

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 27 (1928)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES SURFACES RÉGLÉES
Autor: Deaux, R.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-21882>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ÉLÉMÉNTS DE LA THÉORIE DES SURFACES RÉGLÉES

P A R

R. DEAUX (Mons, Belgique).

A cause des notations, nous reprendrons les résultats intéressants exposés par M. L'ABBÉ E. LAINÉ dans l'*Enseignement mathématique*, 25^{me} année, p. 63, 1926.

1. — *Equation de la surface.* Une surface réglée (Σ) est définie par la trajectoire (m) d'un point M de la droite génératrice g et par la direction de g pour chaque position de M. Si donc \bar{E} , \bar{e} , \bar{u} , λ sont respectivement la coordonnée vectorielle d'un point N de g , la coordonnée de M, un vecteur unitaire porté par g et la valeur algébrique du segment MN estimée sur l'axe orienté défini par \bar{u} , l'équation de (Σ) est

$$\bar{E} = \bar{e} + \lambda \bar{u} . \quad (1)$$

Les vecteurs \bar{e} et \bar{u} sont des fonctions d'un paramètre t . On a

$$(\bar{u})^2 = 1 , \quad \bar{u} d\bar{u} = 0 . \quad (2)$$

Si \bar{u} est constant, (Σ) est un cylindre. Si \bar{e} est constant, (Σ) est un cône.

2. — *Normale en N.* Si λ est une fonction de t , le point N décrit sur (Σ) une courbe (n) dont la tangente en N a la direction du vecteur

$$d\bar{E} = d\bar{e} + \lambda d\bar{u} + \bar{u} d\lambda . \quad (3)$$

La normale en N à (Σ) a donc la direction du vecteur¹

$$\mathfrak{M}\bar{u}d\bar{E} = \mathfrak{M}\bar{u}(d\bar{e} + \lambda d\bar{u}) \quad (4)$$

ou

$$\mathfrak{M}\bar{u}d\bar{e} + \lambda \mathfrak{M}\bar{u}d\bar{u}. \quad (5)$$

En particulier la normale en M a pour direction celle du vecteur

$$\mathfrak{M}\bar{u}d\bar{e}$$

et, si le point N s'éloigne indéfiniment sur g , la direction limite de la normale est celle de

$$\mathfrak{M}\bar{u}d\bar{u},$$

comme on le voit en divisant le vecteur (5) par λ .

Lorsque (Σ) est un cône de sommet M, le vecteur (4) est nul si $\lambda = 0$ et constant en direction si $\lambda \neq 0$: le plan tangent est indéterminé au sommet et est le même en tous les autres points de g . Lorsque (Σ) est un cylindre, le vecteur (4) est constant si λ est fini, et indéterminé si $|\lambda|$ croît indéfiniment: le plan tangent est indéterminé au point à l'infini de g et est le même en tous les autres points de g .

3. — *Surface développable.* La surface (Σ) est développable si, pour une génératrice g quelconque, la normale en un point N, variable sur g , a une direction constante. Il faut et il suffit que les vecteurs

$$\mathfrak{M}\bar{u}d\bar{e}, \quad \mathfrak{M}\bar{u}d\bar{u} \quad (6)$$

soient parallèles, donc que les vecteurs $\bar{u}, d\bar{e}, d\bar{u}$ soient parallèles à un même plan, c'est-à-dire que l'on ait identiquement

$$d\bar{e}\mathfrak{M}\bar{u}d\bar{u} = 0. \quad (7)$$

Dans le cas du cylindre on a identiquement $d\bar{u} = 0$.

4. — *Arête de rebroussement.* Si la relation (7) a lieu, les vecteurs (6) sont parallèles. Il est donc possible de déterminer

¹ Nous employons les notations de MASSAU. \bar{ab} et $\mathfrak{M}\bar{ab}$ sont respectivement les produits scalaire et vectoriel des vecteurs \bar{a} et \bar{b} . Voir F. BOUNY, *Leçons de Mécanique rationnelle*, tome I.

