SUR LE MOMENT DE DEUX DROITES ET SON APPLICATION DANS LA THÉORIE DES CONNEXES

Autor(en): **Sintsof, D.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-21867

SUR LE MOMENT DE DEUX DROITES ET SON APPLICATION DANS LA THÉORIE DES CONNEXES

PAR

D. Sintsof (Kharkof).

C'est à Cayley que nous sommes redevables de l'introduction du moment de deux droites. Dans mon mémoire « Théorie des connexes dans l'espace » (*Annales de l'Université de Kasan*, 1895) j'ai appliqué cette notion aux deux droites que l'on obtient si l'on prend deux éléments (point, plan), — l'une qui joint les points, l'autre qui est l'intersection des deux plans, et c'est à cette expression que j'ai donnée le nom de moment de deux éléments du connexe.

Mais l'expression analytique que l'on établit existe aussi pour le connexe ternaire, et j'ai donné (*loc. cit.*, Ch. IV, remarque) son interprétation géométrique.

Mais pour les applications il est important de montrer quels sont les multiplicateurs numériques que l'on introduit, si l'on prend un système particulier de coordonnées homogènes.

C'est par ce problème élémentaire que je commence. Il ne me paraît pas dépourvu d'intérêt. Puis je donne des applications à la théorie des connexes.

Première Partie.

§ 1. — *L'aire du triangle en coordonnées homogènes (triangulaires).*

Ferrers *(Trilinear coordinates)* donne l'expression pour la distance de deux points en coordonnées homogènes. Il n'est pas sans intérêt de donner l'expression correspondante de l'aire d'un triangle.

Prenons pour coordonnées homogènes x, y, z d'un point M les perpendiculaires MQ, MP, MR abaissées de M sur les côtés du triangle fondamental ABC (fig. 1) ayant au sommet C l'angle ω; les longueurs des côtés opposés aux sommets A, B, C étant a, b, c, on a

$$ax + by + cz = 2\Delta ABC \equiv 2\Delta_0 \, . \qquad (1)$$

Soient les coordonnées (non-homogènes) du même point M par rapport aux axes CA, CB, $\bar{x}$, $\bar{y}$. Alors

$$\left.\begin{aligned} x &= \bar{x} \, . \sin \omega \\ y &= \bar{y} \sin \omega \end{aligned}\right\} . \qquad (2)$$

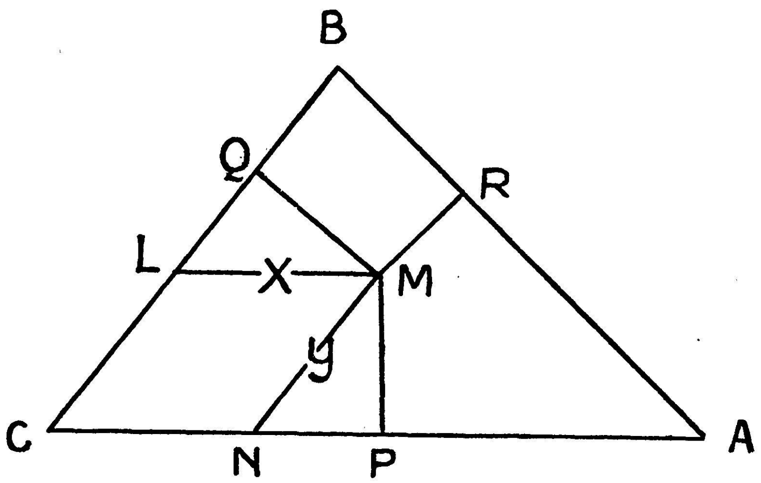

Fig. 1.

Donc, si l'on prend trois points M, M′, M″

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & \dfrac{2\Delta_0 - ax - by}{c} \\ x' & y' & \dfrac{2\Delta_0 - ax' - by'}{c} \\ x'' & y'' & \dfrac{2\Delta_0 - ax'' - by''}{c} \end{vmatrix} = \frac{2\Delta_0}{c} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix}$$

ou, d'après (2)

$$= \frac{2\Delta_0}{c} \begin{vmatrix} \bar{x} & \bar{y} & 1 \\ \bar{x'} & \bar{y'} & 1 \\ \bar{x''} & \bar{y''} & 1 \end{vmatrix} . \sin^2 \omega \, .$$

Mais si l'on fait tourner l'axe des y (CB) de l'angle $\frac{\pi}{2} - \omega$ les coordonnées nouvelles ξ, η s'expriment à l'aide de $\overline{x}$, $\overline{y}$:

$$\overline{y} = \frac{\eta}{\sin\omega}, \qquad \overline{x} = \xi - \eta \operatorname{cotg}\omega .$$

Donc

$$\begin{vmatrix} \overline{x} & \overline{y} & 1 \\ \overline{x'} & \overline{y'} & 1 \\ \overline{x''} & \overline{y''} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sin\omega} \begin{vmatrix} \xi & -\eta \operatorname{cotg}\omega & \eta & 1 \\ \xi' & -\eta' \operatorname{cotg}\omega & \eta' & 1 \\ \xi'' & -\eta'' \operatorname{cotg}\omega & \eta'' & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sin\omega} \begin{vmatrix} \xi & \eta & 1 \\ \xi' & \eta' & 1 \\ \xi'' & \eta'' & 1 \end{vmatrix}$$

ce qui est égal à $\frac{2\Delta}{\sin\omega}$, Δ étant l'aire du triangle MM′ M″.

Donc, dans le système des coordonnées homogènes, que nous avons choisi, on a

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x', & y', & z' \\ x'', & y'', & z'' \end{vmatrix} = \frac{2\Delta_0}{c} \cdot \frac{2\Delta}{\sin\omega} \cdot \sin^2\omega = 2\Delta \cdot h_c \cdot \sin\omega \qquad (3)$$

puisque $2\Delta_0 = c \cdot h_c$, h_c étant la hauteur correspondant à la base AB du triangle ABC. On pourrait encore poser $2\Delta_0 = ab \sin\omega$. Alors

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = \frac{ab}{c} \sin^2\omega \cdot \Delta . \qquad (3')$$

Le défaut de la formule (3′) est son manque de symétrie. Si nous prenions pour l'origine des coordonnées obliques d'autres sommets du triangle ABC: A ou B nous aurions $\frac{bc}{a}\sin^2 A$ ou bien $\frac{ac}{b}\sin^2 B$.

