

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 27 (1928)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Rubrik:** SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE SUISSE Conférences et communications.

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 04.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE SUISSE

Conférences et communications.

## I. — Réunion de Berne, 20 mai 1928.

Dans sa séance extraordinaire du printemps, tenue à Berne le 20 mai 1928, la Société Mathématique Suisse a constitué comme suit son comité pour les années 1928 et 1929: M. S. BAYS, professeur à l'Université de Fribourg, président; M. G. JUVET, professeur à l'Université de Neuchâtel, vice-président; M. W. SAXER, professeur à l'École Polytechnique Fédérale, secrétaire-trésorier.

La Société a approuvé les conclusions du rapport de la commission chargée d'examiner la création d'un périodique destiné à grouper plus particulièrement la production mathématique suisse. Cette nouvelle revue aura pour titre *Commentarii Mathematici Helvetici*; elle sera éditée par la Maison Orell Füssli et C<sup>ie</sup> à Zurich. Chaque volume comprendra quatre fascicules d'environ 5 feuilles (prix de librairie: 25 francs). Le bureau du comité de rédaction est composé de MM. A. SPEISER, président, R. FUETER, secrétaire-général, et G. JUVET, secrétaire-adjoint.

Sur la proposition de la Commission du périodique, la Société a décidé en outre de créer un *Fonds pour l'avancement des Sciences mathématiques en Suisse*. Elle espère pouvoir réunir le capital nécessaire permettant d'accorder des allocations pour des publications mathématiques et plus particulièrement pour les *Commentarii*. Dès que les revenus le permettront, elle envisagera la création de bourses d'études et de prix de mathématiques.

La seconde partie de la séance a été consacrée à une conférence de M. le professeur SAXER, intitulée: *Les familles normales et quasi-normales de fonctions analytiques dans la théorie des fonctions méromorphes*. — Le conférencier donne un résumé des résultats récemment trouvés en appliquant la théorie des familles normales et quasi-normales à la théorie des fonctions méromorphes<sup>1</sup>. Il s'agit du

<sup>1</sup> Voir: G. JULIA, Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé. Collection Borel, Paris 1924.

P. MONTEL, Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications. Collection Borel, Paris 1927.

A. OSTROWSKI, Ueber Folgen analytischer Funktionen. *Math. Zeitschrift*, Bd. 24, 1925, p. 231.

W. SAXER, Ueber quasi-normale Funktionenscharren und eine Verschärfung des Picard'schen Satzes. *Math. Annalen*, Bd. 99, 1928, p. 707.

théorème de M. Julia, disant que chaque fonction entière possède au moins un angle infiniment petit (nommé une droite de Julia) avec le point  $O$  comme centre, dans lequel la fonction acquiert chaque valeur, sauf peut-être une valeur exceptionnelle, une infinité de fois. M. Ostrowski a démontré dans un mémoire connu que ce théorème reste encore vrai pour une fonction méromorphe, si l'on exclut une classe très particulière et bien déterminée: les fonctions exceptionnelles, et si l'on admet deux valeurs exceptionnelles. Le conférencier a démontré qu'on peut préciser les théorèmes de MM. Julia et Ostrowski dans la manière suivante: Chaque fonction méromorphe, excepté une classe très particulière et bien déterminée, les fonctions quasi-exceptionnelles, possède une infinité de cercles dont le centre converge vers l'infini et vu du point  $O$  sous un angle infiniment petit, dans lesquels la fonction acquiert chaque valeur  $a$ , sauf peut-être deux valeurs exceptionnelles, un nombre illimité de fois. Enfin le conférencier parle de l'analogie entre la distribution des points singuliers d'une série de Taylor sur le cercle de convergence avec la distribution des droites de Julia d'une fonction entière. Dans un mémoire de M. Pólya, qui va paraître prochainement dans la *Mathematische Zeitschrift*, ces questions sont discutées d'une manière approfondie.

## II. — Réunion de Lausanne, 31 août 1928.

La Société mathématique suisse a tenu sa 18<sup>me</sup> assemblée ordinaire annuelle à Lausanne, le 31 août 1928, sous la présidence de M. le professeur G. JUVET, vice-président, en même temps que la 109<sup>me</sup> session annuelle de la Société helvétique des sciences naturelles.

