2. — Espérance mathématique de l'Auberge.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Mais, si nous supposons que μ reste dans la caisse au moment que l'Auberge s'ouvre, il faudra remplacer C (le montant en caisse avant le premier lancement des dés) dans ces formules par $C-\mu$, et puis calculer les paiements probables de la seconde période.

2. — *Espérance mathématique de l'Auberge.*

Soit, en premier lieu, s_μ le gain probable de l'Auberge par le coup qui ouvre l'Auberge. Ce coup peut être n'importe lequel des nombres $\mu+1, \mu+2, \ldots, 21$, et les gains correspondants seront $1, 2, \ldots\ldots, 21-\mu$ respectivement.

Or M. Jéquier a calculé 22 nombres, $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{21}$, qui sont les nombres de possibilités d'amener 0, 1, 2, ..., 21 points respectivement. Le gain probable de l'Auberge de ce premier coup est donc

$$S_\mu = \frac{\sum\limits_{\rho=\mu+1}^{21} (\rho-\mu)\nu_\rho}{\sum\limits_{\rho=\mu+1}^{21} \nu_\rho}. \tag{2}$$

Dans chaque coup après celui qui ouvre l'Auberge, et avant le prochain qui diminue le nombre de jetons dans la caisse, le versement peut être $0, \mu+1, \mu+2, \ldots, 21$, et, vu qu'un versement de 0 apporte 1 à l'Auberge, les gains correspondants seront $1, 1, 2, \ldots, 21-\mu$. Le gain moyen par coup sera alors

$$\frac{\nu_0 + \sum\limits_{\rho=\mu+1}^{21} (\rho-\mu)\nu_\rho}{\nu_0 + \sum\limits_{\rho=\mu+1}^{21} \nu_\rho}.$$

La probabilité d'amener un nombre qui abaissera la caisse — tels nombres sont $1, 2, 3, \ldots, \mu$ — est

$$\frac{\sum\limits_{\rho=1}^{\mu} \nu_\rho}{\sum\limits_{\rho=0}^{21} \nu_\rho}$$

Par conséquent, le nombre moyen des coups après celui qui ouvre l'Auberge et avant l'abaissement prochain de la caisse sera

$$\frac{\sum_{\rho=0}^{21} \nu_\rho}{\sum_{\rho=1}^{\mu} \nu_\rho} - 1 = \frac{\nu_0 + \sum_{\rho=\mu+1}^{21} \nu_\rho}{\sum_{\rho=1}^{\mu} \nu_\rho}.$$

Si nous désignons par q'_μ le gain probable pour ce temps-là, nous trouvons

$$q'_\mu = \frac{\nu_0 + \sum_{\rho=\mu+1}^{21} \nu_\rho}{\sum_{\rho=1}^{\mu} \nu_\rho} \cdot \frac{\nu_0 + \sum_{\rho=\mu+1}^{21} (\rho - \mu)\nu_\rho}{\nu_0 + \sum_{\rho=\mu+1}^{21} \nu_\rho} = \frac{\nu_0 + \sum_{\rho=\mu+1}^{21} (\rho - \mu)\nu_\rho}{\sum_{\rho=1}^{\mu} \nu_\rho}. \tag{3}$$

Le raisonnement par lequel nous calculerons q'_μ, l'espérance mathématique totale du gain de l'Auberge (à part celui qui est attendu en vertu de la 16^{me} règle), est le suivant:

q'_1 est évidemment le même que q_1, car le seul abaissement possible de la caisse de 1 résulte d'un versement de 1.

Quant à $q_\mu (\mu > 1)$, cette quantité a pour premier terme q'_μ, le gain probable avant la première réduction de la caisse. Or la probabilité pour que cette réduction soit σ est

$$\frac{\nu_\sigma}{\sum_{\rho=1}^{\mu} \nu_\rho};$$

c'est aussi la probabilité que $\mu - \sigma$ reste dans la caisse, et que l'espérance mathématique de l'Auberge soit $q_{\mu-\sigma}$. Il en résulte que

$$q_\mu = q'_\mu + \frac{\sum_{\sigma=1}^{\mu} \nu_\sigma q_{\mu-\sigma}}{\sum_{\rho=1}^{\mu} \nu_\rho} = \frac{\nu_0 + \sum_{\rho=\mu+1}^{21} (\rho - \mu)\nu_\rho + \sum_{\rho=1}^{\mu-1} \nu_\rho q_{\mu-\rho}}{\sum_{\rho=1}^{\mu} \nu_\rho}. \tag{4}$$

La carte Auberge peut donc espérer recevoir des joueurs actifs

$$t_\mu = s_\mu + q_\mu \tag{5}$$

dans le cas qu'elle trouve μ dans la caisse au moment d'être ouverte. Mais ce n'est pas tout. De la règle 16 il suit que le joueur qui tient l'Auberge ne doit rien payer à cette carte (comme les autres le doivent) mais que le Cheval fait ce service pour lui. Il faut donc ajouter à t_μ, $\frac{s_\mu}{n}$ et un autre terme que nous calculerons bientôt.

3. — *Espérances mathématiques des autres cartes et des joueurs dans la seconde période.*

Examinons maintenant la source de ces gains de l'Auberge compris dans t_μ. Comme dans les cas examinés par M. Jéquier, nous trouvons que les cartes Cloche, Marteau, et Cloche-Marteau paieront respectivement $\frac{5}{36}t_\mu$, $\frac{5}{36}t_\mu$, $\frac{1}{36}t_\mu$; car dans $\frac{5}{36}$ des coups on amènera Cloche sans Marteau (ou Marteau sans Cloche) et dans $\frac{1}{36}$ des coups Cloche et Marteau ensemble.

Enfin, il faut partager les $\frac{25}{36}t_\mu$ qui restent entre le Cheval et les joueurs actifs. Ce sont toujours ces derniers qui paient le coup qui ouvre l'Auberge; en effet, ce coup ne peut pas amener 0. $\frac{25}{36}s_\mu$ est payé par les joueurs actifs. Soit $\frac{25}{36}(t_\mu - s_\mu) = \frac{25}{36}q_\mu = y_\mu + z_\mu$, où y_μ est la somme que l'Auberge espère recevoir des joueurs actifs, z_μ celle qu'il espère recevoir du Cheval.

Le calcul de z_μ est fort semblable à celui de q_μ. Avec 1 dans la caisse, nous trouvons

$$z_1 = \frac{\nu_0}{\nu_0 + \sum_{\rho=2}^{21}(\rho - 1)\nu_\rho} \cdot \frac{25}{36}q_1 = \frac{\frac{25}{36}\nu_0}{\nu_1} \cdot \tag{6}$$