

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	27 (1928)
<b>Heft:</b>	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 <b>Artikel:</b>	 SUR QUELQUES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL VECTORIEL
<b>Autor:</b>	Lainé, E.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-21881">https://doi.org/10.5169/seals-21881</a>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SUR QUELQUES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL VECTORIEL

PAR

E. LAINÉ (Angers).

---

1. — Le présent travail a pour but de montrer avec quelle souplesse et quelle simplicité le calcul vectoriel se prête aux recherches théoriques sur la géométrie des courbes et des surfaces. Sans prétendre établir aucun résultat essentiellement nouveau, et en n'abordant que des problèmes relativement élémentaires, je m'efforcerai de faire voir comment les calculs s'enchaînent de la façon la plus naturelle et comment des formules même compliquées restent cependant maniables. Tout lecteur quelque peu initié aux méthodes vectorielles — et l'initiation est bien aisée — pourra ensuite faire une comparaison instructive avec les autres méthodes, par exemple avec celle du trièdre mobile de Darboux-Weingarten.

2. — Je me proposerai d'abord le problème suivant, qui généralise le problème des développées d'une courbe gauche:

Déterminer les surfaces développables dont les génératrices rencontrent sous un angle constant une courbe donnée  $\Gamma$ .

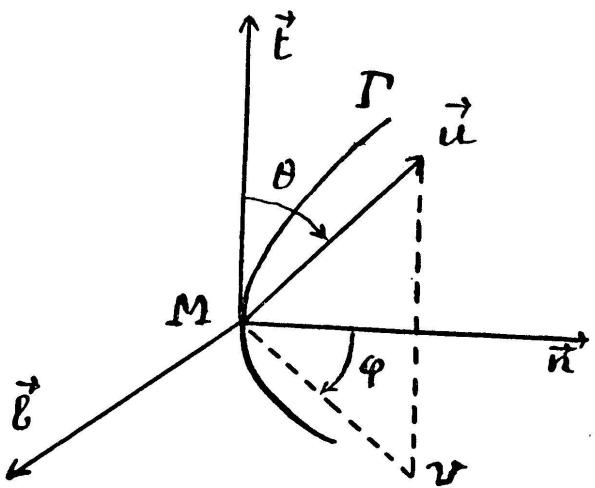
Considérons, en un point  $M$  d'une courbe  $\Gamma$ , le trièdre de Serret associé; avec les notations habituelles nous désignerons par  $\vec{t}$ ,  $\vec{n}$  et  $\vec{b}$  des vecteurs unitaires portés par les trois axes du trièdre (tangente, normale principale, binormale). Tout autre vecteur unitaire,  $\vec{u}$ , issu de  $M$ , est entièrement déterminé par les angles

$$(\vec{t}, \vec{u}) = \vartheta \text{ (compris entre } 0 \text{ et } \pi)$$

$$(\vec{n}, \vec{Mv}) = \phi \text{ (compris entre } 0 \text{ et } 2\pi) ;$$

on peut écrire

$$\vec{u} = \vec{t} \cos \vartheta + \vec{n} \sin \vartheta \cos \varphi + \vec{b} \sin \vartheta \sin \varphi . \quad (1)$$



Ceci posé, toute surface réglée passant par  $\Gamma$  a une équation de la forme

$$\vec{p} = \vec{M} + \rho \vec{u} , \quad (2)$$

où les vecteurs  $\vec{M}$  et  $\vec{u}$  sont des fonctions de l'arc  $s$  de  $\Gamma$ . Pour que la surface (2) soit développable, il faut et il suffit que l'on ait<sup>1</sup>

$$\left( \vec{t}, \vec{u}, \frac{d\vec{u}}{ds} \right) = 0 ,$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\vec{u} \cdot \left( \vec{t} \wedge \frac{d\vec{u}}{ds} \right) = 0 . \quad (3)$$

Si l'on suppose  $\vartheta = \text{cste}$ , on tire de (1), par application des formules de Serret,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}}{ds} &= -\frac{\vec{t}}{R} \sin \vartheta \cos \varphi + \vec{n} \left[ \frac{\cos \vartheta}{R} + \sin \vartheta \sin \varphi \left( \frac{1}{T} - \frac{d\varphi}{ds} \right) \right] \\ &\quad - \vec{b} \sin \vartheta \cos \varphi \left( \frac{1}{T} - \frac{d\varphi}{ds} \right) , \end{aligned}$$