Les trois expressions sont égales, vu que

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin c} = 2R .$$

Donc enfin

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 2\Delta \cdot \frac{\Delta_0}{R} = 2\Delta \frac{abc}{4R^2} . \qquad (3'')$$

Telle est la relation entre la valeur du déterminant des coordonnées homogènes des trois points et l'aire du triangle qu'ils forment.

Passons à l'espace.

§ 2. — *Le volume d'un tétraèdre en coordonnées tétraédriques.*

Prenons pour le système des coordonnées tétraédriques x, y, z, t, les quatre perpendiculaires abaissées d'un point M sur les quatre plans d'un certain tétraèdre fondamental. Soient A, B, C, D les 4 sommets, α, β, γ, δ les aires des faces opposées, on a

$$\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \cdot z + \delta \cdot t = 3 \cdot V_0 \,. \tag{1}$$

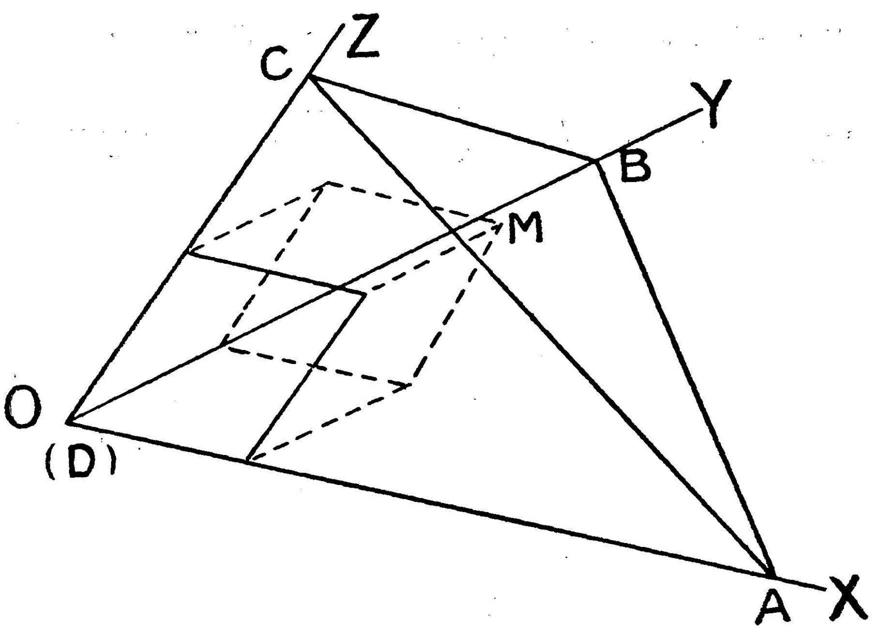

Fig. 2.

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} x\,, & y\,, & z\,, & t \\ x'\,, & y'\,, & z'\,, & t' \\ x''\,, & y''\,, & z''\,, & t'' \\ x'''\,, & y'''\,, & z'''\,, & t''' \end{vmatrix} = \frac{3V_0}{\delta} \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x' & y' & z' & 1 \\ x'' & y'' & z'' & 1 \\ x''' & y''' & z''' & 1 \end{vmatrix} \,. \tag{2}$$

Choisissons à présent un système des coordonnées non-homogènes obliquangles ayant pour plans les 3 plans du tétraèdre fondamental — alors z, parexemple, est la hauteur du parallélépipède dont les arêtes sont $\bar{y}$, $\bar{x}$, $\bar{z}$, — de sorte que $z = \bar{z} \cos(z, \bar{z})$ (fig. 2).

De même

$$y = \bar{y} \cdot \cos(y, \bar{y}) ,$$

$$x = \bar{x} \cdot \cos(x, \bar{x}) .$$

Ainsi

$$(xy'z''t''') = (\bar{x} \cdot \bar{y}' \cdot \bar{z}'' \cdot 1) \cdot \frac{3V_0}{\delta} \cos(x, \bar{x}) \cdot \cos(y, \bar{y}) \cos(z, \bar{z}) .$$

Du point O comme centre décrivons une sphère de rayon 1, soient X. Y, Z les 3 points de rencontre de cette sphère avec les axes des coordonnées obliques; soient

$$\sphericalangle \mathrm{YOX} = \lambda , \quad \sphericalangle \mathrm{XOZ} = \mu , \quad \sphericalangle \mathrm{YOZ} = \nu .$$

Nous aurons un triangle sphérique, dont les hauteurs (fig. 3)

$$h_\lambda = \frac{\pi}{2} - (z, \bar{z}) , \quad h_\mu = \frac{\pi}{2} - (y, \bar{y}) , \quad h_\nu = \frac{\pi}{2} - (z, \bar{z})$$

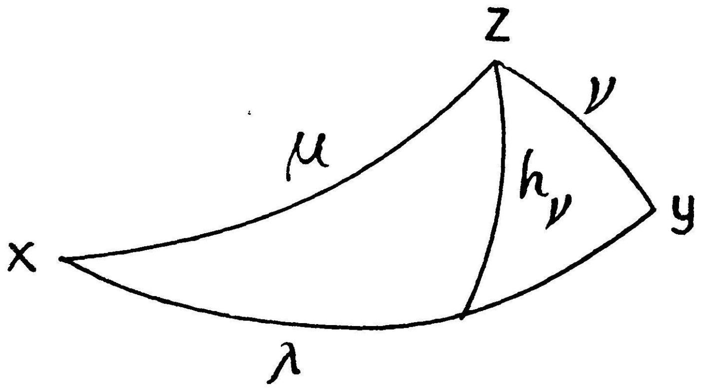

Fig. 3.

sont à calculer. Désignons les angles du triangle sphérique XYZ respectivement par X, Y, Z.

