

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 27 (1928)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Buchbesprechung: Emile Picard. — Leçons sur quelques Equations fonctionnelles avec des Applications à divers problèmes d'Analyse et de Physique mathématique, rédigées par M. Eugène Blanc. (Cahiers scientifiques publiés sous la direction de M. Gaston Julia. Fascicule III.) — Un vol. gr. in-8° de viii-188 pages et 61 figures. Prix: 40 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1928.

Autor: Buhl, A.

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.11.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

BIBLIOGRAPHIE

Emile PICARD. — **Leçons sur quelques Equations fonctionnelles avec des Applications à divers problèmes d'Analyse et de Physique mathématique**, rédigées par M. Eugène Blanc. (Cahiers scientifiques publiés sous la direction de M. Gaston Julia. Fascicule III.) — Un vol. gr. in-8° de VIII-188 pages et 61 figures. Prix: 40 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1928.

Les Cahiers créés par M. Julia ont, dès le début, la plus heureuse des fortunes et nous permettent d'étudier à loisir le haut et élégant enseignement dû à M. Emile Picard, ce qui est d'autant plus précieux que le Maître semble avoir renoncé à la publication du tome IV de son *Traité d'Analyse*. Cette renonciation est compréhensible, tant les équations aux dérivées partielles et les sujets associés se sont anarchiquement étendus mais M. Picard reste encore le géomètre le plus qualifié pour tenter de mettre de l'ordre dans ce chaos et, s'il ne nous donne pas un gros ouvrage didactique, raison de plus pour recueillir précieusement toutes les formes de ses belles expositions.

Il s'agit ici des équations fonctionnelles et de développements analytiques provenant de ce que les fonctions les plus naturellement nées en Analyse classique ont des propriétés exactes qui, tels les théorèmes d'addition, constituent précisément des équations fonctionnelles. D'ailleurs les plus élémentaires de ces dernières sont souvent liées de manière très intéressante à des faits également très simples mais qui s'en rapprochent de manière non évidente. Ainsi

$$f(x) + f(y) = f(x + y)$$

s'attache à la composition des forces par la règle du parallélogramme et

$$f(x + y) + f(x - y) = 2 f(x) f(y)$$

permet de passer au cas non euclidien et même à toute la trigonométrie non-euclidienne. Aller de là à la théorie des transformations linéaires planes, au groupe modulaire, n'est qu'un jeu qui, on le sait, a été poursuivi, par M. Picard, dans l'espace à trois dimensions, avec des groupes à polyèdre fondamental.

L'addition des fonctions elliptiques donne des relations fonctionnelles rationnelles à reconstruire, d'une manière générale, dans le monde des transcendentes uniformes. Au premier abord on ne retrouve guère que l'addition d'où l'on est parti mais la méthode ainsi créée va pouvoir s'appli-

quer à des questions plus générales notamment aux cas où peut exister un *théorème de multiplication rationnel*, c'est-à-dire aux cas où $f_i(at)$ est rationnel en $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$.

Le problème, envisagé d'abord par Henri Poincaré, a été poursuivi par M. Picard jusqu'au-delà des surfaces hyperelliptiques de Georges Humbert; il entraîne le maniement des intégrales abéliennes de première espèce et des transformations birationnelles dites aussi transformations de Cremona.

L'équation

$$F(x+1) - F(x) = f(x),$$

dans le monde des différences finies, généralise l'intégration ordinaire. Elle a été très étudiée en France, par Guichard, par M. Appell; M. Nörlund y rattache ses « Sommes » fonctionnelles. Elle incite à étudier des formules sommatoires que M. Lindelöf a liées à la théorie des résidus. Elle admet des généralisations, encore relativement très maniables, telles que

$$\varphi_0(x) F(x+1) - \varphi_1(x) F(x) = \varphi_2(x),$$

$$a_0 F(x+n) + \dots + a_n F(x) = G(x),$$

cette dernière entraînant la considération d'une équation algébrique *caractéristique*. Tout ceci peut conduire aux fonctions Θ , aux équations différentielles linéaires à intégrales uniformes, à l'équation de Lamé puis, de nouveau, aux transcendentes de M. Picard déjà effleurées à propos du théorème de multiplication rationnel. Ces transcendentes, qui ne peuvent que s'évanouir quand on leur impose certaines conditions d'holomorphie, se développent, au contraire, magnifiquement, à partir de points singuliers essentiels. Elles admettent d'ailleurs d'élégants prolongements analytiques tout en laissant en suspens certaines extensions qui feront peut-être la fortune de jeunes chercheurs.

