je vais montrer qu'on peut étudier *directement* la fonction (1)