<sup>1</sup> E. LAINÉ. *Précis d'Analyse mathématique*, t. II, p. 86 (Vuibert, 1927). D'une façon générale je continuerai d'utiliser les notations de M. Bouligand.

d'où

$$\begin{aligned}\vec{t} \wedge \frac{\vec{du}}{ds} &= \vec{b} \left[ \frac{\cos \vartheta}{R} + \sin \vartheta \sin \varphi \left( \frac{1}{T} - \frac{d\varphi}{ds} \right) \right] \\ &\quad + \vec{n} \sin \vartheta \cos \varphi \left( \frac{1}{T} - \frac{d\varphi}{ds} \right),\end{aligned}$$

et l'équation (3) s'écrit alors

$$\frac{\sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi}{R} + \sin^2 \vartheta \left( \frac{1}{T} - \frac{d\varphi}{ds} \right) = 0. \quad (4)$$

On a d'abord la solution évidente  $\sin \vartheta = 0$ , qui correspond à la développable admettant  $\Gamma$  comme arête de rebroussement. Cette solution écartée, on tire de (4)

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{T} + \frac{\cot \vartheta}{R} \sin \varphi :$$

telle est l'équation différentielle du problème.

Posant  $\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \lambda$ , on obtient l'équation

$$2 \frac{d\lambda}{ds} = \frac{1}{T} + \frac{2 \cot \vartheta}{R} \lambda + \frac{1}{T} \lambda^2 :$$

c'est une équation de Riccati. On voit donc qu'en général le problème proposé ne se ramène pas à des quadratures.

Si  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ , on a le problème classique des développées de la courbe  $\Gamma$ , qui n'exige qu'une quadrature. Il est clair qu'on est encore ramené aux quadratures si la courbe  $\Gamma$  est une hélice.

3. — Nous allons maintenant, étant donnée une courbe  $\Gamma$ , rechercher les surfaces réglées qui admettent cette courbe comme ligne de striction.

Si l'équation (3) représente une telle surface, on aura<sup>1</sup>

$$\vec{t} \cdot \frac{\vec{du}}{ds} = 0, \quad (5)$$

ou, en remplaçant  $\vec{u}$  par sa valeur (1),

$$\sin \vartheta \left( \frac{d\vartheta}{ds} + \frac{\cos \varphi}{R} \right) = 0 :$$

<sup>1</sup> *Précis d'Analyse*, loc. cit., p. 87.

écartant la solution  $\sin \vartheta = 0$ , on a finalement la relation fondamentale

$$\cos \varphi = - R \frac{d\vartheta}{ds} . \quad (6)$$

Ainsi pour avoir une surface répondant à la question, il suffit de prendre pour  $\vartheta$  une fonction arbitraire de  $s$ , et l'angle  $\varphi$  est alors déterminé par la relation (6). On voit donc que les surfaces cherchées dépendent d'une fonction arbitraire, et qu'on peut écrire leur équation générale sans aucun signe de quadrature.

Si nous voulons maintenant, pour préciser le problème, rechercher les surfaces réglées qui admettent  $\Gamma$  comme ligne de striction et sont tangentes le long de  $\Gamma$  à une développable donnée, on voit que l'angle  $\varphi$  est dans ce cas une fonction connue de  $s$ ; la formule (6) donne alors  $\vartheta$  par une quadrature. Ainsi *les surfaces qui ont une ligne de striction donnée et sont tangentes le long de cette ligne à une développable donnée forment une famille à un paramètre qui s'obtient par une quadrature; les génératrices rectilignes de deux quelconques de ces surfaces se coupent sous un angle constant tout le long de  $\Gamma$ .*

4. — Dans le même ordre d'idées, nous montrerons comment la formule (6) a pour conséquences immédiates une série de propositions dues à O. Bonnet.

Supposons  $\vartheta = c^{\text{te}}$ ; on a alors  $\cos \varphi = 0$ , et la génératrice rectiligne est dans le plan rectifiant: la courbe  $\Gamma$  est donc une géodésique de la surface réglée. Ainsi *quand la ligne de striction coupe les génératrices sous un angle constant, elle est une géodésique de la surface réglée.*

Supposons  $\cos \varphi = 0$ ; on a alors  $\vartheta = c^{\text{te}}$ . Ainsi *quand la ligne de striction est une géodésique de la surface réglée, elle coupe les génératrices rectilignes sous un angle constant.*

Enfin s'il existe sur une surface réglée une courbe telle que  $\cos \varphi = 0$  et  $\vartheta = c^{\text{te}}$ , la relation (6) est satisfaite pour cette courbe. Ainsi *quand il existe, sur une surface réglée, une géodésique qui coupe les génératrices sous un angle constant, elle est ligne de striction.*

Tels sont les théorèmes de Bonnet.