Alors

$$\sin h_\lambda = \sin \mu \cdot \sin \mathrm{X} = \sin \nu \cdot \sin \mathrm{Y} .$$

Soit

$$\lambda + \mu + \nu = 2s .$$

D'après les formules connues de la trigonométrie sphérique

$$\sin \mathrm{X} = 2 \frac{\sqrt{\sin s \cdot \sin(s - \lambda) \cdot \sin(s - \mu) \cdot \sin(s - \nu)}}{\sin \lambda \cdot \sin \mu} = \frac{2\sqrt{\mathrm{P}}}{\sin \lambda \sin \mu} .$$

De même

$$\sin Y = \frac{2\sqrt{P}}{\sin\lambda\,.\,\sin\nu}\,, \qquad \sin Z = \frac{2\sqrt{P}}{\sin\nu\,\sin\mu}\,.$$

Donc

$$\sin h_\lambda = \cos(z, \overline{z}) = \frac{2\sqrt{P}}{\sin\lambda}\,,$$

$$\sin h_\mu = \cos(y, \overline{y}) = \frac{2\sqrt{P}}{\sin\mu}\,,$$

$$\sin h_\nu = \cos(x, \overline{x}) = \frac{2\sqrt{P}}{\sin\nu}\,.$$

Ainsi

$$(xy'z''t''') = \frac{8\,.\,3\,.\,V_0}{\delta}\cdot\frac{P^{3/2}}{\sin\lambda\,\sin\mu\,\sin\nu}\,(\overline{x}\,\overline{y}'\,\overline{z}''\,,\,1)\,. \tag{3}$$

Mais ce n'est pas encore la relation définitive. Il est intéressant d'établir le multiplicateur exact. Introduisons un système de coordonnées dont l'axe $O\xi$ coïncide avec l'axe $O\overline{X}$, OH étant situé dans le plan $\overline{X}O\overline{Y}$ et perpendiculaire à $O\overline{X}$, enfin OZ étant perpendiculaire au plan $\overline{X}O\overline{Y}$.

Nous aurons pour le tableau des 9 cosinus:

	$O\Xi$	OH	OZ
$\overline{O}X$	1	0	0
$\overline{O}Y$	$\cos\lambda$	$\sin\lambda$	0
$\overline{O}Z$	$\cos\mu$	$\cos U$	$\cos W$

Les angles U et W sont à déterminer à l'aide des relations de la forme

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\lambda & \cos\mu & \cos\alpha \\ \cos\lambda & 1 & \cos\nu & \cos\beta \\ \cos\mu & \cos\nu & 1 & \cos\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0\,. \tag{4}$$

Pour déterminer cos W nous substituons les angles de OZ :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\lambda & \cos\mu & 0 \\ \cos\lambda & 1 & \cos\nu & 0 \\ \cos\mu & \cos\nu & 1 & \cos W \\ 0 & 0 & \cos W & 1 \end{vmatrix} = 0\,,$$

ce qui donne

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\lambda & \cos\mu \\ \cos\lambda & 1 & \cos\nu \\ \cos\mu & \cos\nu & 1 - \cos^2 W \end{vmatrix},$$

ou enfin

$$4P - \cos^2 W . \sin^2\lambda = 0 ,$$

d'où l'on tire

$$\cos W = \pm \frac{\sqrt{P}}{\sin\lambda} . \tag{5}$$

De même pour le calcul de $\cos U$ nous avons à substituer dans (4) les angles de OH, ce qui donne

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\lambda & \cos\mu & 0 \\ \cos\lambda & 1 & \cos\nu & \sin\lambda \\ \cos\mu & \cos\nu & 1 & \cos U \\ 0 & \sin\lambda & \cos U & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{d'où} \quad \cos U = \frac{\cos\nu - \cos\lambda\cos\mu}{\sin\lambda} , \tag{6}$$

Ainsi les formules de transformation deviennent

$$\overline{X} + \overline{Y}\cos\lambda + \overline{Z}\cos\mu = \xi ,$$

$$\overline{X}\cos\lambda + \overline{Y} + \overline{Z}\cos\nu = \xi\cos\lambda + \eta\sin\lambda ,$$

$$\overline{X}\cos\mu + \overline{Y}\cos\nu + \overline{Z} = \xi\cos\mu + \eta\frac{\cos\nu - \cos\lambda\cos\mu}{\sin\lambda} + \zeta\frac{2\sqrt{P}}{\sin\lambda} .$$

Formons à présent le déterminant

$$\begin{vmatrix} \xi\ , & \xi\cos\lambda + \eta\sin\lambda , & \xi\cos\mu + \eta\dfrac{\cos\nu - \cos\lambda\cos\mu}{\sin\lambda} + \zeta\dfrac{2\sqrt{P}}{\sin\lambda} \\ \xi'\ , & \xi'\cos\lambda + \eta'\sin\lambda , & \xi'\cos\mu + \eta'\dfrac{\cos\nu - \cos\lambda\cos\mu}{\sin\lambda} + \zeta'\dfrac{2\sqrt{P}}{\sin\lambda} \\ \xi''\ , & \xi''\cos\lambda + \eta''\sin\lambda , & \xi''\cos\mu + \eta''\dfrac{\cos\nu - \cos\lambda\cos\mu}{\sin\lambda} + \zeta''\dfrac{2\sqrt{P}}{\sin\lambda} \\ \xi'''\ , & \xi'''\cos\lambda + \eta'''\sin\lambda , & \xi'''\cos\mu + \eta'''\dfrac{\cos\nu - \cos\lambda\cos\mu}{\sin\lambda} + \zeta'''\dfrac{2\sqrt{P}}{\sin\lambda} \end{vmatrix} .$$

Il est égal, comme il est facile à voir, à

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta & 1 \\ \xi' & \eta' & \zeta' & 1 \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' & 1 \\ \xi''' & \eta''' & \zeta''' & 1 \end{vmatrix} \times \sin\lambda \times \frac{2\sqrt{P}}{\sin\lambda} = 6V . 2\sqrt{P} . \tag{7}$$

Mais, d'autre part, ce déterminant est égal à

$$\begin{vmatrix} \overline{X} + \overline{Y} \cos\lambda + \overline{Z} \cos\mu, & \overline{X} \cos\lambda + \overline{Y} + \overline{Z} \cos\nu, & \overline{X} \cos\mu + \overline{Y} \cos\nu + \overline{Z}, & 1 \\ \overline{X'} + \overline{Y'} \cos\lambda + \overline{Z'} \cos\mu, & \overline{X'} \cos\lambda + \overline{Y'} + \overline{Z'} \cos\nu, & \overline{X'} \cos\mu + \overline{Y'} \cos\nu + \overline{Z'}, & 1 \\ \overline{X''} + \overline{Y''} \cos\lambda + \overline{Z''} \cos\mu, & \overline{X''} \cos\lambda + \overline{Y''} + \overline{Z''} \cos\nu, & \overline{X''} \cos\mu + \overline{Y''} \cos\nu + \overline{Z''}, & 1 \\ \overline{X'''} + \overline{Y'''} \cos\lambda + \overline{Z'''} \cos\mu, & \overline{X'''} \cos\lambda + \overline{Y'''} + \overline{Z'''} \cos\nu, & \overline{X'''} \cos\mu + \overline{Y'''} \cos\nu + \overline{Z'''}, & 1 \end{vmatrix},$$

