Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 27 (1928)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE MOMENT DE DEUX DROITES ET SON APPLICATION DANS LA THÉORIE DES CONNEXES

Autor: Sintsof, D.

Kapitel: Première Partie.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21867

SUR LE MOMENT DE DEUX DROITES ET SON APPLICATION DANS LA THÉORIE DES CONNEXES

PAR

D. SINTSOF (Kharkof).

C'est à CAYLEY que nous sommes redevables de l'introduction du moment de deux droites. Dans mon mémoire « Théorie des connexes dans l'espace » (*Annales de l'Université de Kasan*, 1895) j'ai appliqué cette notion aux deux droites que l'on obtient si l'on prend deux éléments (point, plan), — l'une qui joint les points, l'autre qui est l'intersection des deux plans, et c'est à cette expression que j'ai donnée le nom de moment de deux éléments du connexe.

Mais l'expression analytique que l'on établit existe aussi pour le connexe ternaire, et j'ai donné (*loc. cit.*, Ch. IV, remarque) son interprétation géométrique.

Mais pour les applications il est important de montrer quels sont les multiplicateurs numériques que l'on introduit, si l'on prend un système particulier de coordonnées homogènes.

C'est par ce problème élémentaire que je commence. Il ne me paraît pas dépourvu d'intérêt. Puis je donne des applications à la théorie des connexes.

PREMIÈRE PARTIE.

§ 1. — *L'aire du triangle en coordonnées homogènes (triangulaires).*

FERRERS *(Trilinear coordinates)* donne l'expression pour la distance de deux points en coordonnées homogènes. Il n'est pas sans intérêt de donner l'expression correspondante de l'aire d'un triangle.

Prenons pour coordonnées homogènes x, y, z d'un point M les perpendiculaires MQ, MP, MR abaissées de M sur les côtés du triangle fondamental ABC (fig. 1) ayant au sommet C l'angle ω; les longueurs des côtés opposés aux sommets A, B, C étant a, b, c, on a

$$ax + by + cz = 2\Delta ABC \equiv 2\Delta_0 . \tag{1}$$

Soient les coordonnées (non-homogènes) du même point M par rapport aux axes CA, CB, $\bar{x}$, $\bar{y}$. Alors

$$\left.\begin{aligned} x &= \bar{x} . \sin\omega \\ y &= \bar{y} \sin\omega \end{aligned}\right\} . \tag{2}$$

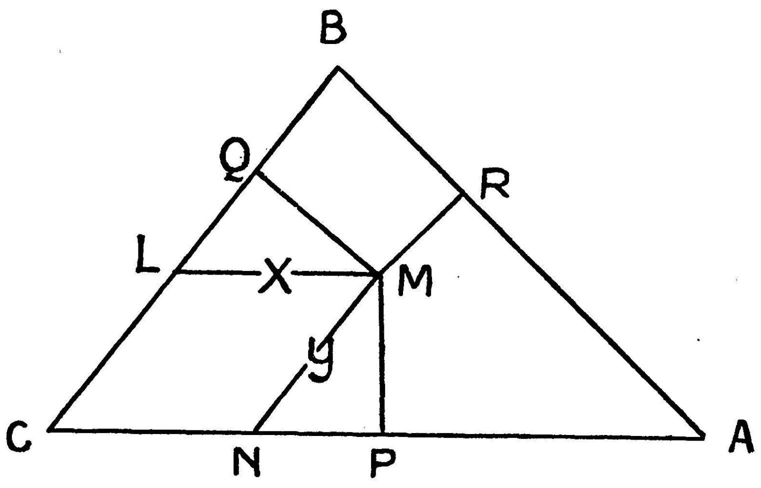

Fig. 1.

Donc, si l'on prend trois points M, M′, M″

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & \dfrac{2\Delta_0 - ax - by}{c} \\ x' & y' & \dfrac{2\Delta_0 - ax' - by'}{c} \\ x'' & y'' & \dfrac{2\Delta_0 - ax'' - by''}{c} \end{vmatrix} = \frac{2\Delta_0}{c} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix}$$

ou, d'après (2)

$$= \frac{2\Delta_0}{c} \begin{vmatrix} \bar{x} & \bar{y} & 1 \\ \bar{x'} & \bar{y'} & 1 \\ \bar{x''} & \bar{y''} & 1 \end{vmatrix} . \sin^2\omega .$$

