Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 27 (1928)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE MOMENT DE DEUX DROITES ET SON APPLICATION DANS

LA THÉORIE DES CONNEXES

Autor: Sintsof, D.

Kapitel: §5. — Applications à la théorie des connexes ternaires.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21867

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 26.11.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ainsi donc

$$(p , p') = \Sigma (x_1 y_2) (\xi_3 \eta_4) \equiv egin{array}{c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \ \end{array},$$

et d'après § 2

$$= 6\lambda \cdot V$$
,

donc d'après § 3

$$= \lambda . \delta . \sin V$$

Ainsi

$$\delta \cdot \sin V = \lambda' \cdot (p, p') . \tag{3}$$

DEUXIÈME PARTIE: APPLICATIONS.

§ 5. — Applications à la théorie des connexes ternaires.

1. — Soient (x, u), (y, v) deux éléments (point, droite) du plan connexe, et soient a la droite (xy), A le point (uv). Les coordonnées de A sont proportionelles aux mineurs de la matrice

$$\left\| \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \right\|.$$

Donc l'aire du triangle Axy, à un facteur près dépendant du choix du système des coordonnées, est représentée par la formule

$$\left| \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ (u_2 \, v_3) & (u_3 \, v_1) & (u_1 \, v_2) \end{array} \right| \equiv \Sigma \left(u_i \, v_k \right) \left(x_i \, x_k \right) \equiv u_x \, v_y - v_x \, u_y$$

donnée dans mon mémoire cité plus haut.

Mais nous pourrions considérer un autre triangle, notamment celui formé par les droites u, v, $a \equiv (xy)$. D'après une formule connue (G. Salmon, Sections coniques, no 39, p. 53) son aire a pour expression

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ (xy)_1 & (xy)_2 & (xy)_3 \end{vmatrix}^2$$

$$\frac{(u_1 v_2) (v_1 (xy)_2) \cdot ((xy)_1 u_2)}{((xy)_1 v_2) \cdot ((xy)_1 u_2)},$$

ou bien, calculs faits:

$$\frac{(u_x v_y - u_y v_x)^2}{(u_1 v_2 - u_2 v_1)(x_3 v_y - y_3 v_x)(u_x y_3 - u_y x_3)},$$

formule qui n'est pas symétrique.

Cherchons une autre formule plus symétrique. Soient \bar{x} , \bar{y} les points d'intersection de la droite $(x, y) \equiv a$ avec les droites u et v; de sorte que $u_{\bar{x}} = 0$, $v_{\bar{y}} = 0$. On peut alors poser

$$\bar{x} = \lambda x + \mu y$$
, $\bar{y} = \lambda' x + \mu' y$,

avec

$$\lambda u_x + \mu u_y = 0 , \quad \lambda' v_x + \mu' v_y = 0 .$$

Pour fixer les valeurs absolues de λ , μ , λ' , μ' ajoutons les relations

$$\lambda + \mu = 1$$
 , $\quad \lambda' + \mu' = 1$.

Alors

$$\lambda = \frac{-u_y}{u_x - u_y}, \qquad \mu = \frac{u_x}{u_x - u_y},$$

$$\lambda' = \frac{-v_y}{v_x - v_y}, \qquad \mu' = \frac{v_x}{v_x - v_y}.$$

L'aire double du triangle $A\overline{x}$, \overline{y} ($\equiv uva$) est donc, à un facteur constant près,

$$\begin{vmatrix} (uv)_1 & (uv)_2 & (uv)_3 \\ \overline{x_1} & \overline{x_2} & \overline{x_3} \\ \overline{y_1} & \overline{y_2} & \overline{y_2} \end{vmatrix} \equiv (\lambda \mu' - \mu \lambda') \begin{vmatrix} (uv)_1 & (uv)_2 & (uv)_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & x_3 \end{vmatrix}$$

ou bien

$$\frac{(u_x v_y - u_y v_x)^2}{(u_x - u_y)(v_x - v_y)} .$$

La même formule peut être établie en calculant directement les coordonnées des points \overline{x} , \overline{y} par les équations

$$u_{\overline{x}} \equiv u_{1} \overline{x}_{1} + u_{2} \overline{x}_{2} + u_{3} \overline{x}_{3} = 0$$
, $(\overline{x} x_{2} y_{3}) = 0$,

ce qui donne

$$\frac{\bar{x}_1}{x_1 u_y - y_1 u_x} = \frac{\bar{x}_2}{x_2 u_y - y_2 u_x} = \frac{\bar{x}_3}{x_3 u_y - y_3 u_x} .$$

De même les équations $v_y = 0$, $(\overline{y} x_2 y_3) = 0$ donnent:

$$\frac{\bar{y}_1}{x_1 v_y - y_1 v_x} = \frac{\bar{y}_2}{x_2 v_y - y_2 v_x} = \frac{\bar{y}_3}{x_3 v_y - y_3 v_x}.$$

Enfin, les coordonnées du point A sont proportionnelles à

$$(u_2 v_3)$$
 , $(u_3 v_1)$, $(u_1 v_2)$.