que l'on transforme facilement en

$$\begin{vmatrix} (\overline{X'}-\overline{X})+(\overline{Y'}-\overline{Y})\cos\lambda+(\overline{Z'}-\overline{Z})\cos\mu, & (\overline{X'}-\overline{X})\cos\lambda+(\overline{Y'}-\overline{Y})+(\overline{Z'}-\overline{Z})\cos\nu, & (\overline{X'}-\overline{X})\cos\mu+(\overline{Y'}-\overline{Y})\cos\nu+(\overline{Z'}-\overline{Z}) \\ (\overline{X''}-\overline{X})+(\overline{Y''}-\overline{Y})\cos\lambda+(\overline{Z''}-\overline{Z})\cos\mu, & (\overline{X''}-\overline{X})\cos\lambda+(\overline{Y''}-\overline{Y})+(\overline{Z''}-\overline{Z})\cos\nu, & (\overline{X''}-\overline{X})\cos\mu+(\overline{Y''}-\overline{Y})\cos\nu+(\overline{Z''}-\overline{Z}) \\ (\overline{X'''}-\overline{X})+(\overline{Y'''}-\overline{Y})\cos\lambda+(\overline{Z'''}-\overline{Z})\cos\mu, & (\overline{X'''}-\overline{X})\cos\lambda+(\overline{Y'''}-\overline{Y})+(\overline{Z'''}-\overline{Z})\cos\nu, & (\overline{X'''}-\overline{X})\cos\mu+(\overline{Y'''}-\overline{Y})\cos\nu+(\overline{Z'''}-\overline{Z}) \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} \overline{X'}-\overline{X}, & \overline{Y'}-\overline{Y}, & \overline{Z'}-\overline{Z} \\ \overline{X''}-\overline{X}, & \overline{Y''}-\overline{Y}, & \overline{Z''}-\overline{Z} \\ \overline{X'''}-\overline{X}, & \overline{Y'''}-\overline{Y}, & \overline{Z'''}-\overline{Z} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & \cos\lambda & \cos\mu \\ \cos\lambda & 1 & \cos\nu \\ \cos\mu & \cos\nu & 1 \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} \overline{X} & \overline{Y} & \overline{Z} & 1 \\ \overline{X'} & \overline{Y'} & \overline{Z'} & 1 \\ \overline{X''} & \overline{Y''} & \overline{Z''} & 1 \\ \overline{X'''} & \overline{Y'''} & \overline{Z'''} & 1 \end{vmatrix} . 4P . \tag{8}$$

Donc, revenant à la formule (A) nous aurons:

$$(xy'z''z''') = \frac{8 . 3V_0}{\delta} \cdot \frac{P^{3/2}}{\sin\lambda \sin\mu \sin\nu} \frac{6V . 2\sqrt{P}}{4P} .$$

Donc, enfin

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x' & y' & z' & t' \\ x'' & y'' & z'' & t'' \\ x''' & y''' & z''' & t''' \end{vmatrix} = \frac{72V_0}{\delta} \frac{P}{\sin\lambda \sin\mu \sin\nu} . V \tag{9}$$

c'est la formule, que nous voulions établir.

Il est à remarquer que le facteur

$$\frac{72 V_0 P}{\delta \, . \sin\lambda \, \sin\mu \, \sin\nu}$$

ne dépend que du choix du tétraèdre de référence; il est le même pour tous les quatre points choisis M, M′, M″, M‴.

§ 3. — *Moment de deux droites.*

La plus courte distance de deux droites de l'espace

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n} \quad (1) \qquad \text{et} \qquad \frac{x-a'}{l'} = \frac{y-b'}{m'} = \frac{z-c'}{n'} \quad (1')$$

est donnée par la formule

$$\delta = \begin{vmatrix} a'-a & b'-b & c'-c \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} : \sqrt{\Sigma(mn'-nm')^2} \qquad (2)$$

ou bien

$$\delta = \begin{vmatrix} a'-a & b'-b & c'-c \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} : \sin V \, . \sqrt{l^2+m^2+n^2} \, . \sqrt{l'^2+m'^2+n'^2} \qquad (2')$$

où V est l'angle de deux droites. L'expression devient plus simple si l, m, n, l', m', n' désignent les cosinus des angles, alors $l^2+m^2+n^2 = 1 = l'^2+m'^2+n'^2$. Nous avons

$$\delta \, . \sin V = \begin{vmatrix} a'-a & b'-b & c'-c \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} . \qquad (3)$$

Le produit δ . sin V est ce qu'on appelle *le moment de deux droites* (1) et (1′). Le déterminant à droite égalé à zéro exprime que les deux droites se coupent. On peut donc dire que *les deux droites de l'espace se coupent si leur moment s'annule*, — en d'autres mots, si leur plus courte distance est nulle, ou bien si elles font un angle nul, c'est-à-dire si elles sont parallèles.

Dans les deux cas le volume d'un tétraèdre que l'on conçoit en prenant une paire de points sur chacune des deux droites, doit être nul; il est donc naturel de chercher relation entre le moment et le volume de ce tétraèdre.

Si l'on a déjà établi l'expression (1) de la plus courte distance il est facile de trouver cette relation. En effet, si l'on prend un point (x, y, z) sur la droite (1) et un autre (x', y', z') sur (1'), on a

$$l = \frac{x_1 - a}{\sqrt{\Sigma (x_1 - a)^2}}\,, \ldots, \qquad l' = \frac{x_1' - a'}{\sqrt{\Sigma (x_1' - a')^2}}\,.$$

Le déterminant au numérateur est égal à six fois le volume du tétraèdre (x_1, a, a', x_1'), et les racines carrées au dénominateur représentent les longueurs des arêtes opposées, c'est-à-dire

$$\delta \,.\, \sin \mathrm{V} = \pm \frac{6\mathrm{V}}{d\,.\,d'}\,. \tag{4}$$

Cette relation se simplifie si l'on prend les points x_1, x_1' de manière que d et d' soient égales à l'unité de longueur. Elle exprime le théorème connu de géométrie du tétraèdre: *si l'on prend sur deux droites gauches deux longueurs finies, le volume du tétraèdre ainsi obtenu ne varie pas si l'on fait glisser ces longueurs le long des droites respectives sans changer leur valeur.*

Cette relation entre le moment de deux droites et le volume a déjà été donné par Cayley. Il établit la formule (4) de deux manières différentes.