λ pour que le vecteur (5) ou (4) soit nul. Il faut que

$$d\bar{e} + \lambda d\bar{u} = k\bar{u}, \quad (8)$$

k étant une fonction inconnue de t . Multiplions les deux membres de (8) par $d\bar{u}$. Il vient, en tenant compte de (2),

$$\lambda = - \frac{d\bar{e} d\bar{u}}{(d\bar{u})^2}. \quad (9)$$

Soit R le point de g dont le λ a la valeur (9). En ce point, le vecteur (4) étant nul, les vecteurs \bar{u} et $d\bar{E}$ sont parallèles. Donc la génératrice g y touche la trajectoire (r) du point R , arête de rebroussement de la développable (Σ) et le plan tangent à (Σ) en R est indéterminé.

5. — *Surface gauche.* Si la relation (7) n'est pas une identité, la surface (Σ) est gauche. En vertu du n° 2 le plan asymptote est normal au vecteur

$$\mathcal{M}\bar{u} d\bar{u}$$

et, par suite, le plan central est normal au vecteur

$$d\bar{u}.$$

La tangente au lieu du point central, O , étant normale à $d\bar{u}$, on doit avoir, en vertu de (3) et (2)

$$d\bar{u}(d\bar{e} + \lambda d\bar{u}) = 0$$

et le λ du point O est

$$\lambda = - \frac{d\bar{e} d\bar{u}}{(d\bar{u})^2}. \quad (10)$$

La ligne de striction est donc donnée, comme l'a fait remarquer M. L'ABBÉ E. LAINÉ, par la même équation que l'arête de rebroussement dans le cas de la surface développable.

Aux valeurs de t , solutions de l'équation (7), correspondent des génératrices singulières de la surface gauche. Sur chacune d'elles le plan tangent est unique (n° 3) sauf en un point R (n° 4) situé sur la ligne de striction, où il est indéterminé.

6. — *Signe d'un angle.* Soit \overline{AB} un vecteur dont l'origine est dans un plan π et qui est normal à ce plan. Un observateur se place sur \overline{AB} , la tête vers B, regarde π et adopte comme sens positif des angles de ce plan le sens du mouvement des aiguilles d'une montre, c'est-à-dire celui des rotations positives autour de \overline{AB} .

Soient \bar{a}, \bar{b} deux vecteurs dans le plan π , (\bar{a}, \bar{b}) leur angle apprécié relativement à un vecteur unitaire \bar{u} normal au plan, a, b les modules des vecteurs \bar{a}, \bar{b} . On a, en grandeur et en signe,

$$\sin (\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\bar{u} \mathfrak{M} \bar{a} \bar{b}}{\bar{a} \bar{b}}, \quad (11)$$

$$\cos (\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\bar{a} \bar{b}}{\bar{a} \bar{b}}, \quad (12)$$

$$\operatorname{tg} (\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\bar{u} \mathfrak{M} \bar{a} \bar{b}}{\bar{a} \bar{b}}, \quad (13)$$

$\operatorname{tg} (\bar{a}, \bar{b})$ ne change pas si on remplace l'un des vecteurs ou les deux par leurs opposés.

7. — *Formule d'expulsion.* On sait que

$$\mathfrak{M} \bar{a} \mathfrak{M} \bar{b} \bar{c} = (\bar{a} \bar{c}) \bar{b} - (\bar{a} \bar{b}) \bar{c}. \quad (14)$$

8. — *Paramètre de distribution.* Nous excluons le cas du cylindre et des génératrices singulières cylindriques.

Soient ω et ν les plans tangents en O et N à la surface (Σ). On a, pour l'observateur placé suivant \bar{u} sur g (n°s 6, 2)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\omega\nu) &= \operatorname{tg}[d\bar{u}, \mathfrak{M} \bar{u}(d\bar{e} + \lambda d\bar{u})] \\ \operatorname{tg}(\omega\nu) &= \frac{\bar{u} \mathfrak{M} d\bar{u} \mathfrak{M} \bar{u}(d\bar{e} + \lambda d\bar{u})}{d\bar{u} \mathfrak{M} \bar{u} d\bar{e}}, \end{aligned}$$

ou, en vertu de (14),

$$\operatorname{tg}(\omega\nu) = \frac{d\bar{u} d\bar{e} + \lambda(d\bar{u})^2}{d\bar{u} \mathfrak{M} \bar{u} d\bar{e}}.$$

En vertu de (10),

$$ON = \lambda + \frac{d\bar{u} d\bar{e}}{(d\bar{u})^2}.$$

Donc le nombre

$$p = \frac{\text{ON}}{\text{tg}(\omega\nu)} = -\frac{d\bar{e}\mathfrak{M}\bar{u} d\bar{u}}{(d\bar{u})^2} \quad (15)$$

est indépendant du point N et du sens de \bar{u} : c'est le paramètre de distribution des plans tangents pour la génératrice g. La rotation du plan tangent autour de g orientée arbitrairement se fait positivement ou négativement suivant que p est positif ou négatif et g est alors dextrorsum ou sinistrorsum.