Mais si l'on fait tourner l'axe des y (CB) de l'angle $\frac{\pi}{2} - \omega$ les coordonnées nouvelles ξ, η s'expriment à l'aide de $\bar{x}$, $\bar{y}$:

$$\bar{y} = \frac{\eta}{\sin \omega}, \quad \bar{x} = \xi - \eta \operatorname{cotg} \omega .$$

Donc

$$\begin{vmatrix} \bar{x} & \bar{y} & 1 \\ \bar{x}' & \bar{y}' & 1 \\ \bar{x}'' & \bar{y}'' & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sin \omega} \begin{vmatrix} \xi & -\eta \operatorname{cotg} \omega & \eta & 1 \\ \xi' & -\eta' \operatorname{cotg} \omega & \eta' & 1 \\ \xi'' & -\eta'' \operatorname{cotg} \omega & \eta'' & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sin \omega} \begin{vmatrix} \xi & \eta & 1 \\ \xi' & \eta' & 1 \\ \xi'' & \eta'' & 1 \end{vmatrix}$$

ce qui est égal à $\frac{2\Delta}{\sin \omega}$, Δ étant l'aire du triangle MM′M″.

Donc, dans le système des coordonnées homogènes, que nous avons choisi, on a

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x', & y', & z' \\ x'', & y'', & z'' \end{vmatrix} = \frac{2\Delta_0}{c} \cdot \frac{2\Delta}{\sin \omega} \cdot \sin^2 \omega = 2\Delta \cdot h_c \cdot \sin \omega \qquad (3)$$

puisque $2\Delta_0 = c \cdot h_c$, h_c étant la hauteur correspondant à la base AB du triangle ABC. On pourrait encore poser $2\Delta_0 = ab \sin \omega$. Alors

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = \frac{ab}{c} \sin^2 \omega \cdot \Delta . \qquad (3')$$

Le défaut de la formule (3′) est son manque de symétrie. Si nous prenions pour l'origine des coordonnées obliques d'autres sommets du triangle ABC: A ou B nous aurions $\frac{bc}{a} \sin^2 A$ ou bien $\frac{ac}{b} \sin^2 B$.

Les trois expressions sont égales, vu que

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin c} = 2R .$$

Donc enfin

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 2\Delta \cdot \frac{\Delta_0}{R} = 2\Delta \frac{abc}{4R^2} . \qquad (3'')$$

Telle est la relation entre la valeur du déterminant des coordonnées homogènes des trois points et l'aire du triangle qu'ils forment.

Passons à l'espace.

§ 2. — *Le volume d'un tétraèdre en coordonnées tétraédriques.*

Prenons pour le système des coordonnées tétraédriques x, y, z, t, les quatre perpendiculaires abaissées d'un point M sur les quatre plans d'un certain tétraèdre fondamental. Soient A, B, C, D les 4 sommets, α, β, γ, δ les aires des faces opposées, on a

$$\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \cdot z + \delta \cdot t = 3 \cdot V_0 \,. \qquad (1)$$

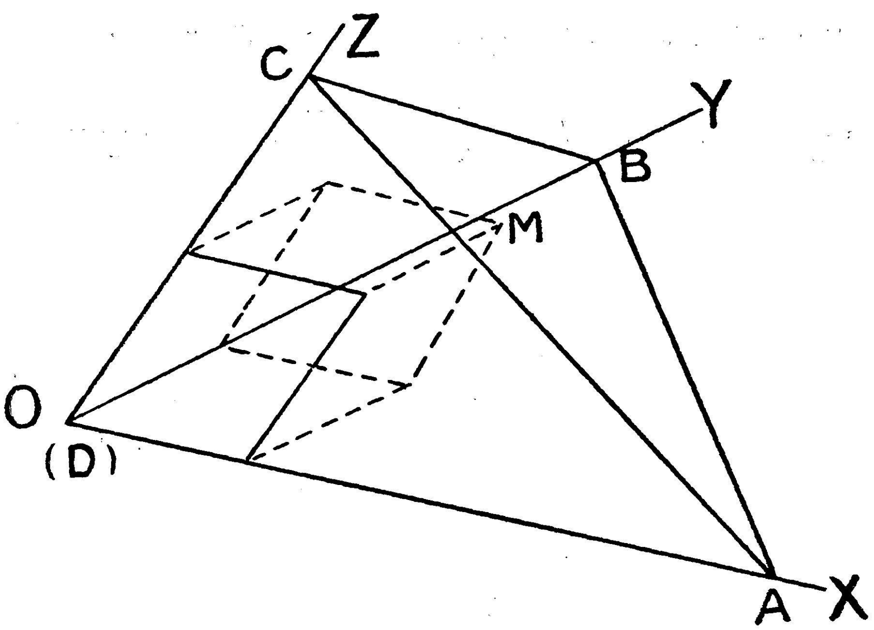

Fig. 2.