1° La section du tétraèdre par le plan parallèle aux deux arêtes opposées à la distance de z et $\delta - z$ des deux extrémités de la plus courte distance δ a pour aire

$$\frac{dd'(\delta - z)z}{\delta^2} \sin \mathrm{V}\,.$$

En intégrant entre les limites 0 et δ, on obtient le volume du tétraèdre

$$\mathrm{V} = \int_0^\delta \frac{dd'(\delta - z)z}{\delta^2} \sin \mathrm{V}\,.\,dz = \frac{1}{6} dd'\delta \sin \mathrm{V}\,.$$

La 2^{me} méthode est encore plus élémentaire. En ce point le texte de Cayley contient une faute de rédaction, il dit: par une des arêtes qui ne se coupent pas menons un plan *perpendiculaire à l'arête opposée* (ce qui est en général impossible et veut dire: perpendiculaire à la plus courte distance des deux arêtes). Le tétraèdre est décomposé en deux tétraèdres ayant pour base commune un triangle; le volume entier est égal à la somme (ou différence) des volumes de ces deux tétraèdres.

$$V = \frac{1}{3} S . (h_1 \pm h_2) , \qquad h_1 \pm h_2 = d' \sin V \quad \text{et} \quad S = \frac{a\delta}{2} ,$$

ce qui ramène à la formule (4).

En résumé, à l'aide des développements du § 2 nous pouvons dire, qu'*en coordonnées homogènes tétraèdriques le moment de deux droites s'exprime — jusqu'à un multiplicateur dépendant seulement du choix du système de coordonnées — par le déterminant composé des coordonnées des deux paires de points pris sur les deux droites.* Cette remarque va être mise à profit dans la suite.

§ 4. — *Expression du moment de deux droites en coordonnées de la droite.*

Prenons les coordonnées homogènes de la droite p_{ix}, liées par la relation

$$P \equiv (p , p) \equiv p_{12} p_{34} + p_{13} p_{42} + p_{14} p_{23} = 0 . \tag{1}$$

La condition pour que deux droites p et p' se coupent est alors

$$(p , p') = \Sigma \frac{\partial P}{\partial p_{ik}} p'_{ik} = 0 . \tag{2}$$

Ce n'est autre chose, à un facteur près, que le volume du tétraèdre formé par deux segments de longueur 1 pris sur l'une et l'autre droite. En effet, si x, y sont deux points de la première droite, on a

$$p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i ,$$

à un facteur près; si ξ, η sont deux points de la seconde,

$$p'_{ik} = \xi_i \eta_k - \xi_k \eta_i ;$$

ainsi donc

$$(p, p') = \Sigma(x_1 y_2)(\xi_3 \eta_4) \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{vmatrix},$$

et d'après § 2

$$= 6\lambda . \mathrm{V} ,$$

donc d'après § 3

$$= \lambda . \delta . \sin \mathrm{V} .$$

Ainsi

$$\delta . \sin \mathrm{V} = \lambda' . (p, p') . \tag{3}$$

Deuxième Partie : Applications.

§ 5. — *Applications à la théorie des connexes ternaires.*

1. — Soient (x, u), (y, v) deux éléments (point, droite) du plan connexe, et soient a la droite (xy), A le point (uv). Les coordonnées de A sont proportionelles aux mineurs de la matrice

$$\begin{Vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{Vmatrix}.$$

Donc l'aire du triangle Axy, à un facteur près dépendant du choix du système des coordonnées, est représentée par la formule

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ (u_2 v_3) & (u_3 v_1) & (u_1 v_2) \end{vmatrix} \equiv \Sigma(u_i v_k)(x_i x_k) \equiv u_x v_y - v_x u_y$$

donnée dans mon mémoire cité plus haut.

Mais nous pourrions considérer un autre triangle, notamment celui formé par les droites u, v, $a \equiv (xy)$. D'après une formule connue (G. Salmon, *Sections coniques*, n° 39, p. 53) son aire a pour expression

$$\frac{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ (xy)_1 & (xy)_2 & (xy)_3 \end{vmatrix}^2}{(u_1 v_2)(v_1 (xy)_2) \cdot ((xy)_1 u_2)},$$

ou bien, calculs faits:

$$\frac{(u_x v_y - u_y v_x)^2}{(u_1 v_2 - u_2 v_1)(x_3 v_y - y_3 v_x)(u_x y_3 - u_y x_3)},$$

formule qui n'est pas symétrique.

Cherchons une autre formule plus symétrique. Soient $\bar{x}$, $\bar{y}$ les points d'intersection de la droite $(x, y) \equiv a$ avec les droites u et v; de sorte que $u_{\bar{x}} = 0$, $v_{\bar{y}} = 0$. On peut alors poser

$$\bar{x} = \lambda x + \mu y\,, \qquad \bar{y} = \lambda' x + \mu' y\,,$$

avec

$$\lambda u_x + \mu u_y = 0\,, \qquad \lambda' v_x + \mu' v_y = 0\,.$$

Pour fixer les valeurs absolues de λ, μ, λ', μ' ajoutons les relations

$$\lambda + \mu = 1\,, \qquad \lambda' + \mu' = 1\,.$$

Alors

$$\lambda = \frac{-u_y}{u_x - u_y}\,, \qquad \mu = \frac{u_x}{u_x - u_y}\,,$$

$$\lambda' = \frac{-v_y}{v_x - v_y}\,, \qquad \mu' = \frac{v_x}{v_x - v_y}\,.$$

L'aire double du triangle A$\bar{x}$, $\bar{y}$ ($\equiv uva$) est donc, à un facteur constant près,

$$\begin{vmatrix} (uv)_1 & (uv)_2 & (uv)_3 \\ \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \bar{x}_3 \\ \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \bar{y}_3 \end{vmatrix} \equiv (\lambda\mu' - \mu\lambda') \begin{vmatrix} (uv)_1 & (uv)_2 & (uv)_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & x_3 \end{vmatrix}$$

ou bien

$$\frac{(u_x v_y - u_y v_x)^2}{(u_x - u_y)(v_x - v_y)}\,.$$

La même formule peut être établie en calculant directement les coordonnées des points $\bar{x}$, $\bar{y}$ par les équations

$$u_{\bar{x}} \equiv u_1 \bar{x}_1 + u_2 \bar{x}_2 + u_3 \bar{x}_3 = 0\,, \qquad (\bar{x} x_2 y_3) = 0\,,$$

ce qui donne

$$\frac{\bar{x}_1}{x_1 u_y - y_1 u_x} = \frac{\bar{x}_2}{x_2 u_y - y_2 u_x} = \frac{\bar{x}_3}{x_3 u_y - y_3 u_x}\,.$$

