Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 27 (1928)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ROTATIONNEL ET FORMULE DE STOKES
Autor: Bouligand, Georges / Roussel, Andrè
Kapitel: 9. Définition du rotationnel.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21866

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Par suite, pour tout contour fermé à tangente continue sans point double C parcouru dans le sens direct:

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_S \operatorname{div} \vec{V} \,.\, d\sigma \tag{7}$$

on en tire le théorème suivant, généralisation du théorème classique sur l'intégrale des différentielles exactes:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une intégrale curviligne

$$\int_C P\,dx + Q\,dy$$

soit nulle le long de tout contour fermé sans point double est que la divergence circulaire centrée du vecteur : $\vec{x}Q - \vec{y}P$ *soit identiquement nulle dans la région du plan envisagée*[1].

D'après (7) cette condition est suffisante; elle est aussi nécessaire puisque le long de tout cercle de centre M l'intégrale

$$\int_C (\vec{x}Q - \vec{y}P) \,.\, \vec{\nu}\, ds$$

étant nulle par hypothèse, il en sera de même de son quotient par $\pi\rho^2$ quel que soit ρ; d'où existence en chaque point d'une divergence circulaire centrée nulle.

9. *Définition du rotationnel.*

Pour définir le rotationnel, nous poserons:

$$\operatorname{div} (\vec{V} \wedge \vec{u}) = \vec{u} \,.\, \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{V} \tag{8}$$

où $\vec{u}$ désigne un vecteur unitaire de direction quelconque, mais fixe [2]. On voit immédiatement que si les composantes de $\vec{V}$ ont des dérivées du premier ordre par rapport à x, y, z, le rotationnel ainsi défini coïncide bien avec le rotationnel classique. Dans le

---

[1] L'énoncé suppose la continuité de la tangente. On pourrait d'ailleurs aisément, à la faveur d'un théorème de M. Lebesgue, étendre le résultat aux courbes rectifiables.

[2] Pareillement, on pourrait unifier la définition du gradient et de la divergence et aboutir à la notion de gradient sphérique centré en utilisant l'identité

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \varphi \,.\, \vec{u} = \operatorname{div} (\varphi \vec{u}).$$

cas contraire pour justifier la définition fournie par l'équation (8) il faut:

1° Que $\vec{V} \wedge \vec{u}$ ait une divergence (au sens généralisé défini plus haut).

2° Que (8) définisse alors bien un vecteur et un seul. Examinons le premier point: la condition énoncée sera remplie si l'intégrale:

$$\frac{1}{\frac{4}{3}\pi\rho^3}\int_S (\vec{V} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{\nu}\, d\sigma \tag{9}$$

prise sur la sphère S de centre M et de rayon ρ admet une limite, quand ρ tend vers zéro, continue avec M, et reste inférieure quel que soit ρ à un nombre fixe Λ. Or, on peut écrire (9), en désignant par ϖ le volume de S:

$$\frac{\vec{u}}{\varpi}\int_S (\vec{\nu} \wedge \vec{V})\, d\sigma \tag{10}$$

Alors 1° sera satisfaite si la longueur du vecteur $\vec{W}(\rho, M)$

$$\frac{1}{\frac{4}{3}\pi\rho^3}\int_S (\vec{\nu} \wedge \vec{V})\, d\sigma$$

reste inférieure à Λ quel que soit ρ et M, et si $\vec{W}$ tend vers une limite continue quand ρ tend vers zéro. On aura alors d'après (8), (9) et (10):

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{V} = \lim_{\rho=0} \frac{1}{\varpi}\int_S (\vec{\nu} \wedge \vec{V})\, d\sigma\ ; \tag{11}$$

cette relation (11) définit alors complètement le rotationnel et la condition 2° est bien remplie.

10. *Formule de Stokes.*

Nous allons montrer que l'existence et la continuité du rotationnel généralisé que nous venons de définir dans le paragraphe précédent suffisent pour assurer l'exactitude de la formule de Stokes:

$$\int_C \vec{V} \cdot \overrightarrow{dM} = \int_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{V} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma \tag{12}$$

Σ étant une portion de surface admettant un champ de normales