Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 27 (1928)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ROTATIONNEL ET FORMULE DE STOKES

Autor: Bouligand, Georges / Roussel, Andrè

Kapitel: 7. Le théorème flux-divergence.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21866

d'où:

$$f(\mathrm{M}) = g(\mathrm{P}) \frac{d\omega_{\mathrm{P}}}{d\omega_{\mathrm{M}}} = g[\mathcal{T}(\mathrm{M})]\,\mathrm{J}(\mathrm{M}) .$$

Le fait que la limite J (M) est valable indépendamment de la forme des éléments de volume nous dispense d'insister sur la démonstration de la formule (4).

7. *Le théorème flux-divergence.*

Revenons aux champs vectoriels, ou, ce qui est équivalent, aux transformations infinitésimales. Nos hypothèses seront ici les suivantes:

a_1) Le champ est défini et continu dans une certaine région $\mathcal{R}$ [1].

c_1) Soit M un point fixe intérieur à $\mathcal{R}$, décrivons une sphère de centre M, de volume v et soit φ le flux du champ sortant de cette sphère. Le rapport $\frac{\varphi}{v}$ tend vers une limite quand v tend vers zéro: cette limite peut s'appeler *divergence sphérique centrée.*

d_1) $\frac{\varphi}{v}$ reste inférieur à un nombre fixe, cette limitation s'appliquant nécessairement à la divergence.

e_1) La divergence est une fonction continue de M.

Nous avons présenté ces hypothèses en les faisant correspondre très exactement aux hypothèses admises dans la démonstration de (3). Seulement ici, l'hypothèse b_1) disparaît: elle est remplie *ipso-facto* en vertu de la continuité du champ vectoriel.

L'hypothèse b) consistait en effet à exprimer qu'un volume sphérique correspond effectivement à un volume; l'hypothèse b_1) consistera donc en ce que, notre champ étant regardé comme un champ de vitesses, le volume du fluide contenu dans une sphère à l'instant t admet une dérivée par rapport à t. Or, cette dérivée est justement le flux du champ sortant de la sphère.

Soit donc le champ vectoriel $\overrightarrow{\mathrm{V}}(\mathrm{M})$ satisfaisant aux hypothèses précédentes. Soit un volume Ω intérieur à la région $\mathcal{R}$ et limité par une ou plusieurs surfaces, possédant chacune un champ continu de normales, et dont l'ensemble sera désigné par Σ.

---

[1] Nous verrons un peu plus loin que l'hypothèse b_1) qu'on déduirait de b) est remplie *ipso facto.*

La masse du fluide qui occupe Ω à l'instant t a pour volume une certaine fonction du temps. Le théorème de variation du volume exprimé par la formule (3) nous apprend que cette fonction du temps a pour dérivée:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{V}\, d\omega \; .$$

D'autre part, on a également :

$$\frac{d\Omega}{dt} = \int_{\Sigma} \vec{V} . \vec{\nu}\, d\sigma$$

$\vec{\nu}$ désignant le vecteur unité de la normale extérieure en un point de Σ. D'où le théorème flux divergence

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{\nu}\, d\omega = \int_{\Sigma} \vec{V} . \vec{\nu}\, d\sigma \; . \qquad (5)$$

En réalité, en conservant les mêmes hypothèses sur Σ, on pourrait montrer (a la base des résultats signalés sans démonstration au n° 5) que cette formule est valable dans des conditions beaucoup plus générales: il suffit de supposer l'existence et la sommabilité de div. $\vec{V}$.

8. *Application.*

Il est clair que tout ce que nous venons de dire dans le cas de l'espace à 3 dimensions s'applique, avec des modifications évidentes au cas où les vecteurs considérés appartiennent tous au même plan. Le jacobien sphérique centré par exemple, sera remplacé par un jacobien circulaire centré, et nous aurons la relation:

$$\int_{S} \operatorname{div} \vec{V} . d\sigma = \int_{C} \vec{V} . \vec{\nu}\, ds \qquad (6)$$

C étant une courbe fermée à tangente continue sans point double, $\vec{\nu}$ la normale extérieure, $d\sigma$ l'élément d'aire.

Soit alors P (x, y), Q (x, y) deux fonctions données, $\vec{V}$ le vecteur de composantes Q et — P; il est clair que l'on a:

$$\int_{C} P\,dx + Q\,dy = \int_{C} \vec{V} . \vec{\nu}\, ds \; .$$