De même les équations $v_y = 0$, $(\bar{y}x_2y_3) = 0$ donnent:

$$\frac{\bar{y}_1}{x_1 v_y - y_1 v_x} = \frac{\bar{y}_2}{x_2 v_y - y_2 v_x} = \frac{\bar{y}_3}{x_3 v_y - y_3 v_x} .$$

Enfin, les coordonnées du point A sont proportionnelles à

$$(u_2 v_3) , \quad (u_3 v_1) , \quad (u_1 v_2) .$$

Donc, l'aire double du triangle $A\bar{x}\bar{y}$, à un facteur près, est égal au déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 u_y - y_1 u_x & x_2 u_y - y_2 u_x & x_3 u_y - y_3 u_x \\ x_1 v_y - y_1 v_x & x_2 v_y - y_2 v_x & x_3 v_y - y_3 v_x \\ u_2 v_3 - u_3 v_2 & u_3 v_1 - u_1 v_3 & u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{vmatrix} \equiv (u_x v_y - u_y v_x) \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ (u_2 v_3) & (u_3 v_1) & (u_1 v_2) \end{vmatrix}$$

$$\equiv (u_x v_y - u_y v_x)^2 .$$

Reste à déterminer le facteur de proportionnalité (dans le cas du système considéré au § 1).

D'après (1) pour le premier point:

$$2\Delta_0 = \Sigma a_i V_i = H(u_y \Sigma a_i x_i - u_x \Sigma a_i y_i)$$

$$= 2\Delta_0 (u_y - u_x) H \quad \therefore \quad H = \frac{1}{u_y - u_x} .$$

De même pour le second point nous trouvons

$$H' = \frac{1}{v_y - v_x} ,$$

et nous arrivons de nouveau à la formule

$$\frac{(u_x v_y - u_y v_x)^2}{(u_y - u_x)(v_y - v_x)} .$$

2. — Soit à présent (y, v) l'élément du connexe conjugué qui correspond à l'élément (x, u). Alors

$$u_y = 0 , \quad v_x = 0 .$$

L'expression du moment se ramène à

$$- u_x v_y .$$

Pour de telles paires d'éléments les deux triangles, dont nous avons parlé au n° 1 coïncident, et les deux expressions de l'aire sont identiques.

Le triangle se ramène à un point (une droite) dans deux cas: 1° u passe non seulement par y, mais aussi par x.

$$u_x = 0 .$$

2° v passe non seulement par x, mais aussi par y:

$$v_y = 0 .$$

Donc: *le moment de deux éléments correspondants d'un connexe ternaire et de son conjugné s'annule si l'un ou l'autre appartient à la coïncidence principale correspondante.*

Remarque. — Dans le cas général de deux éléments (x, u), (y, v) quelconques leur moment s'annule dans les trois cas:

1° Les points x et y coïncident;
2° Les droites u et v coïncident;
3° Le point A est sur la droite a.

3. — *Connexe bilinéaire* (collinéation):

$$f \equiv a_x u_\alpha \equiv \Sigma a_{ik} \alpha_i u_k = 0 . \tag{1}$$

Les éléments correspondants

$$\rho y_i = a_x \alpha_i , \quad \sigma v_i = a_i u_\alpha \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{2}$$

forment le connexe conjugué

$$(abv)(\alpha\beta\eta) = 0 .$$

Si l'on calcule le dernier, on obtient (changeant y, v en x, u)

$$i^2 . g(x, u) = u_x(i^2 - i_1) - 2if + 2f_1 .$$

De (2) on déduit

$$v_y = a_x u_\beta b_\alpha \equiv f_1(x, u) ,$$

$$v_x = \Sigma a_i x_i u_\alpha = u_\alpha a_x = f(x, u) ,$$

$$u_y = a_x \Sigma \alpha_i u_i = a_x u_\alpha = f(x, u) .$$

Donc

$$u_x v_y - u_y v_x \equiv u_x f_1(x, u) - f^2(x, u) .$$

Ainsi les éléments du connexe bilinéaire pour lesquels le moment (au sens du n° 2) est nul appartiennent au connexe identique ou à $f_1(x, u) = 0$, — ce n'est qu'un cas particulier de ce qui a été dit au n° 2 pour le connexe général.

Enfin, si l'élément (x, u) n'appartient pas au connexe (1), le moment de (x, u) et de son transformé par (1) est nul, s'il appartient au connexe (2, 2)

$$u_x f_1(x_1 u) - f^2(x_1 u) = 0$$

dans lequel à chaque droite u correspond une courbe de 2^me^ ordre ayant double contact avec la conique dégénérée — paire de droites u et u'' et pour corde de contact la droite u', si l'on désigne les transformées collinéaires successives de u en collinéation (1) par u', u'', ...

Réciproquement, au point donné x appartient une courbe de 2^me^ classe passant par les points x, x'' et dont les tangentes correspondantes se coupent en x'.

§ 6. — *Le moment dans la théorie des connexes avec élément (point, plan).*

Comme j'ai indiqué au commencement, la notion du moment de deux droites trouve son application dans la théorie des connexes quaternaires ayant pour l'élément la combinaison (point, plan). Si l'on prend deux éléments pareils (x, u), (y, v), leurs points x, y déterminent une droite $p \equiv (xy)$, et leurs plans u, v une autre $p' = (uv)$. On peut donc déterminer le moment de ces droites, et c'est ce que je nomme *le moment de deux éléments du connexe* (x, u).

Son expression analytique s'exprime par la formule

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ p'_1 & p'_2 & p'_3 & p'_4 \\ p'_1 & p'_2 & p'_3 & p'_4 \end{vmatrix} \equiv \Sigma (x_i y_k - x_k y_i)(u_i v_k - u_k v_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4) ,$$

car $p'_{12} = \pi_{34} = (u_3 v_4)$ et ainsi de suite.