L'itération est encore une question très étudiée en France par MM. Kœnigs, Julia, Fatou, ... Elle me fait également penser à Samuel Lattès, mon regretté collègue de Toulouse. Elle dépend historiquement d'une équation fonctionnelle due à Schröder ou plutôt, sous une forme antérieure à peine différente, à Abel. Les problèmes y sont très vivants avec les itérations successives amenant un point analytique vers des centres *attractifs*; il y a aussi des centres *répulsifs* pouvant toutefois devenir attractifs pour certaines inversions de substitutions.

Entre ces questions et l'équation fonctionnelle de Fredholm, il semble, à première vue, qu'il y ait une grande différence mais, à y regarder de près, ce sont toujours les singularités analytiques habilement maniées qui résolvent les problèmes.

En Physique mathématique, là où s'ébattent maintenant si bien les équations intégrales, les questions ne sont pas toujours obligatoirement analytiques par rapport aux variables mais elles peuvent alors l'être par rapport à certains paramètres. C'est du côté de ceux-ci que peuvent naître les singularités et les développements en série entière. Il y a là d'ailleurs une allure générale de la science mathématique actuelle; c'est ainsi que, dans la Théorie des groupes, on tend de plus en plus à voir les propriétés de ceux-ci au travers des propriétés de leurs groupes *paramétriques*. Il est donc

bien naturel que les considérations à la Fredholm aient été rapprochées, par M. Picard, de toutes les précédentes.

N'oublions point de féliciter M. Eugène Blanc, qui nous a peint la pensée du Maître non seulement avec fidélité mais avec un soin qui lui fait le plus grand honneur.

A. BUHL (Toulouse).

Henri LEBESGUE. — **Leçons sur l'Intégration et la Recherche des Fonctions primitives** professées au Collège de France. Deuxième édition. (Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions publiée sous la direction de M. Emile Borel.) — Un volume gr. in-8° de xvi-342 pages. [Prix : 60 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris. 1928.

La première édition de ces Leçons date de 1904. J'ai eu l'honneur de l'analyser brièvement, ici-même, en 1906 (t. VIII, p. 84). Depuis le chemin parcouru a dépassé tout ce que l'on pouvait prévoir. M. Lebesgue fut d'abord un de ces novateurs que des maîtres de la Science regardèrent avec défiance mais qui se révéla avoir vu juste. Il disséqua les Mathématiques et particulièrement la notion de continuité cependant que la Physique disséquait l'atome; si l'on ne peut pas encore dire, à l'heure actuelle, que les deux œuvres s'adaptent l'une à l'autre, du moins faut-il reconnaître qu'elles ont relevé d'une même nécessité, celle de voir au-delà des insuffisantes intuitions. Et le point de vue physique, que les mathématiciens consentent de moins en moins à abandonner — ce qui, chose étrange, leur vaut souvent les sarcasmes des physiciens ou, plus exactement, de certains physiciens — le point de vue physique, dis-je, est de ceux que M. Lebesgue veut avoir constamment à l'esprit même dans les généralisations qui, au premier abord, semblent des plus abstraites. L'intégration, nous dit-il, est toujours une opération analogue à celle qu'il faut faire pour calculer la quantité de chaleur nécessaire pour élever, de 1°, la température d'un corps. Il semble qu'aussi les idées acquises avec la naissance du Calcul différentiel absolu aient une réplique des plus naturelles dans le domaine du Calcul intégral, réplique pouvant livrer immédiatement de vastes généralités concernant la définition de l'intégration. En Calcul différentiel absolu, toute expression monome à deux indices, $u_i v_i$, implique une sommation en i ; dès lors, que v_i devienne un dx_i et les sommations limites en $u_i dx_i$ s'imposeront sans autre idée préalable. Il restera seulement à reconnaître les cas où ces sommations limites auront un sens. L'immense intérêt de cette manière de raisonner provient de ce que ces cas sont prodigieusement étendus par rapport aux cas primitifs, souvent plus complexes et beaucoup moins bien définis encore, où l'on croyait voir l'intégrale sous une physionomie géométrique simple mais peut-être trop intuitive pour être bien logique.

Et cependant ceci ne doit pas tourner à l'élimination du point de vue géométrique; il faut, avec les ensembles et la théorie de la mesure, rechercher si l'on ne pourrait pas retrouver la maniabilité indéniable de l'intégrale géométrique. Beaucoup de résultats très généraux peuvent être obtenus dans cette voie mais, d'autre part, la théorie de la mesure des ensembles ne va pas sans ces difficultés paradoxales auxquelles s'attache le nom de Zermelo et qui reviennent à se demander s'il y a existence — et même existence pouvant figurer dans certains raisonnements — pour ce qui ne peut être ni bien défini ni même nommé. Ici les Mathématiques nous