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} x\,, & y\,, & z\,, & t \\ x'\,, & y'\,, & z'\,, & t' \\ x''\,, & y''\,, & z''\,, & t'' \\ x'''\,, & y'''\,, & z'''\,, & t''' \end{vmatrix} = \frac{3V_0}{\delta} \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x' & y' & z' & 1 \\ x'' & y'' & z'' & 1 \\ x''' & y''' & z''' & 1 \end{vmatrix} \,. \qquad (2)$$

Choisissons à présent un système des coordonnées non-homogènes obliquangles ayant pour plans les 3 plans du tétraèdre fondamental — alors z, parexemple, est la hauteur du parallélépipède dont les arêtes sont $\bar{y}$, $\bar{x}$, $\bar{z}$, — de sorte que $z = \bar{z} \cos(z, \bar{z})$ (fig. 2).

De même

$$y = \bar{y} \, . \cos\,(y\,,\ \bar{y})\ ,$$

$$x = \bar{x} \, . \cos\,(x\,,\ \bar{x})\ .$$

Ainsi

$$(xy'z''t''') = (\bar{x}\,.\,\bar{y}'\,.\,\bar{z}''\,.\,1)\,.\,\frac{3V_0}{\delta}\cos\,(x\,,\ \bar{x})\,.\cos\,(y\,,\ \bar{y})\cos\,(z\,,\ \bar{z})\ .$$

Du point O comme centre décrivons une sphère de rayon 1, soient X. Y, Z les 3 points de rencontre de cette sphère avec les axes des coordonnées obliques; soient

$$\sphericalangle\ \mathrm{YOX} = \lambda\ , \qquad \sphericalangle\ \mathrm{XOZ} = \mu\ , \qquad \sphericalangle\ \mathrm{YOZ} = \nu\ .$$

Nous aurons un triangle sphérique, dont les hauteurs (fig. 3)

$$h_\lambda = \frac{\pi}{2} - (z\,,\ \bar{z})\ , \qquad h_\mu = \frac{\pi}{2} - (y\,,\ \bar{y})\ , \qquad h_\nu = \frac{\pi}{2} - (z\,,\ \bar{z})$$

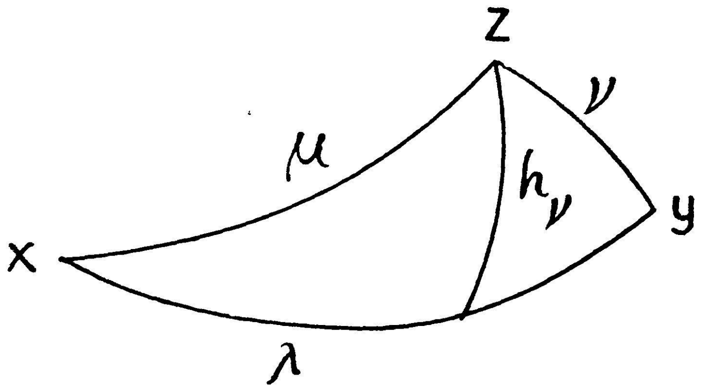

Fig. 3.

sont à calculer. Désignons les angles du triangle sphérique XYZ respectivement par X, Y, Z.