Donc, à un facteur près, nous avons

$$\mathrm{M}\begin{pmatrix} x\,u \\ y\,v \end{pmatrix} \equiv \Sigma (u_i x_i v_k y_k - v_k x_k u_i y_i - v_i x_i u_k y_k + u_k x_k v_i y_i)$$
$$\equiv 2(u_x v_y - u_y v_x) \; .$$

Prenons un élément (x, u) quelconque et son correspondant dans le connexe conjugué (y, v). Nous aurons pour le moment de ses deux éléments

$$\mathrm{M}\begin{pmatrix} (x\,,\; u) \\ (y\,,\; v) \end{pmatrix} = \frac{2}{\rho\sigma}\left(u_k \Sigma \frac{\partial f}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} - mnf^2(x\,,\; u)\right) \; ,$$

parce que

$$\rho y_i = \frac{\partial f}{\partial u_i} \; , \qquad \sigma v_k = \frac{\partial f}{\partial x_k} \; ,$$

donc

$$\rho \, . \, u_y = \Sigma u_i \frac{\partial f}{\partial u_i} = n \, . \, f(x\,,\; u) \; ,$$

$$\sigma \, . \, v_x = \Sigma x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = m \, . \, f(x\,,\; u) \; .$$

Si l'élément (x, u) appartient au connexe $f(x, u) = 0$, son moment par rapport à l'élément correspondant du connexe conjugué devient

$$\rho\sigma \, . \, \mathrm{M}\begin{pmatrix} x\,u \\ y\,v \end{pmatrix} \equiv u_x \, . \, \Sigma \frac{\partial f}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \; .$$

Ainsi, *si l'élément* (x, u) *appartient à la coïncidence principale du connexe donné*

$$(f(x\,,\; u) = 0 \; , \quad u_x = 0)$$

ou son correspondant (y, v) *appartient à la coïncidence principale du connexe conjugué, le moment de ces deux éléments est nul.*

La réciproque est vraie: *si le moment d'un élément du connexe donné et de son correspondant au connexe conjugué est nul, l'un ou l'autre appartiennent à la coïncidence principale correspondante.*

Nous pouvons dire encore: Si pour chaque élément du connexe donné $f(x, u) = 0$ nous avons

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial u_i} = 0 \; ,$$

ou si l'on a identiquement

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial u_i} \equiv k \cdot f(x, u)$$

le moment de chaque élément et de son conjugué au connexe $f(xu) = 0$ est nul. Dans ce cas le connexe conjugué du (1) est le connexe identique [1].

§ 7. — *Moment de deux droites dans la théorie des connexes aux éléments (point, droite) dans le* R_3.

1\. — Considérons un connexe lineo-linaire défini par l'équation

$$\Sigma a_{i,\,kj} x_i p_{kj} = 0 \qquad (1)$$

que l'on peut écrire aussi

$$\Phi(\overset{1}{x}\,;\,\overset{1}{p}) \equiv \Sigma \Phi_j x_i \equiv \Sigma \Phi^{(1)}_{kj} p_{kj}$$

ou symboliquement

$$a_x(\alpha\alpha pp) \equiv a_x \alpha^2_p$$

De l'ensemble des ∞^7 éléments (point, droite) de l'espace, l'équation (1) détache ∞^6 éléments, que l'on peut caractériser de cette manière: à chaque point X correspondent (c'est-à-dire forment avec X l'élément de la configuration) ∞^3 droites du complexe linéaire

$$P(x) \equiv \Sigma \Phi^{(1)}_{kj} p_{kj} = 0 \;; \qquad (2)$$

parmi ces complexes il y a ∞^2 complexes spéciaux, qui correspondent aux points d'une surface du 2^{me} ordre

$$\Phi^{(1)}_{12}\Phi^{(1)}_{34} + \Phi^{(1)}_{13}\Phi^{(1)}_{42} + \Phi^{(1)}_{14}\Phi^{(1)}_{23} = 0 \equiv a_x a'_x(\alpha b\, \alpha' b') \;. \qquad (3)$$

A chaque point de cette surface correspond une droite, avec

[1] Ceci donne l'idée de considérer les connexes qui sont des transformations rationnelles du connexe identique: si nous avons un connexe quaternaire

$$\Sigma_k \varphi_k(x, u)\psi_k(x, u) = 0 \qquad (k = 1 \dots 4)$$

où φ_k — du degré k en x et du h en u, et ψ_k — du degré $m - k$ en x, $n - h$ en u, à l'aide de la transformation $\rho u_k = \varphi_k(x, u)$, $\sigma v_k = \psi_k(x, u)$, nous le transformons en $v_y = 0$.

les coordonnées $\Phi_{kj}^{(1)}$, l'axe du complexe linéaire spécial (2). Donc chaque complexe P_x sera spécial si l'équation (3) s'annule identiquement, ce qui a lieu quand les coefficients $a_{i,\,kj}$ remplissent 10 relations

$$\begin{aligned} & a_{i,\,12}\,a_{k,\,34} + a_{i,\,34}\,a_{k,\,12} + a_{i,\,13}\,a_{k,\,42} + a_{i,\,42}\,a_{k,\,13} \\ & \qquad + a_{i,\,14}\,a_{k,\,23} + a_{i,\,23}\,a_{k,\,14} = 0 \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \end{aligned}$$

ce qui s'écrit symboliquement

$$(a_k\, a_i' + a_k'\, a_i)\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}'\mathfrak{b}') = 0\ .$$

La surface (3) peut présenter les divers cas de dégénérescence sur lesquels nous n'insistons pas davantage pour le moment.

2. — Avec le point x forment l'élément de la configuration toutes les droites de l'espace, dont les coordonnées x_i remplissent les conditions

$$\Phi_{kj}^{(1)} = 0 \qquad (k,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

au nombre de 6. En éliminant $x_1 \ldots x_4$ on voit que doivent être nuls les déterminants du tableau

$$\left\| \begin{matrix} a_{1,12} & a_{1,13} & a_{1,14} & a_{1,23} & a_{1,24} & a_{1,34} \\ a_{2,12} & a_{2,13} & a_{2,14} & a_{2,23} & a_{2,24} & a_{2,34} \\ a_{3,12} & a_{3,13} & a_{3,14} & a_{3,23} & a_{3,24} & a_{3,34} \\ a_{4,12} & a_{4,13} & a_{4,14} & a_{4,23} & a_{4,24} & a_{4,34} \end{matrix} \right\| = 0 \qquad (4)$$

ce qui donne en somme 15 relations, dont 3 seulement indépendantes. Si les conditions sont toutes remplies, les mineurs du 3me ordre n'étant pas tous nuls, on reçoit un système défini des valeurs $x_1 x_2 x_3 x_4$, qui déterminent un *point fondamental* du connexe linéo-linéaire (1): par exemple, pour le connexe

$$x_2\,p_{12} + x_3\,p_{13} + x_4\,p_{14} = 0 \qquad (a)$$

le tableau (4) prend la forme

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| \ .$$

Tous les mineurs s'annulent identiquement, et parmi les déterminants du 3^{me} ordre il y en a un qui n'est pas zéro:

$$\begin{vmatrix} a_{2,12} & a_{2,13} & a_{2,14} \\ a_{3,12} & a_{3,13} & a_{3,14} \\ a_{4,12} & a_{4,13} & a_{4,14} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \, .$$

Le point $x_2 = 0 = x_3 = x_4$ est *le point fondamental*, ce que l'on voit d'ailleurs directement de (a).

