

## §2. — Le volume d'un tétraèdre en coordonnées tétraédriques.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

données homogènes des trois points et l'aire du triangle qu'ils forment.

Passons à l'espace.

§ 2. — *Le volume d'un tétraèdre en coordonnées tétraédriques.*

Prenons pour le système des coordonnées tétraédriques  $x, y, z, t$ , les quatre perpendiculaires abaissées d'un point  $M$  sur les quatre plans d'un certain tétraèdre fondamental. Soient  $A, B, C, D$  les 4 sommets,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  les aires des faces opposées, on a

$$\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \cdot z + \delta \cdot t = 3 \cdot V_0. \quad (1)$$

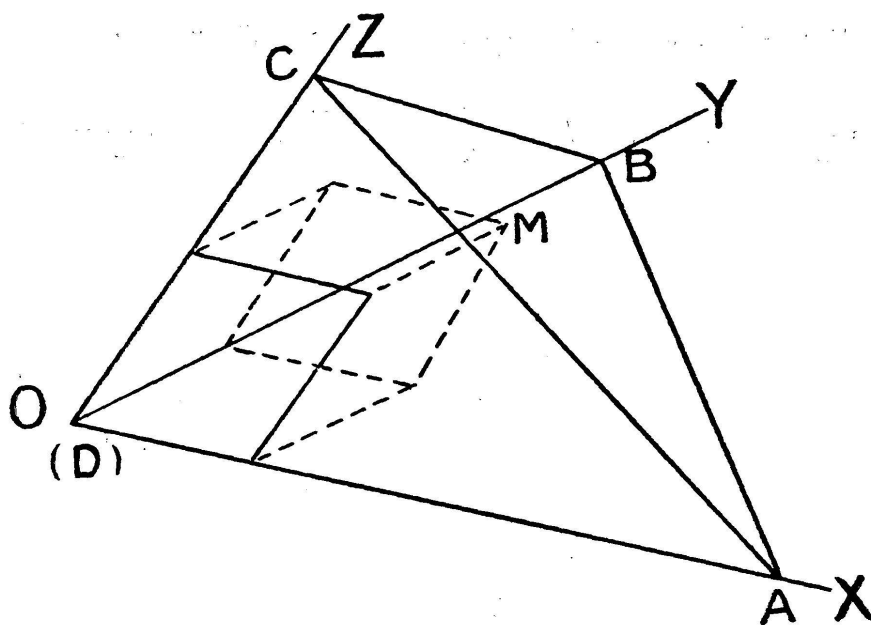


Fig. 2.

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x' & y' & z' & t' \\ x'' & y'' & z'' & t'' \\ x''' & y''' & z''' & t''' \end{vmatrix} = \frac{3V_0}{\delta} \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x' & y' & z' & 1 \\ x'' & y'' & z'' & 1 \\ x''' & y''' & z''' & 1 \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Choisissons à présent un système des coordonnées non-homogènes obliquangles ayant pour plans les 3 plans du tétraèdre fondamental — alors  $z$ , par exemple, est la hauteur du parallélépipède dont les arêtes sont  $\bar{y}, \bar{x}, \bar{z}$ , — de sorte que  $z = \bar{z} \cos(z, \bar{z})$  (fig. 2).

De même

$$y = \bar{y} \cdot \cos (y, \bar{y}) ,$$

$$x = \bar{x} \cdot \cos (x, \bar{x}) .$$

Ainsi

$$(xy'z''t''') = (\bar{x} \cdot \bar{y}' \cdot \bar{z}'' \cdot 1) \cdot \frac{3V_0}{\delta} \cos (x, \bar{x}) \cdot \cos (y, \bar{y}) \cos (z, \bar{z}) .$$

Du point O comme centre décrivons une sphère de rayon 1, soient X, Y, Z les 3 points de rencontre de cette sphère avec les axes des coordonnées obliques; soient

$$\sphericalangle YOX = \lambda , \quad \sphericalangle XOZ = \mu , \quad \sphericalangle YOZ = \nu .$$

Nous aurons un triangle sphérique, dont les hauteurs (fig. 3)

$$h_\lambda = \frac{\pi}{2} - (z, \bar{z}) , \quad h_\mu = \frac{\pi}{2} - (y, \bar{y}) , \quad h_\nu = \frac{\pi}{2} - (x, \bar{x})$$