Alors

$$\sin h_\lambda = \sin\mu\,.\sin \mathrm{X} = \sin\nu\,.\sin \mathrm{Y}\ .$$

Soit

$$\lambda + \mu + \nu = 2s\ .$$

D'après les formules connues de la trigonométrie sphérique

$$\sin \mathrm{X} = 2\,\frac{\sqrt{\sin s\,.\,\sin\,(s-\lambda)\,.\,\sin\,(s-\mu)\,.\,\sin\,(s-\nu)}}{\sin\lambda\,.\,\sin\mu} = \frac{2\sqrt{\mathrm{P}}}{\sin\lambda\,\sin\mu}\ .$$

De même

$$\sin Y = \frac{2\sqrt{P}}{\sin\lambda \, . \, \sin\nu}, \qquad \sin Z = \frac{2\sqrt{P}}{\sin\nu \, \sin\mu} .$$

Donc

$$\sin h_\lambda = \cos(z, \overline{z}) = \frac{2\sqrt{P}}{\sin\lambda},$$

$$\sin h_\mu = \cos(y, \overline{y}) = \frac{2\sqrt{P}}{\sin\mu},$$

$$\sin h_\nu = \cos(x, \overline{x}) = \frac{2\sqrt{P}}{\sin\nu} .$$

Ainsi

$$(x y' z'' t''') = \frac{8 \, . \, 3 \, . \, V_0}{\delta} \cdot \frac{P^{3/2}}{\sin\lambda \, \sin\mu \, \sin\nu} (\overline{x} \, \overline{y}' \, \overline{z}'', 1) . \qquad (3)$$

Mais ce n'est pas encore la relation définitive. Il est intéressant d'établir le multiplicateur exact. Introduisons un système de coordonnées dont l'axe $O\xi$ coïncide avec l'axe $O\overline{X}$, OH étant situé dans le plan $\overline{X}O\overline{Y}$ et perpendiculaire à $O\overline{X}$, enfin OZ étant perpendiculaire au plan $\overline{X}O\overline{Y}$.

Nous aurons pour le tableau des 9 cosinus:

	$O\Xi$	OH	OZ
$\overline{O}X$	1	0	0
$\overline{O}Y$	$\cos\lambda$	$\sin\lambda$	0
$\overline{O}Z$	$\cos\mu$	$\cos U$	$\cos W$

Les angles U et W sont à déterminer à l'aide des relations de la forme

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\lambda & \cos\mu & \cos\alpha \\ \cos\lambda & 1 & \cos\nu & \cos\beta \\ \cos\mu & \cos\nu & 1 & \cos\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0 . \qquad (4)$$

Pour déterminer cos W nous substituons les angles de OZ :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\lambda & \cos\mu & 0 \\ \cos\lambda & 1 & \cos\nu & 0 \\ \cos\mu & \cos\nu & 1 & \cos W \\ 0 & 0 & \cos W & 1 \end{vmatrix} = 0 ,$$

ce qui donne

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\lambda & \cos\mu \\ \cos\lambda & 1 & \cos\nu \\ \cos\mu & \cos\nu & 1 - \cos^2 W \end{vmatrix},$$

ou enfin

$$4P - \cos^2 W \,.\, \sin^2\lambda = 0 ,$$

d'où l'on tire

$$\cos W = \pm \frac{\sqrt{P}}{\sin\lambda} . \qquad (5)$$

De même pour le calcul de cos U nous avons à substituer dans (4) les angles de OH, ce qui donne

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\lambda & \cos\mu & 0 \\ \cos\lambda & 1 & \cos\nu & \sin\lambda \\ \cos\mu & \cos\nu & 1 & \cos U \\ 0 & \sin\lambda & \cos U & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{d'où} \quad \cos U = \frac{\cos\nu - \cos\lambda\cos\mu}{\sin\lambda}, \qquad (6)$$

Ainsi les formules de transformation deviennent

$$\overline{X} + \overline{Y}\cos\lambda + \overline{Z}\cos\mu = \xi ,$$

$$\overline{X}\cos\lambda + \overline{Y} + \overline{Z}\cos\nu = \xi\cos\lambda + \eta\sin\lambda ,$$

$$\overline{X}\cos\mu + \overline{Y}\cos\nu + \overline{Z} = \xi\cos\mu + \eta\frac{\cos\nu - \cos\lambda\cos\mu}{\sin\lambda} + \zeta\frac{2\sqrt{P}}{\sin\lambda} .$$