Précédant de deux jours seulement l'ouverture du Congrès international des mathématiciens (Bologne, 3-10 septembre), la séance de Lausanne ne devait réunir qu'une faible participation. Le programme comprenait six communications dont quatre furent effectivement présentées:

1. — L. KOLLROS (Zurich). — *Généralisations de théorèmes de Steiner et de Clifford.*

I. 4 droites d'un plan, prises 3 à 3, forment 4 triangles tels que les cercles circonscrits passent par un même point  $F$ .

II. Les centres de ces 4 cercles sont, avec  $F$ , sur un cinquième cercle  $\gamma$  (Steiner, Werke I, p. 223).

On peut démontrer et généraliser ces 2 théorèmes de plusieurs manières:

1. Le lieu des foyers des paraboles touchant 3 droites est le cercle circonscrit au triangle; les 4 cercles se coupent donc au foyer  $F$  de la parabole tangente aux 4 droites.

A l'aide des paraboles  $p_n$  de  $n^e$  classe touchant  $(n - 1)$  fois la

droite à l'infini, Clifford (Math. Papers, p. 38) a démontré que 5 droites, prises 4 à 4, déterminent 5 paraboles telles que les 5 foyers soient sur un cercle; 6 droites, prises 5 à 5, déterminent 6 cercles passant par un même point, etc.; à  $(2n - 1)$  droites correspond un cercle et à  $2n$  droites un point  $F_n$  commun à  $2n$  cercles. En effet, par chaque point cyclique, on ne peut mener qu'une seule tangente à  $p_n$ ; cette courbe n'a donc qu'un foyer  $F_n$ ; elle est déterminée par  $2n$  tangentes, car son équation tangentielle, n'ayant que les termes des degrés  $n$  et  $(n - 1)$ , dépend de façon homogène de  $(2n + 1)$  paramètres. Il y a une simple infinité de courbes  $p_n$  tangentes à  $(2n - 1)$  droites; à chaque tangente issue d'un point cyclique I correspond une seule  $p_n$  du faisceau et par suite une seule tangente issue de l'autre point cyclique K; ces paires de tangentes isotropes se coupent sur un cercle, lieu du foyer des  $p_n$  du faisceau;  $2n$  droites, prises  $(2n - 1)$  à  $(2n - 1)$ , donnent  $2n$  cercles passant par le foyer  $F_n$  de la  $p_n$  tangente aux  $2n$  droites; parmi les  $p_n$  tangentes à  $(2n - 1)$  droites se trouvent les  $(2n - 1)$  courbes constituées par le point à l'infini de l'une des droites et la  $p_{n-1}$  tangente aux  $(2n - 2)$  autres droites; on a ainsi  $(2n - 1)$  points  $F_{n-1}$  sur un cercle.

2. Les cubiques planes passant par les 6 points d'intersection des 4 droites et par les points cycliques I, K ont encore un neuvième point commun<sup>1</sup> F; 4 cubiques dégénèrent en une des droites et le cercle circonscrit au triangle des 3 autres; les 4 cercles passent donc par F. Les tangentes en I et K à toutes les cubiques forment 2 faisceaux projectifs; ils engendrent le cercle  $\gamma$  (théor. II); soit  $O_4$  son centre; à 5 droites, prises 4 à 4, correspondent 5 points  $O_4$ ; ils sont sur un cercle de centre  $O_5$ ; 6 droites, prises 5 à 5, donnent 6 points  $O_5$  d'un nouveau cercle, etc. (Pesci, Per. di mat., 1891). En effet, considérons les courbes  $h_n$  du  $n^e$  ordre, dont les asymptotes sont parallèles aux côtés d'un polygone régulier. En coordonnées isotropes, l'équation d'une  $h_n$  n'a pas d'autres termes du  $n^e$  degré que  $ax^n$  et  $by^n$ ; il en résulte que les premières polaires des points à l'infini par rapport à  $h_n$  sont des  $h_{n-1}$  et que la droite polaire d'un point cyclique passe par l'autre; si l'on appelle centre  $O_n$  de  $h_n$  le point d'intersection de ces 2 droites isotropes, on voit que le lieu des centres  $O_{n-1}$  des premières polaires  $h_{n-1}$  des points à l'infini est un cercle de centre  $O_n$ . Dire qu'une courbe du  $n^e$  degré est une  $h_n$  équivaut à  $(n - 1)$  conditions linéaires; si l'on a 3 droites dont les équations sont  $d_1 = 0$ ,  $d_2 = 0$ ,  $d_3 = 0$ , il n'y aura qu'une seule  $h_3$  dans le réseau de cubiques:  $\lambda_1 d_1^3 + \lambda_2 d_2^3 + \lambda_3 d_3^3 = 0$ ; son centre  $O_3$  sera celui du cercle circonscrit au triangle des 3 droites, puisque ce cercle est le lieu des centres des hyperboles équilatères conjuguées au triangle et que ces hyperboles