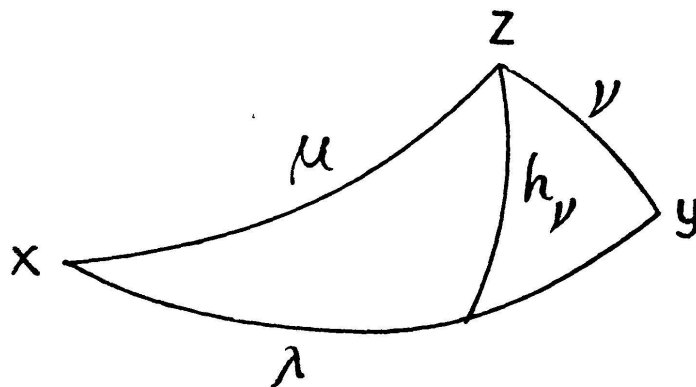


Fig. 3.

sont à calculer. Désignons les angles du triangle sphérique XYZ respectivement par X, Y, Z.

Alors

$$\sin h_\lambda = \sin \mu \cdot \sin X = \sin \nu \cdot \sin Y .$$

Soit

$$\lambda + \mu + \nu = 2s .$$

D'après les formules connues de la trigonométrie sphérique

$$\sin X = 2 \frac{\sqrt{\sin s \cdot \sin (s - \lambda) \cdot \sin (s - \mu) \cdot \sin (s - \nu)}}{\sin \lambda \cdot \sin \mu} = \frac{2\sqrt{P}}{\sin \lambda \sin \mu} .$$

De même

$$\sin Y = \frac{2\sqrt{P}}{\sin \lambda \cdot \sin \nu}, \quad \sin z = \frac{2\sqrt{P}}{\sin \nu \sin \mu}.$$

Donc

$$\sin h_\lambda = \cos(z, \bar{z}) = \frac{2\sqrt{P}}{\sin \lambda},$$

$$\sin h_\mu = \cos(y, \bar{y}) = \frac{2\sqrt{P}}{\sin \mu},$$

$$\sin h_\nu = \cos(x, \bar{x}) = \frac{2\sqrt{P}}{\sin \nu}.$$

Ainsi

$$(xy'z''l''') = \frac{8 \cdot 3 \cdot V_0}{\delta} \cdot \frac{P^{3/2}}{\sin \lambda \sin \mu \sin \nu} (\bar{x}\bar{y}'\bar{z}'', 1). \quad (3)$$

Mais ce n'est pas encore la relation définitive. Il est intéressant d'établir le multiplicateur exact. Introduisons un système de coordonnées dont l'axe  $O\xi$  coïncide avec l'axe  $O\bar{X}$ ,  $OH$  étant situé dans le plan  $\bar{X}O\bar{Y}$  et perpendiculaire à  $O\bar{X}$ , enfin  $OZ$  étant perpendiculaire au plan  $\bar{X}O\bar{Y}$ .

Nous aurons pour le tableau des 9 cosinus:

	$O\xi$	$OH$	$OZ$
$\bar{O}X$	1	0	0
$\bar{O}Y$	$\cos \lambda$	$\sin \lambda$	0
$\bar{O}Z$	$\cos \mu$	$\cos U$	$\cos W$

Les angles  $U$  et  $W$  sont à déterminer à l'aide des relations de la forme

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos \lambda & \cos \mu & \cos \alpha \\ \cos \lambda & 1 & \cos \nu & \cos \beta \\ \cos \mu & \cos \nu & 1 & \cos \gamma \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Pour déterminer  $\cos W$  nous substituons les angles de  $OZ$  :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos \lambda & \cos \mu & 0 \\ \cos \lambda & 1 & \cos \nu & 0 \\ \cos \mu & \cos \nu & 1 & \cos W \\ 0 & 0 & \cos W & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui donne

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & \cos \lambda & \cos \mu \\ \cos \lambda & 1 & \cos \nu \\ \cos \mu & \cos \nu & 1 - \cos^2 W \end{vmatrix},$$

ou enfin

$$4P - \cos^2 W \cdot \sin^2 \lambda = 0,$$

d'où l'on tire

$$\cos W = \pm \frac{\sqrt{P}}{\sin \lambda}. \quad (5)$$

De même pour le calcul de  $\cos U$  nous avons à substituer dans (4) les angles de OH, ce qui donne