Formons à présent le déterminant

$$\begin{vmatrix} \xi \,, & \xi\cos\lambda + \eta\sin\lambda , & \xi\cos\mu + \eta\dfrac{\cos\nu - \cos\lambda\cos\mu}{\sin\lambda} + \zeta\dfrac{2\sqrt{P}}{\sin\lambda} \\ \xi' \,, & \xi'\cos\lambda + \eta'\sin\lambda , & \xi'\cos\mu + \eta'\dfrac{\cos\nu - \cos\lambda\cos\mu}{\sin\lambda} + \zeta'\dfrac{2\sqrt{P}}{\sin\lambda} \\ \xi'' \,, & \xi''\cos\lambda + \eta''\sin\lambda , & \xi''\cos\mu + \eta''\dfrac{\cos\nu - \cos\lambda\cos\mu}{\sin\lambda} + \zeta''\dfrac{2\sqrt{P}}{\sin\lambda} \\ \xi''' \,, & \xi'''\cos\lambda + \eta'''\sin\lambda , & \xi'''\cos\mu + \eta'''\dfrac{\cos\nu - \cos\lambda\cos\mu}{\sin\lambda} + \zeta'''\dfrac{2\sqrt{P}}{\sin\lambda} \end{vmatrix} .$$

Il est égal, comme il est facile à voir, à

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta & 1 \\ \xi' & \eta' & \zeta' & 1 \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' & 1 \\ \xi''' & \eta''' & \zeta''' & 1 \end{vmatrix} \times \sin\lambda \times \frac{2\sqrt{P}}{\sin\lambda} = 6V \,.\, 2\sqrt{P} . \qquad (7)$$

Mais, d'autre part, ce déterminant est égal à

$$\begin{vmatrix} \overline{X} + \overline{Y}\cos\lambda + \overline{Z}\cos\mu, & \overline{X}\cos\lambda + \overline{Y} + \overline{Z}\cos\nu, & \overline{X}\cos\mu + \overline{Y}\cos\nu + \overline{Z}, & 1 \\ \overline{X'} + \overline{Y'}\cos\lambda + \overline{Z'}\cos\mu, & \overline{X'}\cos\lambda + \overline{Y'} + \overline{Z'}\cos\nu, & \overline{X'}\cos\mu + \overline{Y'}\cos\nu + \overline{Z'}, & 1 \\ \overline{X''} + \overline{Y''}\cos\lambda + \overline{Z''}\cos\mu, & \overline{X''}\cos\lambda + \overline{Y''} + \overline{Z''}\cos\nu, & \overline{X''}\cos\mu + \overline{Y''}\cos\nu + \overline{Z''}, & 1 \\ \overline{X'''} + \overline{Y'''}\cos\lambda + \overline{Z'''}\cos\mu, & \overline{X'''}\cos\lambda + \overline{Y'''} + \overline{Z'''}\cos\nu, & \overline{X'''}\cos\mu + \overline{Y'''}\cos\nu + \overline{Z'''}, & 1 \end{vmatrix},$$

que l'on transforme facilement en

$$\begin{vmatrix} (\overline{X'}-\overline{X})+(\overline{Y'}-\overline{Y})\cos\lambda+(\overline{Z'}-\overline{Z})\cos\mu, & (\overline{X'}-\overline{X})\cos\lambda+(\overline{Y'}-\overline{Y})+(\overline{Z'}-\overline{Z})\cos\nu, & (\overline{X'}-\overline{X})\cos\mu+(\overline{Y'}-\overline{Y})\cos\nu+(\overline{Z'}-\overline{Z}) \\ (\overline{X''}-\overline{X})+(\overline{Y''}-\overline{Y})\cos\lambda+(\overline{Z''}-\overline{Z})\cos\mu, & (\overline{X''}-\overline{X})\cos\lambda\mp(\overline{Y''}-\overline{Y})+(\overline{Z''}-\overline{Z})\cos\nu, & (\overline{X''}-\overline{X})\cos\mu+(\overline{Y''}-\overline{Y})\cos\nu+(\overline{Z''}-\overline{Z}) \\ (\overline{X'''}-\overline{X})+(\overline{Y'''}-\overline{Y})\cos\lambda+(\overline{Z'''}-\overline{Z})\cos\mu, & (\overline{X'''}-\overline{X})\cos\lambda+(\overline{Y'''}-\overline{Y})+(\overline{Z'''}-\overline{Z})\cos\nu, & (\overline{X'''}-\overline{X})\cos\mu+(\overline{Y'''}-\overline{Y})\cos\nu+(\overline{Z'''}-\overline{Z}) \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} \overline{X'}-\overline{X}, & \overline{Y'}-\overline{Y}, & \overline{Z'}-\overline{Z} \\ \overline{X''}-\overline{X}, & \overline{Y''}-\overline{Y}, & \overline{Z''}-\overline{Z} \\ \overline{X'''}-\overline{X}, & \overline{Y'''}-\overline{Y}, & \overline{Z'''}-\overline{Z} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & \cos\lambda & \cos\mu \\ \cos\lambda & 1 & \cos\nu \\ \cos\mu & \cos\nu & 1 \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} \overline{X} & \overline{Y} & \overline{Z} & 1 \\ \overline{X'} & \overline{Y'} & \overline{Z'} & 1 \\ \overline{X''} & \overline{Y''} & \overline{Z''} & 1 \\ \overline{X'''} & \overline{Y'''} & \overline{Z'''} & 1 \end{vmatrix} . 4P . \tag{8}$$