<sup>1</sup> Si l'on a  $n$  points et  $(n + 2)$  droites dans un plan, les courbes d'ordre  $(n + 1)$  passant par ces  $n$  points et par les points d'intersection des droites ont encore  $\frac{n(n - 1)}{2}$  points communs.

sont les premières polaires  $h_2$  des points à l'infini par rapport à  $h_3$ . Si nous considérons 4 droites, il n'y aura, dans le système linéaire:  $\lambda_1 d_1^4 + \lambda_2 d_2^4 + \lambda_3 d_3^4 + \lambda_4 d_4^4 = 0$ , qu'une seule  $h_4$ ; son centre  $O_4$  est celui du cercle  $\gamma$  contenant les points  $O_3$  des 4 triangles; 5 droites donnent 5 points  $O_4$  sur un cercle dont le centre  $O_5$  est celui de l'unique  $h_5$  contenue dans le système linéaire:  $\lambda_1 d_1^5 + \dots + \lambda_5 d_5^5 = 0$ , et ainsi de suite.

3. Si l'on projette un quadrilatère complet stéréographiquement sur une sphère, les plans qui correspondent aux 4 triangles passent par un même point  $F$  de la sphère. Soient, en effet,  $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4$  ces 4 plans et  $\pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4$  ceux qui projettent les 4 côtés du quadrilatère, toutes les quadriques passant par les projections des 6 sommets et par le centre de projection  $P$  se coupent encore en un huitième point; la sphère et les paires de plans  $(\pi_1 \varphi_1)$   $(\pi_2 \varphi_2)$   $(\pi_3 \varphi_3)$  et  $(\pi_4 \varphi_4)$  appartiennent à ce réseau de quadriques; donc  $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4$  et la sphère se coupent au huitième point  $F$ . Analytiquement, on est conduit à un déterminant symétrique gauche et l'on voit qu'il existe un théorème analogue dans tout espace de dimension impaire; une projection stéréographique donne la généralisation du théorème I dans les espaces d'un nombre pair de dimensions<sup>1</sup>. Par contre, les sphères circonscrites aux 5 tétraèdres déterminés par 5 plans de l'espace à 3 dimensions, pris 4 à 4, ne passent pas par un même point.

Dans un espace à 5 dimensions  $\varepsilon_5$  par exemple, considérons 6 hyperplans:  $\pi_1 \dots \pi_6$  passant par un même point  $P$ ; 4 d'entre eux se coupent suivant une droite; cinq  $\pi_1 \dots \pi_5$ , pris 4 à 4, donneront lieu à 5 de ces droites; une hyperquadrique par  $P$  les coupe en 5 points qui déterminent un hyperplan  $\varphi_6$ ; il y en aura, de même, 5 autres  $\varphi_1 \dots \varphi_5$ ; ces 6 hyperplans  $\varphi_i$  se coupent en un même point  $F$ . Ce résultat est susceptible d'une interprétation en géométrie réglée de l' $\varepsilon_3$ ; si l'on prend les 6 coordonnées de Plücker d'une droite comme coordonnées homogènes d'un point de  $\varepsilon_5$ , la relation quadratique qui les lie est représentée par une hyperquadrique dont les points correspondent aux droites de l'espace; si on la coupe par un hyperplan, les  $\infty^3$  points d'intersection seront les images des droites d'un complexe linéaire. On voit donc que 6 complexes linéaires  $\pi_1 \dots \pi_6$  ayant une droite commune  $p$  déterminent 6 autres complexes linéaires  $\varphi_1 \dots \varphi_6$  ayant aussi une droite commune  $f$ . Si les complexes linéaires sont tous spéciaux (c'est-à-dire formés par les transversales d'une droite) on a le théorème du double-sept:

Soient  $p_1 \dots p_6$  six droites de l' $\varepsilon_3$  ayant une même transversale  $p$ ; 4 d'entre elles ont encore une 2<sup>e</sup> transversale; cinq,  $p_1 \dots p_5$  par exemple, prises 4 à 4, donnent 5 de ces transversales qui, d'après

<sup>1</sup> Mais le théorème II ne se généralise pas et il n'existe pas, pour les hypersphères, de chaînes analogues à celles de Clifford et de Pesci.

le théorème du double-six, coupent une même droite  $f_6$ . Nous aurons, de même, 5 autres droites  $f_1 \dots f_5$ . Les 6 droites  $f_i$  auront aussi une transversale commune  $f$ .

4. Des plans quelconques menés par 4 droites d'un plan  $\pi$  forment un tétraèdre ABCD; la cubique gauche  $c_3$  passant par ABCD et les points cycliques I, K de  $\pi$  coupent ce plan  $\pi$  en un 3<sup>e</sup> point F;  $c_3$  projetée successivement à partir de A, B, C et D sur  $\pi$  donnent les 4 cercles se coupant en F; soient  $a, b, c, d$  leurs centres,  $i$  et  $k$  les tangentes à  $c_3$  en I, K; les asymptotes  $aI, aK$  du 1<sup>er</sup> cercle sont les projections de  $i, k$  à partir de A; la droite  $Aa$  coupe donc  $i$  et  $k$ ; il en est de même de  $Bb, Cc, Dd$ ; ces 4 droites sont des génératrices de la quadrique  $q$  contenant  $c_3, i$  et  $k$ ;  $q$  coupe donc  $\pi$  suivant un cercle  $\gamma$  passant par  $abcdF$ .

Grace vient de généraliser (Camb. Phil. Proc. 1928) la chaîne de Pesci de la manière suivante: Si  $O_4$  est l'intersection des plans tangents à  $q$  en I et K, 5 plans, pris 4 à 4, donnent 5 droites  $O_4$  qui sont sur une quadrique  $q_5$  passant par I et K; les plans tangents à  $q_5$  en I et K se coupant en  $O_5$ , 6 plans, pris 5 à 5, donnent 6 droites  $O_5$  situées sur une quadrique  $q_6$  par I et K, etc.

Meyer et Rohn ont démontré (Leipziger Ber. 1913, p. 329-346) le théorème suivant: Etant donnés, dans l'espace à 3 dimensions, 5 plans quelconques et 2 points I, K, les 5 cubiques gauches passant par I, K et respectivement par les 4 sommets de chaque tétraèdre du pentaèdre donné, passent encore par 2 points F et G. Pour le prouver, menons un  $\varepsilon_4$  par l'espace à 3 dimensions de notre figure; considérons, dans cet  $\varepsilon_4$ , 5  $\varepsilon_3$  quelconques menés par les 5 plans donnés; ces 5  $\varepsilon_3$  forment un simplet de  $\varepsilon_4$ ; par ses 5 sommets ABCDE et par I, K il ne passe qu'une seule  $c_4$  unicursale de  $\varepsilon_4$ ; elle coupe notre espace à 3 dimensions en I, K et 2 autres points F, G. En projetant cette  $c_4$  successivement à partir de A, B, C, D et E sur notre  $\varepsilon_3$ , on aura 5 cubiques gauches se coupant en F et G.

On démontre de même le théorème général: Etant donnés dans un  $\varepsilon_n$ : ( $n + 2$ ) hyperplans  $\varepsilon_{n-1}$  et 2 points I, K, les ( $n + 2$ ) courbes unicursales d'ordre  $n$ , passant par I, K et les ( $n + 1$ ) sommets des simplets obtenus en supprimant successivement chacun des hyperplans, ont encore ( $n - 1$ ) autres points communs.

White (Camb. Phil. Proc., 1925) a montré que chacun de ces théorèmes est le point de départ d'une chaîne analogue à celle de Clifford. Dans l' $\varepsilon_3$ , par exemple, nous savons que 2 points I, K et 5 plans, pris 4 à 4, déterminent 5  $c_3$  ayant encore 2 autres points communs; 6 plans donnent 6 groupes de 2 points qui sont sur une courbe du 5<sup>e</sup> ordre  $c_5$  passant 2 fois par I et K; 7 plans déterminent 7  $c_5$  ayant 3 points communs; 8 plans donnent 8 groupes de 3 points sur une  $c_7$  passant 3 fois par I et K; 9 plans donnent 9  $c_7$  ayant 4 points communs, etc.