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & \cos \lambda & \cos \mu & 0 \\ \cos \lambda & 1 & \cos \nu & \sin \lambda \\ \cos \mu & \cos \nu & 1 & \cos U \\ 0 & \sin \lambda & \cos U & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{d'où} \quad \cos U = \frac{\cos \nu - \cos \lambda \cos \mu}{\sin \lambda}, \quad (6)$$

Ainsi les formules de transformation deviennent

$$\bar{X} + \bar{Y} \cos \lambda + \bar{Z} \cos \mu = \xi,$$

$$\bar{X} \cos \lambda + \bar{Y} + \bar{Z} \cos \nu = \xi \cos \lambda + \eta \sin \lambda,$$

$$\bar{X} \cos \mu + \bar{Y} \cos \nu + \bar{Z} = \xi \cos \mu + \eta \frac{\cos \nu - \cos \lambda \cos \mu}{\sin \lambda} + \zeta \frac{2\sqrt{P}}{\sin \lambda}.$$

Formons à présent le déterminant

$$\begin{vmatrix} \xi, \xi \cos \lambda + \eta \sin \lambda, \xi \cos \mu + \eta \frac{\cos \nu - \cos \lambda \cos \mu}{\sin \lambda} + \zeta \frac{2\sqrt{P}}{\sin \lambda} \\ \xi', \xi' \cos \lambda + \eta' \sin \lambda, \xi' \cos \mu + \eta' \frac{\cos \nu - \cos \lambda \cos \mu}{\sin \lambda} + \zeta' \frac{2\sqrt{P}}{\sin \lambda} \\ \xi'', \xi'' \cos \lambda + \eta'' \sin \lambda, \xi'' \cos \mu + \eta'' \frac{\cos \nu - \cos \lambda \cos \mu}{\sin \lambda} + \zeta'' \frac{2\sqrt{P}}{\sin \lambda} \\ \xi''', \xi''' \cos \lambda + \eta''' \sin \lambda, \xi''' \cos \mu + \eta''' \frac{\cos \nu - \cos \lambda \cos \mu}{\sin \lambda} + \zeta''' \frac{2\sqrt{P}}{\sin \lambda} \end{vmatrix}$$

Il est égal, comme il est facile à voir, à

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta & 1 \\ \xi' & \eta' & \zeta' & 1 \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' & 1 \\ \xi''' & \eta''' & \zeta''' & 1 \end{vmatrix} \times \sin \lambda \times \frac{2\sqrt{P}}{\sin \lambda} = 6V \cdot 2\sqrt{P}. \quad (7)$$

Mais, d'autre part, ce déterminant est égal à

$$\begin{vmatrix} \bar{X} + \bar{Y} \cos \lambda + \bar{Z} \cos \mu, & \bar{X} \cos \lambda + \bar{Y} + \bar{Z} \cos \nu, & \bar{X} \cos \mu + \bar{Y} \cos \nu + \bar{Z}, & 1 \\ \bar{X}' + \bar{Y}' \cos \lambda + \bar{Z}' \cos \mu, & \bar{X}' \cos \lambda + \bar{Y}' + \bar{Z}' \cos \nu, & \bar{X}' \cos \mu + \bar{Y}' \cos \nu + \bar{Z}', & 1 \\ \bar{X}'' + \bar{Y}'' \cos \lambda + \bar{Z}'' \cos \mu, & \bar{X}'' \cos \lambda + \bar{Y}'' + \bar{Z}'' \cos \nu, & \bar{X}'' \cos \mu + \bar{Y}'' \cos \nu + \bar{Z}'', & 1 \\ \bar{X}''' + \bar{Y}''' \cos \lambda + \bar{Z}''' \cos \mu, & \bar{X}''' \cos \lambda + \bar{Y}''' + \bar{Z}''' \cos \nu, & \bar{X}''' \cos \mu + \bar{Y}''' \cos \nu + \bar{Z}''', & 1 \end{vmatrix},$$