Soient $\bar{e} + \Delta\bar{e}$ la coordonnée d'un point M' voisin de M sur (m); $\bar{u} + \Delta\bar{u}$ le vecteur unitaire porté par la génératrice g' issue de M'; O₁, O₂ les pieds sur g et g' de la perpendiculaire commune à ces droites; (gg') l'angle $(\bar{u}, \bar{u} + \Delta\bar{u})$ apprécié relativement à un vecteur unitaire \bar{u}' porté par cette perpendiculaire; O₁ O₂ la valeur algébrique de la plus courte distance estimée sur \bar{u}' . On a

$$\begin{aligned} O_1 O_2 &= \bar{u}' \Delta\bar{e}, \\ \bar{u}' \sin(gg') &= \mathfrak{M}\bar{u}(\bar{u} + \Delta\bar{u}) = \mathfrak{M}\bar{u} \Delta\bar{u}. \end{aligned} \quad (16)$$

Donc

$$\frac{O_1 O_2}{\sin(gg')} = \frac{\Delta\bar{e} \mathfrak{M}\bar{u} \Delta\bar{u}}{\sin^2(gg')}$$

Mais, de (16) on tire

$$\sin^2(gg') = (\mathfrak{M}\bar{u} \Delta\bar{u})^2 = (\Delta\bar{u})^2 - (\bar{u} \Delta\bar{u})^2.$$

Par suite, si g' se rapproche indéfiniment de g, on a

$$\lim \frac{O_1 O_2}{\sin(gg')} = \frac{d\bar{e} \mathfrak{M}\bar{u} d\bar{u}}{(d\bar{u})^2}$$

et, en grandeur et en signe, quel que soit le sens du vecteur \bar{u}' choisi sur O₁O₂,

$$p = -\lim \frac{O_1 O_2}{\sin(gg')} \quad ^1 \quad (17)$$

9. — *Trajectoires orthogonales des génératrices.* Le point N décrit une telle courbe si

$$\bar{u} d\bar{E} = 0$$

¹ DARBOUX, *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, troisième partie, p. 302.

C. SERVAIS, *Sur les surfaces réglées*, N°s 1, 2 (*Annaes da Academia polytechnica do Porto*, 1919, tomo XIII). Ces géomètres opposent les sens positifs des angles et des rotations. Les seconds membres des formules (15) et (17) y sont donc changés de signe.

ou, en vertu de (3), si

$$d\lambda = - \bar{u} d\bar{e} .$$

Les trajectoires sont données par

$$\lambda = - \int \bar{u} d\bar{e} + \text{constante} .$$

10. — *Cône directeur.* La parallèle à g issue de l'origine des coordonnées engendre le cône directeur de (Σ) . L'extrémité du vecteur \bar{u} localisé en ce point décrit une courbe sphérique (g).

Soient s, σ les arcs des courbes (m) , (g) et \bar{u}_m, \bar{u}_g les vecteurs unitaires portés par les tangentes positives à ces courbes. On a

$$\frac{d\bar{e}}{ds} = \bar{u}_m, \quad \frac{d\bar{u}}{d\sigma} = \bar{u}_g, \quad \bar{u} \bar{u}_g = 0 .$$

Donc, en vertu de (15),

$$p = \frac{ds}{d\sigma} \bar{u} \mathfrak{M} \bar{u}_m \bar{u}_g . \quad (18)$$

11. — *Cas où (m) est une trajectoire orthogonale.* On a

$$\bar{u} \bar{u}_m = 0 .$$

On désigne par V l'angle (\bar{u}_m, \bar{u}_g) apprécié autour de \bar{u} et (18) s'écrit, en vertu de (11),

$$p = \frac{ds}{d\sigma} \sin V . \quad (19)$$

V est l'angle que fait le plan asymptote relatif à g avec le plan tangent μ en M . Si donc on prend le demi-plan central ω tel que $(\omega, \bar{u}_g) = + \frac{\pi}{2}$, on a