Considérons par exemple sur une surface quelconque  $S$  une courbe  $C$  qui soit ligne de striction pour la normalie associée: elle est une géodésique de cette normalie, et par suite sa normale principale est dans le plan tangent à  $S$ ; autrement dit c'est une asymptotique de  $S$ . Inversement la normalie associée à une asymptotique n'est autre que la surface des binormales; elle admet donc l'asymptotique comme ligne de striction. Ainsi *pour qu'une courbe  $C$  soit ligne asymptotique d'une surface, il faut et il suffit que la normalie associée admette  $C$  comme ligne de striction.*

5. — On sait que pour qu'une surface réglée soit la surface des binormales d'une courbe gauche, il faut et il suffit que sa ligne de striction coupe les génératrices rectilignes à angle droit. La condition pour qu'une surface réglée soit la surface des normales principales d'une courbe gauche se présente, comme nous allons le voir, sous une forme beaucoup moins simple.

Soient  $\Gamma$  la ligne de striction,  $M$  un point de  $\Gamma$ ,

$$\vec{P} = \vec{M} + \varphi \vec{u}$$

l'équation vectorielle de la surface réglée. Nous poserons encore

$$\vec{u} = \vec{t} \cos \varphi + \vec{n} \sin \vartheta \cos \varphi + \vec{b} \sin \vartheta \sin \varphi ,$$

et nous aurons

$$\cos \varphi = - R \frac{d\vartheta}{ds} ,$$

$s$  désignant l'arc de  $\Gamma$ . Pour que cette surface réglée soit la surface des normales principales à une courbe gauche, il faut et il suffit qu'il existe une courbe  $C$  qui soit à la fois trajectoire orthogonale des génératrices et asymptotique.

La première condition,

$$\vec{u} \cdot d\vec{P} = 0 ,$$

donne d'abord

$$\frac{d\varphi}{ds} = - \vec{t} \cdot \vec{u} = - \cos \vartheta . \quad (7)$$

Cherchons maintenant l'équation différentielle des asymptotiques; elle s'écrit

$$D ds^2 + 2D' d\varphi ds = 0 , \quad (8)$$

avec

$$D = \left( \frac{\partial \vec{P}}{\partial s}, \frac{\partial \vec{P}}{\partial \rho}, \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial s^2} \right), \quad D' = \left( \frac{\partial \vec{P}}{\partial s}, \frac{\partial \vec{P}}{\partial \rho}, \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial \rho \partial s} \right).$$

Pour simplifier le calcul, on peut introduire deux nouveaux vecteurs,

$$\vec{v}_1 = \vec{n} \sin \varphi - \vec{b} \cos \varphi , \quad \vec{v}_2 = \vec{n} \cos \varphi + \vec{b} \sin \varphi ,$$

situés dans le plan rectifiant et formant avec  $\vec{t}$  un trièdre trirectangle de sens direct. On aura alors

$$\vec{t} \wedge \vec{v}_1 = \vec{v}_2 , \quad \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \vec{t} , \quad \vec{v}_2 \wedge \vec{t} = \vec{v}_1 ,$$

avec

$$\vec{u} = \vec{t} \cos \vartheta + \vec{v}_2 \sin \vartheta .$$

Posant en outre

$$A_0 = \frac{1}{R} , \quad A_1 = \frac{1}{T} - \frac{d\varphi}{ds} , \quad A = A_0 \cos \vartheta \sin \varphi + A_1 \sin \vartheta ,$$

on aura immédiatement

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} &= A \vec{v}_1 , \quad \frac{d\vec{v}_1}{ds} = -A_0 \sin \varphi \vec{t} - A_1 \vec{v}_2 , \\ \frac{d\vec{v}_2}{ds} &= -A_0 \cos \varphi \vec{t} + A_1 \vec{v}_1 ; \end{aligned}$$

on en tirera

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{P}}{\partial s} &= \vec{t} + \rho A \vec{v}_1 , \quad \frac{\partial \vec{P}}{\partial \rho} = \vec{u} = \vec{t} \cos \vartheta + \vec{v}_2 \sin \vartheta , \\ \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial s^2} &= \frac{\vec{n}}{R} + (\rho A' - A \cos \vartheta) \vec{v}_1 - \rho A (A_0 \sin \varphi \vec{t} + A_1 \vec{v}_2) , \quad \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial \rho \partial s} = A \vec{v}_1 , \end{aligned}$$