que l'on transforme facilement en

$$\begin{vmatrix} (\bar{X}' - \bar{X}) + (\bar{Y}' - \bar{Y}) \cos \lambda + (\bar{Z}' - \bar{Z}) \cos \mu, & & & \\ (\bar{X}' - \bar{X}) \cos \lambda + (\bar{Y}' - \bar{Y}) + (\bar{Z}' - \bar{Z}) \cos \nu, & (\bar{X}' - \bar{X}) \cos \mu + (\bar{Y}' - \bar{Y}) \cos \nu + (\bar{Z}' - \bar{Z}) & & \\ (\bar{X}'' - \bar{X}) + (\bar{Y}'' - \bar{Y}) \cos \lambda + (\bar{Z}'' - \bar{Z}) \cos \mu, & & & \\ (\bar{X}'' - \bar{X}) \cos \lambda + (\bar{Y}'' - \bar{Y}) + (\bar{Z}'' - \bar{Z}) \cos \nu, & (\bar{X}'' - \bar{X}) \cos \mu + (\bar{Y}'' - \bar{Y}) \cos \nu + (\bar{Z}'' - \bar{Z}) & & \\ (\bar{X}''' - \bar{X}) + (\bar{Y}''' - \bar{Y}) \cos \lambda + (\bar{Z}''' - \bar{Z}) \cos \mu, & & & \\ (\bar{X}''' - \bar{X}) \cos \lambda + (\bar{Y}''' - \bar{Y}) + (\bar{Z}''' - \bar{Z}) \cos \nu, & (\bar{X}''' - \bar{X}) \cos \mu + (\bar{Y}''' - \bar{Y}) \cos \nu + (\bar{Z}''' - \bar{Z}) & & \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} \bar{X}' - \bar{X}, & \bar{Y}' - \bar{Y}, & \bar{Z}' - \bar{Z} \\ \bar{X}'' - \bar{X}, & \bar{Y}'' - \bar{Y}, & \bar{Z}'' - \bar{Z} \\ \bar{X}''' - \bar{X}, & \bar{Y}''' - \bar{Y}, & \bar{Z}''' - \bar{Z} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & \cos \lambda & \cos \mu \\ \cos \lambda & 1 & \cos \nu \\ \cos \mu & \cos \nu & 1 \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} \bar{X} & \bar{Y} & \bar{Z} & 1 \\ \bar{X}' & \bar{Y}' & \bar{Z}' & 1 \\ \bar{X}'' & \bar{Y}'' & \bar{Z}'' & 1 \\ \bar{X}''' & \bar{Y}''' & \bar{Z}''' & 1 \end{vmatrix} \cdot 4P. \quad (8)$$

Donc, revenant à la formule (A) nous aurons:

$$(xy'z''z''') = \frac{8 \cdot 3V_0}{\delta} \cdot \frac{P^{3/2}}{\sin \lambda \sin \mu \sin \nu} \frac{6V \cdot 2\sqrt{P}}{4P}.$$

Donc, enfin

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x' & y' & z' & t' \\ x'' & y'' & z'' & t'' \\ x''' & y''' & z''' & t''' \end{vmatrix} = \frac{72V_0}{\delta} \frac{P}{\sin \lambda \sin \mu \sin \nu} \cdot V \quad (9)$$

c'est la formule, que nous voulions établir.

Il est à remarquer que le facteur

$$\frac{72V_0 P}{\delta \cdot \sin \lambda \sin \mu \sin \nu}$$

ne dépend que du choix du tétraèdre de référence; il est le même pour tous les quatre points choisis M, M', M'', M'''.

### § 3. — *Moment de deux droites.*

La plus courte distance de deux droites de l'espace

$$\frac{x - a}{l} = \frac{y - b}{m} = \frac{z - c}{n} \quad (1) \quad \text{et} \quad \frac{x - a'}{l'} = \frac{y - b'}{m'} = \frac{z - c'}{n'} \quad (1')$$

est donnée par la formule

$$\delta = \begin{vmatrix} a' - a & b' - b & c' - c \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} : \sqrt{\Sigma (mn' - nm')^2} \quad (2)$$

ou bien

$$\delta = \begin{vmatrix} a' - a & b' - b & c' - c \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} : \sin V \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \cdot \sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2} \quad (2')$$

où V est l'angle de deux droites. L'expression devient plus simple si  $l, m, n, l', m', n'$  désignent les cosinus des angles, alors  $l^2 + m^2 + n^2 = 1 = l'^2 + m'^2 + n'^2$ . Nous avons

$$\delta \cdot \sin V = \begin{vmatrix} a' - a & b' - b & c' - c \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Le produit  $\delta \cdot \sin V$  est ce qu'on appelle *le moment de deux droites* (1) et (1'). Le déterminant à droite égalé à zéro exprime que les deux droites se coupent. On peut donc dire que *les deux droites de l'espace se coupent si leur moment s'annule*, — en d'autres mots, si leur plus courte distance est nulle, ou bien si elles font un angle nul, c'est-à-dire si elles sont parallèles.

Dans les deux cas le volume d'un tétraèdre que l'on conçoit en