Donc, l'aire double du triangle $A\overline{x}\overline{y}$, à un facteur près, est égal au déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 u_y - y_1 u_x & x_2 u_y - y_2 u_x & x_3 u_y - y_3 u_x \\ x_1 v_y - y_1 v_x & x_2 v_y - y_2 v_x & x_3 v_y - y_3 v_x \\ u_2 v_3 - u_3 v_2 & u_3 v_1 - u_1 v_3 & u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{vmatrix} \equiv (u_x v_y - u_y v_x) \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ (u_2 v_3) & (u_3 v_1) & (u_1 v_2) \end{vmatrix}$$

$$\equiv (u_x v_y - u_y v_x)^2.$$

Reste à déterminer le facteur de proportionnalité (dans le cas du système considéré au § 1).

D'après (1) pour le premier point:

$$\begin{split} 2\,\Delta_0 &= \,\Sigma\,a_i\,\mathbf{V}_i \,=\, \mathbf{H}\,(u_y\,\Sigma\,a_i\,x_i - u_x\,\Sigma\,a_i\,y_i) \\ &= \,2\,\Delta_0\,(u_y - u_x)\,\mathbf{H} \quad \cdot \cdot \quad \mathbf{H} \,= \frac{1}{u_y - u_x} \;. \end{split}$$

De même pour le second point nous trouvons

$$H' = \frac{1}{v_y - v_x},$$

et nous arrivons de nouveau à la formule

$$\frac{(u_x v_y - u_y v_x)^2}{(u_y - u_x)(v_y - v_x)} \cdot$$

2. — Soit à présent (y, v) l'élément du connexe conjugué qui correspond à l'élément (x, u). Alors

$$u_y = 0 , \qquad v_x = 0 .$$

L'expression du moment se ramène à

$$-u_xv_y$$
.

Pour de telles paires d'éléments les deux triangles, dont nous avons parlé au nº 1 coïncident, et les deux expressions de l'aire sont identiques.

Le triangle se ramène à un point (une droite) dans deux cas: $1^{\circ} u$ passe non seulement par y, mais aussi par x.

$$u_x = 0.$$

 2^{o} ρ passe non seulement par x, mais aussi par y:

$$v_y = 0$$
.

Donc: le moment de deux éléments correspondants d'un connexe ternaire et de son conjugné s'annule si l'un ou l'autre appartient à la coïncidence principale correspondante.

REMARQUE. — Dans le cas général de deux éléments (x, u), (y, v) quelconques leur moment s'annule dans les trois cas:

- 1º Les points x et y coïncident;
- 2º Les droites u et v coïncident;
- 3° Le point A est sur la droite a.
- 3. Connexe bilinéaire (collinéation):

$$f \equiv a_x u_\alpha \equiv \sum a_{ik} \alpha_i u_k = 0 .$$
(1)

Les éléments correspondants

$$\rho y_i = a_x a_i$$
, $\sigma v_i = a_i u_a$ $(i = 1, 2, 3)$ (2)

forment le connexe conjugué

$$(abv)(\alpha\beta\eta) = 0$$
.

Si l'on calcule le dernier, on obtient (changeant y, v en x, u)

$$i^2 \cdot g(x, u) = u_x(i^2 - i_1) - 2if + 2f_1$$
.

De (2) on déduit

$$v_y = a_x u_\beta b_\alpha \equiv f_1(x, u) ,$$
 $v_x = \sum a_i x_i u_\alpha = u_\alpha a_x = f(x, u) ,$
 $u_y = a_x \sum a_i u_i = a_x u_\alpha = f(x, u) .$

Donc

$$u_x v_y - u_y v_x \equiv u_x f_1(x, u) - f^2(x, u)$$
.

Ainsi les éléments du connexe bilinéaire pour lesquels le moment (au sens du n° 2) est nul appartiennent au connexe identique ou à $f_1(x, u) = 0$, — ce n'est qu'un cas particulier de ce qui a été dit au n° 2 pour le connexe général.

Enfin, si l'élément (x, u) n'appartient pas au connexe (1), le moment de (x, u) et de son transformé par (1) est nul, s'il appartient au connexe (2, 2)

$$u_x f_1(x_1 u) - f^2(x_1 u) = 0$$

dans lequel à chaque droite u correspond une courbe de 2^{me} ordre ayant double contact avec la conique dégénérée — paire de droites u et u'' et pour corde de contact la droite u', si l'on désigne les transformées collinéaires successives de u en collinéation (1) par u', u'', ...

Réciproquement, au point donné x appartient une courbe de 2^{me} classe passant par les points x, x'' et dont les tangentes correspondantes se coupent en x'.

§ 6. — Le moment dans la théorie des connexes avec élément (point, plan).

Comme j'ai indiqué au commencement, la notion du moment de deux droites trouve son application dans la théorie des connexes quaternaires ayant pour l'élément la combinaison (point, plan). Si l'on prend deux éléments pareils (x, u), (y, v), leurs points x, y déterminent une droite $p \equiv (xy)$, et leurs plans u, v une autre p' = (uv). On peut donc déterminer le moment de ces droites, et c'est ce que je nomme le moment de deux éléments du connexe (x, u).

Son expression analytique s'exprime par la formule

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ p_1^{'} & p_2^{'} & p_3^{'} & p_4^{'} \\ p_1^{'} & p_2^{'} & p_3^{'} & p_4^{'} \end{vmatrix} \equiv \Sigma (x_i y_k - x_k y_i) (u_i v_k - u_k v_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4) ,$$