3. — Prenons à présent quelque droite déterminée. Dans le connexe (1) lui correspond le plan

$$\Sigma \Phi_i^{(1)} x_i = 0 \tag{5}$$

en général bien déterminé, — seuls les points de ce plan forment des éléments du connexe (1) avec la droite choisie.

Mais il existe des droites qui forment l'élément du (1) avec chaque point de l'espace, qu'on peut appeler les *droites fondamentales;* elles sont définies par des équations

$$\Phi_i^{(1)} = 0 \, , \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{6}$$

ce sont donc des droites communes à quatre complexes linéaires (6), elles sont donc au nombre de *deux.* En effet si le déterminant Δ est différent de zéro

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,14} & a_{1,24} & a_{1,34} & a_{1,23} \\ a_{2,14} & a_{2,24} & a_{2.34} & a_{2,23} \\ a_{3,14} & a_{3,24} & a_{3,34} & a_{3,23} \\ a_{4,14} & a_{4,24} & a_{4.34} & a_{4,23} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{7}$$

on peut résoudre (6) par rapport à p_{14}, p_{24}, p_{34}, p_{23} (ou pour quelques autres quatre p_{kj} dont le déterminant correspondant de la matrice (4) est différent de zéro), et on peut écrire

$$\Delta p_{ik} = b_{ik} p_{12} + c_{ik} p_{13} \, , \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4) \tag{8}$$

$$b_{12} = c_{13} = \Delta \, , \qquad b_{13} = c_{12} = 0 \, .$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation

$$p_{12}\,p_{34} + p_{13}\,p_{42} + p_{14}\,p_{23} = 0\ ,$$

on a l'équation du 2^{me} degré

$$Ap_{12}^2 + Bp_{12}\,p_{13} + Cp_{13}^2 = 0 \tag{9}$$

où l'on a

$$\left\{\begin{aligned} A &= \Delta\,.\,b_{34} + b_{14}\,b_{23}\ , \\ B &= \Delta\,.\,b_{34} + \Delta\,b_{32} + b_{14}\,c_{23} + b_{23}\,c_{14}\ , \\ C &= \Delta\,.\,c_{42} + c_{14}\,c_{23}\ . \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Les droites fondamentales sont donc réelles et distinctes si

$$B^2 - 4AC > 0\ ,$$

imaginaires, si

$$B^2 - 4AC < 0\ ,$$

elles coïncident, si

$$B^2 - 4AC = 0\ . \tag{11}$$

Dans le premier cas on pourrait supposer, qu'il peut arriver que les deux droites fondamentales se rencontrent. Mais il n'est pas difficile de montrer, que *si les droites fondamentales ont un point commun, elles ont tous leurs points en commun, c'est-à-dire elles coïncident*, la condition d'intersection étant aussi (11):

$$B^2 - 4AC = 0\ .$$

On peut le démontrer par le calcul de la manière suivante. Soient $\overline{p}$ et $\overline{p}'$ deux droites fondamentales de (1). Alors les rapports des coordonnées $\dfrac{\overline{p}_{12}}{\overline{p}_{13}}$ et $\dfrac{\overline{p}'_{12}}{\overline{p}'_{13}}$ doivent vérifier l'équation (9). Donc

$$\frac{\overline{p}_{12}}{\overline{p}_{13}} + \frac{\overline{p}'_{12}}{\overline{p}'_{13}} = -\frac{B}{A}\,,\qquad \frac{\overline{p}_{12}\cdot\overline{p}'_{12}}{\overline{p}_{13}\cdot\overline{p}'_{13}} = \frac{C}{A}$$

ou bien

$$\frac{\overline{p}_{12}\cdot\overline{p}'_{12}}{C} = \frac{\overline{p}_{12}\cdot\overline{p}'_{13} + \overline{p}_{13}\cdot\overline{p}'_{12}}{-B} = \frac{\overline{p}_{13}\cdot\overline{p}'_{13}}{A} = k\ . \qquad (k \neq 0)$$

Mais

$$\Delta\,.\,\overline{p}_{14} = b_{14}\,\overline{p}_{12} + c_{14}\,\overline{p}_{13}$$

$$\Delta\,.\,\overline{p}'_{14} = b_{14}\,\overline{p}'_{12} + c_{14}\,\overline{p}'_{13}$$

d'après (8).

Substituons ces valeurs en

$$\Delta^2(\bar{p}, \bar{p}') .$$

Nous aurons après quelques calculs

$$\Delta^2(\bar{p}, \bar{p}') = k(4AC - B^2) \tag{12}$$

ce qui prouve le théorème énoncé et montre en même temps la relation qui existe entre l'expression $4AC - B^2$ et le moment de deux droites fondamentales du connexe (1).

Ainsi à chaque connexe linéo-linéaire (1) appartient une certaine caractéristique, indépendante du choix des coordonnées, qui détermine la position réciproque des deux droites fondamentales du connexe, c'est *le moment des deux droites fondamentales.*

SUR LA CONVERGENCE DES SUITES DE FONCTIONS QUASI-ANALYTIQUES

PAR

Georges VALIRON (Strasbourg).

Je me propose d'étendre dans cette note les théorèmes relatifs aux fonctions holomorphes bornées dans leur ensemble dans un domaine aux fonctions quasi-analytiques satisfaisant à certaines conditions.

1. — La famille des fonctions $f(x)$, dérivables et de dérivée uniformément bornée sur un segment $a \leqq x \leqq b$, ($|f'(x)| < M$ quelle que soit la fonction et quel que soit x sur (a,b)), est une famille de fonctions également continues. Il s'ensuit que, *si une suite de fonctions $f(x; n)$ de la famille converge sur un ensemble* E *de points denses sur le segment* (a,b), *cette suite converge uniformé-*