Si l'on a des droites dans un plan et 3 points I, K, L dans l'espace,

3 droites déterminent une  $c_3$  par I, K, L et les sommets du triangle; 4 droites donnent 4  $c_3$  ayant un point commun  $F_4$ ; 5 droites donnent 5 points  $F_4$  situés sur une  $c_3$  par I, K, L; 6 droites donnent 6  $c_3$  passant par un point  $F_6$ , etc.

Il y a des théorèmes analogues dans un  $\varepsilon_n$ , mais leur énoncé se complique, comme celui de White, quand  $n$  devient plus grand.

2. — M<sup>lle</sup> L. SARASIN (Zurich). — *Sur les substitutions et les groupes de quaternions.* — L'étude suivante se base sur un système de nombres hypercomplexes, les quaternions d'Hamilton. Si l'on appelle  $\bar{z}$  le quaternion variable,  $z$  son conjugué, l'équation d'une hypersphère prend la forme:

$Az\bar{z} + Bz + \bar{z}\bar{B} + C = 0$ , ou A et C sont des constantes réelles, B un quaternion.

On établit toutes les substitutions linéaires rationnelles de quaternions qui transforment en lui-même l'espace à 4 dimensions, de telle sorte qu'à l'ensemble des sphères corresponde de nouveau l'ensemble des sphères. Ces substitutions doivent être uniformes et l'existence des inverses également uniformes est demandée.

Pour ces substitutions, on trouve les formes suivantes:

$$w = azb \quad (1) \qquad w = z^{-1} \quad (3)$$

$$w = z + c \quad (2) \qquad w = (az + b) \cdot (cz + d)^{-1} \quad (4)$$

On obtient des substitutions plus spéciales, qui transforment en elle-même l'hypersphère unité en soumettant les coefficients aux conditions suivantes:

$$a\bar{a} \cdot b\bar{b} = 1 \quad (1); \quad c = 0 \quad (2); \quad -b\bar{a} + d\bar{c} = 0 \quad (4)$$

ainsi que

$$a\bar{c} - b\bar{d} = 0$$

La forme 3 remplit déjà les conditions requises.

Si l'on décompose les équations 4, il en résulte huit conditions pour la substitution générale.

A l'aide des substitutions obtenues et d'une fonction de distance établie par M. Carathéodory on peut définir une métrique sur l'hypersphère. Par une représentation métrique d'un domaine à 4 dimensions sur un autre, nous entendons une représentation uniforme et continue qui conserve les longueurs mesurées par la fonction de distance des courbes correspondantes. Cela revient à dire que la fonction de distance est un invariant par rapport aux représentations métriques. On peut établir toutes les représentations métriques et démontrer le théorème suivant: on obtient toutes les représentations métriques de l'hyper-

sphère sur elle-même par des substitutions linéaires rationnelles et par symétrie par rapport à un espace à 3 dimensions.

On cherche ensuite les groupes les plus généraux ayant la sphère unité comme sphère limite (Haupt oder Grenzkugel). Ils peuvent se mettre sous la forme:

$$s\omega s^{-1} = [(a - i_3 c + (b - i_3 d) i_3) z + b - i_3 d + (a - i_3 c) i_3] \\ [(-i_3 a + c + (d - i_3 b) i_3) z - i_3 b + d + (c - i_3 a) i_3]^{-1}$$

$s = (z + i_3) \cdot (i_3 z + 1)^{-1}$  nous donne la représentation de l'hyper-sphère sur l'espace à trois dimensions,  $\omega = (az + b) \cdot (cz + d)^{-1}$  transforme l'espace à trois dimensions en lui-même,  $s^{-1}$  le retransforme en l'hypersphère. Les groupes de la forme  $\omega$  les plus généraux qui se transforment par  $s$  en groupes qui ont la sphère unité comme sphère limite sont:

1. Les groupes  $abcd$  réels,  $ad - bc = 1$ .
2. Les groupes  $abcd$  complexes,  $ad - bc = 1$ . Ce groupe a six paramètres. On peut encore en former un, ayant sept paramètres. Les coefficients ont alors la forme suivante:

$$a : a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 ; \quad b : b_0 + r_0 (a_1 i_1 + a_2 i_2) \\ c : c_1 + r_1 (a_1 i_1 + a_2 i_2) ; \quad d : d_0 + r_2 (a_1 i_1 + a_2 i_2)$$

et doivent remplir les conditions suivantes:

$$r_2 a_0 + d_0 - r_1 b_0 - r_0 c_0 = 0 \\ a_0 d_0 - r_2 a_1^2 - r_2 a_2^2 - b_0 c_0 + r_0 r_1 a_1^2 + r_0 r_1 a_2^2 = 1 .$$

Ce dernier groupe contient toutes les transformations par lesquelles un plan quelconque passant par l'axe réel se correspond à lui-même, tandis que le groupe complexe ne contient que les transformations qui transforment le plan de Gauss en lui-même.

3. — R. WAVRE (Genève). — *Sur les propositions indémontrables.* — Dans quelques leçons consacrées à la logique mathématique, je suis revenu sur la question des propositions indémontrables qui fit l'objet d'une discussion entre M. Paul Lévy et moi-même<sup>1</sup>. Il m'a paru intéressant d'approfondir cet important sujet en précisant le sens du mot « démontrable ». Voici brièvement mes conclusions.

Soit C un corps d'axiomes mathématiques et logiques. Le mot démontrable signifiera dans tout ce qui suit déduisible des axiomes mathématiques de C au moyen des axiomes logiques de ce corps.

<sup>1</sup> Voir BOREL, Leçons sur la Théorie des fonctions, 3<sup>me</sup> éd., 1928, p. 257-290.

Cette déduction ne peut se faire que par des opérations dont les axiomes logiques énoncent précisément la légitimité. Parmi ces derniers axiomes se trouvent, je le suppose, le principe formel de contradiction et celui du tiers exclu.

Les propositions énoncées par les axiomes ainsi que toutes les propositions démontrables seront dites vraies, les propositions dont la fausseté est démontrable seront dites fausses, mais, en dehors de ces deux cas, une proposition parfaitement claire devra néanmoins être vraie ou fausse, en vertu du principe formel du tiers exclu, quand bien même sa vérité ou sa fausseté ne serait pas démontrable.

Comme M. Lévy le remarquait: on peut ignorer si une proposition A est vraie, mais malgré cette ignorance, on peut établir que la proposition A serait démontrable si elle était vraie, ou encore, que sa fausseté serait démontrable si cette proposition A était fausse.

Dressons alors le tableau suivant qui épuise toutes les éventualités:

- |      |   |  |
|------|---|--|
| I.   | { | Si A est vraie sa vérité est démontrable.          |
|      | { | Si A est fausse sa fausseté est démontrable.       |
| II.  | { | Si A est vraie sa vérité est démontrable.          |
|      | { | Si A est fausse sa fausseté n'est pas démontrable. |
| III. | { | Si A est vraie sa vérité n'est pas démontrable.    |
|      | { | Si A est fausse sa fausseté est démontrable.       |
| IV.  | { | Si A est vraie sa vérité n'est pas démontrable.    |
|      | { | Si A est fausse sa fausseté n'est pas démontrable. |

Maintenant, dans quel cas la question suivante: *La proposition A est-elle vraie ou fausse ?* pourra-t-elle être tranchée.

Cette question pourrait être tranchée dans l'éventualité I que A soit vraie ou fausse, dans II si A est vraie, dans III si A est fausse; elle ne pourrait pas être tranchée dans II si A est fausse, dans III si A est vraie et enfin, dans IV que A soit vraie ou fausse; c'est évident.

Mais voici une seconde question plus délicate:

*Peut-on démontrer que la question de savoir si la proposition A est vraie ou fausse est un problème insoluble ?*

Dans l'éventualité I, une telle preuve est évidemment impossible. Dans II, une telle preuve est encore impossible, car elle démontrerait que A est fausse et le problème serait résolu; c'est contradictoire. Dans III, il en est de même en échangeant les valeurs vraie et fausse.

On ne peut espérer prouver que le problème est insoluble que dans la circonstance IV.

Il faut donc démontrer que l'on se trouve dans cette dernière circonstance IV pour prouver que le problème est insoluble. D'autre part, il suffit de le démontrer, puisque l'on est certain que dans IV le problème est insoluble.