Donc, revenant à la formule (A) nous aurons:

$$(xy'z''z''') = \frac{8 . 3V_0}{\delta} . \frac{P^{3/2}}{\sin\lambda \sin\mu \sin\nu} \frac{6V . 2\sqrt{P}}{4P} .$$

Donc, enfin

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x' & y' & z' & t' \\ x'' & y'' & z'' & t'' \\ x''' & y''' & z''' & t''' \end{vmatrix} = \frac{72V_0}{\delta} \frac{P}{\sin\lambda \sin\mu \sin\nu} . V \tag{9}$$

c'est la formule, que nous voulions établir.

Il est à remarquer que le facteur

$$\frac{72 V_0 P}{\delta \,.\, \sin\lambda \, \sin\mu \, \sin\nu}$$

ne dépend que du choix du tétraèdre de référence; il est le même pour tous les quatre points choisis M, M′, M″, M‴.

§ 3. — *Moment de deux droites.*

La plus courte distance de deux droites de l'espace

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n} \quad (1) \qquad \text{et} \qquad \frac{x-a'}{l'} = \frac{y-b'}{m'} = \frac{z-c'}{n'} \quad (1')$$

est donnée par la formule

$$\delta = \begin{vmatrix} a'-a & b'-b & c'-c \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} : \sqrt{\Sigma(mn'-nm')^2} \qquad (2)$$

ou bien

$$\delta = \begin{vmatrix} a'-a & b'-b & c'-c \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} : \sin V \,.\, \sqrt{l^2+m^2+n^2} \,.\, \sqrt{l'^2+m'^2+n'^2} \qquad (2')$$

où V est l'angle de deux droites. L'expression devient plus simple si l, m, n, l', m', n' désignent les cosinus des angles, alors $l^2+m^2+n^2 = 1 = l'^2+m'^2+n'^2$. Nous avons

$$\delta \,.\, \sin V = \begin{vmatrix} a'-a & b'-b & c'-c \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} . \qquad (3)$$

Le produit $\delta \,.\, \sin V$ est ce qu'on appelle *le moment de deux droites* (1) et (1′). Le déterminant à droite égalé à zéro exprime que les deux droites se coupent. On peut donc dire que *les deux droites de l'espace se coupent si leur moment s'annule*, — en d'autres mots, si leur plus courte distance est nulle, ou bien si elles font un angle nul, c'est-à-dire si elles sont parallèles.

Dans les deux cas le volume d'un tétraèdre que l'on conçoit en prenant une paire de points sur chacune des deux droites, doit être nul; il est donc naturel de chercher relation entre le moment et le volume de ce tétraèdre.

Si l'on a déjà établi l'expression (1) de la plus courte distance il est facile de trouver cette relation. En effet, si l'on prend un point (x, y, z) sur la droite (1) et un autre (x', y', z') sur (1'), on a

$$l = \frac{x_1 - a}{\sqrt{\Sigma(x_1 - a)^2}}, \ldots, \qquad l' = \frac{x_1' - a'}{\sqrt{\Sigma(x_1' - a')^2}}.$$

Le déterminant au numérateur est égal à six fois le volume du tétraèdre (x_1, a, a', x_1'), et les racines carrées au dénominateur représentent les longueurs des arêtes opposées, c'est-à-dire

$$\delta . \sin V = \pm \frac{6V}{d . d'}. \tag{4}$$

Cette relation se simplifie si l'on prend les points x_1, x_1' de manière que d et d' soient égales à l'unité de longueur. Elle exprime le théorème connu de géométrie du tétraèdre: *si l'on prend sur deux droites gauches deux longueurs finies, le volume du tétraèdre ainsi obtenu ne varie pas si l'on fait glisser ces longueurs le long des droites respectives sans changer leur valeur.*

Cette relation entre le moment de deux droites et le volume a déjà été donné par Cayley. Il établit la formule (4) de deux manières différentes.