$$V = (\bar{u}_m, \omega) + \frac{\pi}{2} = (\mu \omega) + \frac{\pi}{2} .$$

$$p = \frac{ds}{d\sigma} \cos (\omega \mu) . \quad (20)$$

Mais en vertu de (15),

$$p = \frac{\text{OM}}{\text{tg}(\omega \mu)} .$$

Donc

$$\overline{OM} = \frac{ds}{d\sigma} \sin (\omega \mu) . \quad (21)$$

De (20) et (21) on déduit que

$$\overline{OM}^2 + p^2 = \frac{ds^2}{d\sigma^2} . \quad (22)$$

Par suite si au point central O on élève la perpendiculaire $\overline{OK} = |p|$ pour avoir le point représentatif K de MANNHEIM, l'hypoténuse KM vaut $\left| \frac{ds}{d\sigma} \right|$.

Elément linéaire de (Σ) . Comme, en vertu de (10) et (22) on a

$$d\bar{u} d\bar{e} = - MO d\sigma^2 ,$$

$$ds^2 = (\overline{OM}^2 + p^2) d\sigma^2 ,$$

l'élévation de (3) au carré donne pour dS^2 de la courbe (n)

$$dS^2 = (dMN)^2 + (p^2 + \overline{ON}^2) d\sigma^2 . \quad ^1$$

12. — Lorsque la courbe initiale (m) est la trajectoire orthogonale des génératrices qui passe par le point central, (20) s'écrit, si on prend $(\omega \mu) = 0$,

$$p = \frac{ds}{d\sigma} .$$

Donc si on oriente arbitrairement la génératrice g ainsi que l'indicatrice sphérique des génératrices et si on oriente la trajectoire orthogonale passant par le point central de façon que le trièdre $(\bar{u}, \bar{u}_m, \bar{u}_g)$ soit de rotation directe, le paramètre de distribution est, en grandeur et en signe, $\frac{ds}{d\sigma}$. (Voir d'ailleurs la formule (18).)

Cette définition du paramètre de distribution rappelle celles de la courbure et de la torsion en un point d'une courbe. On en déduit immédiatement que le paramètre de distribution pour une génératrice de la surface des binormales d'une courbe gauche est égal au rayon de torsion de la courbe au point correspondant.

¹ DARBOUX, loc. cit. — VESSIOT, *Leçons de Géométrie supérieure*, p. 108.

43. — Lorsque la courbe initiale (m) est la ligne de striction de (Σ) on a, en vertu de (10)

$$\bar{u}_m \bar{u}_g = 0$$

et si V est l'angle (\bar{u}, \bar{u}_m) apprécié autour de \bar{u}_g , (18) s'écrit

$$p = \frac{ds}{d\sigma} \sin V .$$

44. — *Théorème de Bonnet.* Une ligne (m) tracée sur une surface réglée (Σ) peut être soit une géodésique, soit une trajectoire des génératrices sous un angle constant, soit la ligne de striction. Si deux quelconques de ces propriétés lui appartiennent, il en est de même de la troisième¹.

Prenons l'arc s de (m) pour paramètre. Soient ρ le rayon de courbure en M et \bar{u}_1 le vecteur unitaire porté par la normale principale. Si (m) est ligne de striction et trajectoire, on a

$$\bar{u}_m \frac{d\bar{u}}{ds} = 0 . \quad (23)$$

$$\bar{u}_m \bar{u} = a , \quad a = \text{constante}. \quad (24)$$

Dérivons (24), tenons compte de (23) et d'une formule de FRENET, il vient

$$\bar{u}_1 \bar{u} = 0 . \quad (25)$$

Donc (m) est géodésique.

Si on a (23) et (25), on en déduit par addition

$$\bar{u}_m \frac{d\bar{u}}{ds} + \frac{d\bar{u}_m}{ds} \bar{u} = 0 ,$$

d'où (24).

Si on a (24) et (25) on en déduit (23) après dérivation de (24).

Novembre 1926.

Ecole des Mines de Mons.

¹ O. BONNET, *Mémoire sur la Théorie générale des surfaces*, *Journal de l'Ecole Polytechnique XXXII^e cahier*, p. 70, 1848. — G. DARBOUX, *tome cité*, p. 311. — C. SERVAIS, *loc. cit.*, démontre ce théorème sans calculs, N° 18.