Et comment prouver que l'on se trouve dans ce dernier cas ? II

faut démontrer que la proposition A peut être affirmée vraie et également affirmée fausse, sans que l'on rencontre de contradiction avec les axiomes.

Cette condition est également suffisante.

Cela reviendrait à établir l'indépendance de A à l'égard du corps C d'axiomes. C'est d'ailleurs ainsi que l'on prouve l'indépendance entre eux des axiomes d'un corps donné. Pour employer une image, appelons domaine d'action d'un corps d'axiomes l'ensemble des propositions déduisibles à partir de ce corps. Dans le dernier cas, A ainsi que sa contradictoire non A sont en dehors du domaine d'action du corps C. En fait, dans la circonstance IV, la proposition A, de même que sa contradictoire non A, pourrait être adjointe au corps C, ce qui constituerait un nouveau corps C'. Ce dernier serait exempt de contradiction, si C l'est, et formé d'axiomes indépendants, si les axiomes de C le sont.

Inversement, si l'on retranche d'un corps d'axiomes indépendants un axiome mathématique, ce dernier est dans la circonstance IV vis-à-vis du corps des axiomes restants.

Il en est ainsi du Postulatum d'Euclide à l'égard des autres axiomes des « Eléments », puisque l'on sait qu'on peut l'admettre ou le rejeter sans que cela implique contradiction.

Avec les axiomes implicitement admis par la science classique, la proposition appelée « grand théorème de Fermat » peut donner lieu à la circonstance I ou à la circonstance III, on ne sait pas actuellement à laquelle, mais il ne peut donner lieu à I ou IV, puisque s'il est faux, c'est sûrement vérifiable, donc démontrable. La proposition: la constante d'Euler est algébrique, pourrait donner lieu à l'une des circonstances I, II, III, IV, sans que l'on sache actuellement à laquelle; ces deux dernières remarques sont la traduction, d'après notre tableau, des ingénieuses distinctions de M. Paul Lévy.

Je ne vois pas, pour ma part, de contradiction à priori, à vouloir démontrer la proposition suivante: Si le théorème de Fermat est vrai, il est indémontrable. En d'autres termes, je ne vois pas de contradiction à ce que l'on puisse, relativement à une proposition quelconque, dire dans quelle circonstance I, II, III, IV, elle se trouve. Il est clair qu'on diminuera les chances de se trouver dans l'une des circonstances II, III, IV, en augmentant le nombre des axiomes et par là même leur domaine d'action. On augmentera ces chances en restreignant le corps d'axiomes.

Et pour affirmer que tout problème arithmétique (par exemple, le problème que pose le grand théorème de Fermat) peut être résolu, il faut prouver que le corps des axiomes arithmético-logiques est suffisamment complet. Enfin, disons encore que pour nous qui rejetons le principe du tiers exclu, le vrai se confond avec la vérité démontrable, et le faux avec la fausseté démontrable.

4. — Gustave DUMAS (Lausanne). — *Sur les équations de la forme*

$$Ax^a y^b z^c + B = 0. \quad (1)$$

Cette équation rentre dans la catégorie de celles dont le polyèdre se réduit à une simple droite. Il en résulte que sa résolution s'obtient par la construction d'un tableau:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \quad (2)$$

à éléments entiers et de déterminant égal à  $\pm 1$ , si, comme on l'admet ici, pour simplifier, les entiers  $a, b, c$  sont sans diviseur commun.

En appelant  $A'$  le mineur de  $a'$  dans le tableau,  $B'$  celui de  $b'$ , etc., on a alors, en admettant pour simplifier l'écriture que dans (1),  $A = -B = 1$ ,

$$x = \xi^{A'} \eta^{A''}, \quad y = \xi^{B'} \eta^{B''}, \quad z = \xi^{C'} \eta^{C''} \quad (3)$$

comme solution paramétrique de (1). Il existe une infinité de solutions telles que (3), car le tableau (2) peut s'obtenir d'une infinité de façons.

Pour l'équation

$$z^5 - x^3 y = 0$$

on retrouve facilement les trois solutions à caractère holomorphe considérées déjà par H. W. E. JUNG (*Journal de Crelle*, t. 133).

Les procédés de résolution employés ci-dessus rentrent, comme cas particuliers, dans la méthode qu'utilise l'auteur de la communication pour la résolution des singularités des surfaces algébriques.