1° La section du tétraèdre par le plan parallèle aux deux arêtes opposées à la distance de z et $\delta - z$ des deux extrémités de la plus courte distance δ a pour aire

$$\frac{dd'(\delta - z)z}{\delta^2} \sin V.$$

En intégrant entre les limites 0 et δ, on obtient le volume du tétraèdre

$$V = \int_0^\delta \frac{dd'(\delta - z)z}{\delta^2} \sin V . dz = \frac{1}{6} dd'\delta \sin V.$$

La 2me méthode est encore plus élémentaire. En ce point le texte de Cayley contient une faute de rédaction, il dit: par une des arêtes qui ne se coupent pas menons un plan *perpendiculaire à l'arête opposée* (ce qui est en général impossible et veut dire: perpendiculaire à la plus courte distance des deux arêtes). Le tétraèdre est décomposé en deux tétraèdres ayant pour base commune un triangle; le volume entier est égal à la somme (ou différence) des volumes de ces deux tétraèdres.

$$V = \frac{1}{3} S \cdot (h_1 \pm h_2) \,, \qquad h_1 \pm h_2 = d' \sin V \quad \text{et} \quad S = \frac{a\delta}{2} \,,$$

ce qui ramène à la formule (4).

En résumé, à l'aide des développements du § 2 nous pouvons dire, qu'*en coordonnées homogènes tétraèdriques le moment de deux droites s'exprime — jusqu'à un multiplicateur dépendant seulement du choix du système de coordonnées — par le déterminant composé des coordonnées des deux paires de points pris sur les deux droites.* Cette remarque va être mise à profit dans la suite.

§ 4. — *Expression du moment de deux droites en coordonnées de la droite.*

Prenons les coordonnées homogènes de la droite p_{ix}, liées par la relation

$$P \equiv (p \,,\, p) \equiv p_{12} p_{34} + p_{13} p_{42} + p_{14} p_{23} = 0 \,. \qquad (1)$$

La condition pour que deux droites p et p' se coupent est alors

$$(p \,,\, p') = \Sigma \frac{\partial P}{\partial p_{ik}} p'_{ik} = 0 \,. \qquad (2)$$

Ce n'est autre chose, à un facteur près, que le volume du tétraèdre formé par deux segments de longueur 1 pris sur l'une et l'autre droite. En effet, si x, y sont deux points de la première droite, on a

$$p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i \,,$$

à un facteur près; si ξ, η sont deux points de la seconde,

$$p'_{ik} = \xi_i \eta_k - \xi_k \eta_i \,;$$

ainsi donc

$$(p, p') = \Sigma(x_1 y_2)(\xi_3 \eta_4) \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{vmatrix},$$

et d'après § 2

$$= 6\lambda . \mathrm{V},$$

donc d'après § 3

$$= \lambda . \delta . \sin \mathrm{V}.$$

Ainsi

$$\delta . \sin \mathrm{V} = \lambda' . (p, p') . \qquad (3)$$

Deuxième Partie: Applications.

§ 5. — *Applications à la théorie des connexes ternaires.*

1. — Soient (x, u), (y, v) deux éléments (point, droite) du plan connexe, et soient a la droite (xy), A le point (uv). Les coordonnées de A sont proportionelles aux mineurs de la matrice

$$\begin{Vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{Vmatrix}.$$

Donc l'aire du triangle Axy, à un facteur près dépendant du choix du système des coordonnées, est représentée par la formule

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ (u_2 v_3) & (u_3 v_1) & (u_1 v_2) \end{vmatrix} \equiv \Sigma(u_i v_k)(x_i x_k) \equiv u_x v_y - v_x u_y$$

donnée dans mon mémoire cité plus haut.

Mais nous pourrions considérer un autre triangle, notamment celui formé par les droites u, v, $a \equiv (xy)$. D'après une formule connue (G. Salmon, *Sections coniques*, n° 39, p. 53) son aire a pour expression

$$\frac{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ (xy)_1 & (xy)_2 & (xy)_3 \end{vmatrix}^2}{(u_1 v_2)(v_1 (xy)_2) \cdot ((xy)_1 u_2)},$$