

## 2. — Espérance mathématique de l'Auberge.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Mais, si nous supposons que  $\mu$  reste dans la caisse au moment que l'Auberge s'ouvre, il faudra remplacer C (le montant en caisse avant le premier lancement des dés) dans ces formules par  $C-\mu$ , et puis calculer les paiements probables de la seconde période.

2. — *Espérance mathématique de l'Auberge.*

Soit, en premier lieu,  $s_\mu$  le gain probable de l'Auberge par le coup qui ouvre l'Auberge. Ce coup peut être n'importe lequel des nombres  $\mu+1, \mu+2, \dots, 21$ , et les gains correspondants seront  $1, 2, \dots, 21-\mu$  respectivement.

Or M. Jéquier a calculé 22 nombres,  $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{21}$ , qui sont les nombres de possibilités d'amener 0, 1, 2, ..., 21 points respectivement. Le gain probable de l'Auberge de ce premier coup est donc

$$S_\mu = \frac{\sum_{\rho=\mu+1}^{21} (\rho - \mu) \nu_\rho}{\sum_{\rho=\mu+1}^{21} \nu_\rho} \tag{2}$$

Dans chaque coup après celui qui ouvre l'Auberge, et avant le prochain qui diminue le nombre de jetons dans la caisse, le versement peut être 0,  $\mu+1, \mu+2, \dots, 21$ , et, vu qu'un versement de 0 apporte 1 à l'Auberge, les gains correspondants seront  $1, 1, 2, \dots, 21-\mu$ . Le gain moyen par coup sera alors

$$\frac{\nu_0 + \sum_{\rho=\mu+1}^{21} (\rho - \mu) \nu_\rho}{\nu_0 + \sum_{\rho=\mu+1}^{21} \nu_\rho}$$

La probabilité d'amener un nombre qui abaissera la caisse — tels nombres sont  $1, 2, 3, \dots, \mu$  — est

$$\frac{\sum_{\rho=1}^{\mu} \nu_\rho}{\sum_{\rho=0}^{21} \nu_\rho}$$

Par conséquent, le nombre moyen des coups après celui qui ouvre l'Auberge et avant l'abaissement prochain de la caisse sera

$$\frac{\sum_{\varrho=0}^{21} v_{\varrho}}{\sum_{\varrho=1}^{\mu} v_{\varrho}} - 1 = \frac{v_0 + \sum_{\varrho=\mu+1}^{21} v_{\varrho}}{\sum_{\varrho=1}^{\mu} v_{\varrho}}.$$

Si nous désignons par  $q'_{\mu}$  le gain probable pour ce temps-là, nous trouvons

$$q'_{\mu} = \frac{v_0 + \sum_{\varrho=\mu+1}^{21} v_{\varrho}}{\sum_{\varrho=1}^{\mu} v_{\varrho}} \cdot \frac{v_0 + \sum_{\varrho=\mu+1}^{21} (\varrho - \mu) v_{\varrho}}{v_0 + \sum_{\varrho=\mu+1}^{21} v_{\varrho}} = \frac{v_0 + \sum_{\varrho=\mu+1}^{21} (\varrho - \mu) v_{\varrho}}{\sum_{\varrho=1}^{\mu} v_{\varrho}}. \quad (3)$$

Le raisonnement par lequel nous calculerons  $q'_{\mu}$ , l'espérance mathématique totale du gain de l'Auberge (à part celui qui est attendu en vertu de la 16<sup>me</sup> règle), est le suivant:

$q'_1$  est évidemment le même que  $q_1$ , car le seul abaissement possible de la caisse de 1 résulte d'un versement de 1.

Quant à  $q_{\mu}$  ( $\mu > 1$ ), cette quantité a pour premier terme  $q'_{\mu}$ , le gain probable avant la première réduction de la caisse. Or la probabilité pour que cette réduction soit  $\sigma$  est

$$\frac{v_{\sigma}}{\sum_{\varrho=1}^{\mu} v_{\varrho}};$$

c'est aussi la probabilité que  $\mu - \sigma$  reste dans la caisse, et que l'espérance mathématique de l'Auberge soit  $q_{\mu-\sigma}$ . Il en résulte que

$$q_{\mu} = q'_{\mu} + \frac{\sum_{\sigma=1}^{\mu} v_{\sigma} q_{\mu-\sigma}}{\sum_{\varrho=1}^{\mu} v_{\varrho}} = \frac{v_0 + \sum_{\varrho=\mu+1}^{21} (\varrho - \mu) v_{\varrho} + \sum_{\varrho=1}^{\mu-1} v_{\varrho} q_{\mu-\varrho}}{\sum_{\varrho=1}^{\mu} v_{\varrho}}. \quad (4)$$

La carte Auberge peut donc espérer recevoir des joueurs actifs

$$t_\mu = s_\mu + q_\mu \tag{5}$$

dans le cas qu'elle trouve  $\mu$  dans la caisse au moment d'être ouverte. Mais ce n'est pas tout. De la règle 16 il suit que le joueur qui tient l'Auberge ne doit rien payer à cette carte (comme les autres le doivent) mais que le Cheval fait ce service pour lui. Il faut donc ajouter à  $t_\mu$ ,  $\frac{s_\mu}{n}$  et un autre terme que nous calculerons bientôt.

3. — *Espérances mathématiques des autres cartes et des joueurs dans la seconde période.*

Examinons maintenant la source de ces gains de l'Auberge compris dans  $t_\mu$ . Comme dans les cas examinés par M. Jéquier, nous trouvons que les cartes Cloche, Marteau, et Cloche-Marteau paieront respectivement  $\frac{5}{36}t_\mu$ ,  $\frac{5}{36}t_\mu$ ,  $\frac{1}{36}t_\mu$ ; car dans  $\frac{5}{36}$  des coups on amènera Cloche sans Marteau (ou Marteau sans Cloche) et dans  $\frac{1}{36}$  des coups Cloche et Marteau ensemble.

Enfin, il faut partager les  $\frac{25}{36}t_\mu$  qui restent entre le Cheval et les joueurs actifs. Ce sont toujours ces derniers qui paient le coup qui ouvre l'Auberge; en effet, ce coup ne peut pas amener 0.  $\frac{25}{36}s_\mu$  est payé par les joueurs actifs. Soit  $\frac{25}{36}(t_\mu - s_\mu) = \frac{25}{36}q_\mu = y_\mu + z_\mu$ , où  $y_\mu$  est la somme que l'Auberge espère recevoir des joueurs actifs,  $z_\mu$  celle qu'il espère recevoir du Cheval.

Le calcul de  $z_\mu$  est fort semblable à celui de  $q_\mu$ . Avec 1 dans la caisse, nous trouvons

$$z_1 = \frac{v_0}{v_0 + \sum_{\varrho=2}^{21} (\varrho - 1)v_\varrho} \cdot \frac{25}{36}q_1 = \frac{25}{36} \frac{v_0}{v_1} \tag{6}$$