et enfin

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial s} \wedge \frac{\partial \vec{P}}{\partial \rho} = \rho A \sin \vartheta \vec{t} - \sin \vartheta \vec{v}_1 - \rho A \cos \vartheta \vec{v}_2 .$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} D &= \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial s^2} \cdot \left( \frac{\partial \vec{P}}{\partial s} \wedge \frac{\partial \vec{P}}{\partial \rho} \right) = -\varphi^2 A^2 (A_0 \sin \vartheta \sin \varphi - A_1 \cos \vartheta) \\ &- \varphi (AA_0 \cos \vartheta \cos \varphi + \frac{dA}{ds} \sin \vartheta) - \sin^2 \vartheta (A_0 \sin \vartheta \sin \varphi - A_1 \cos \vartheta), \\ D' &= \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial \rho \partial s} \cdot \left( \frac{\partial \vec{P}}{\partial s} \wedge \frac{\partial \vec{P}}{\partial \rho} \right) = -A \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à écrire que les équations (7) et (8) ont une solution commune, ce qui donne la condition

$$D - 2D' \cos \vartheta = 0. \quad (9)$$

En définitive l'équation (9) est une équation du second degré en  $\rho$ ; pour que la surface réglée considérée soit la surface des normales principales à une courbe gauche, il faut et il suffit qu'une des racines de l'équation (9) vérifie l'équation (7). On doit d'ailleurs se rappeler que  $\varphi$  vérifie la relation (6).

6. — MANNHEIM a montré que, pour que les normales principales d'une courbe gauche soient aussi les binormales d'une autre courbe gauche, il faut et il suffit qu'on ait une relation de la forme

$$A \left( \frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2} \right) = \frac{B}{R}.$$

Cherchons inversement la condition pour que les binormales d'une courbe gauche  $\Gamma$  soient les normales principales d'une autre courbe gauche; il suffit d'appliquer à ce problème particulier les résultats que nous venons d'établir dans le cas général.

On a ici

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{d\rho}{ds} = 0,$$

$$A_0 = \frac{1}{R}, \quad A_1 = A = \frac{1}{T},$$

et l'équation (9) se réduit à

$$\varphi^2 - \varphi R \frac{dT}{ds} + T^2 = 0. \quad (10)$$

La condition cherchée est donc simplement que l'une des racines de l'équation (10) se réduise à une constante.

Supposons que la courbe  $\Gamma$  soit une courbe à torsion constante. L'équation (10) se réduit à

$$\rho^2 + T^2 = 0 . \quad (11)$$

Ainsi il n'existe aucune courbe réelle dont les normales principales soient les binormales d'une autre courbe réelle à torsion constante.

L'équation (11) fait correspondre, à tout point  $M$  de la courbe  $\Gamma$  supposée à torsion constante, deux points imaginaires  $P_1$  et  $P_2$ , symétriques par rapport à  $M$ , et situés à la distance  $iT$  de  $M$ : soient  $C_1$  et  $C_2$  les courbes décrites par  $P_1$  et  $P_2$  quand  $M$  décrit  $\Gamma$ . Les courbes  $C_1$  et  $C_2$ , admettant pour normales principales communes les binormales de  $\Gamma$ , sont deux courbes de Bertrand associées. Il est facile de voir que ce sont en outre des courbes minima: on a en effet

$$\vec{P}_1 = \vec{M} + iT\vec{b} , \quad d\vec{P}_1 = \left( \frac{d\vec{M}}{ds} + iT \frac{d\vec{b}}{ds} \right) ds = (\vec{t} + i\vec{n}) ds ,$$

et par suite

$$(d\vec{P}_1)^2 = 0 .$$

Ce résultat se rattache aux belles recherches de M. B. GAMBIER sur les transformations asymptotiques et les courbes de Bertrand<sup>1</sup>.

7. — Nous terminerons ces applications du calcul vectoriel par quelques remarques sur les courbes de Bertrand.

Une courbe de Bertrand est soit une courbe plane, soit une hélice circulaire, soit une courbe dont la courbure et la torsion sont liées linéairement par une relation de la forme

$$\frac{\alpha}{R} + \frac{\beta}{T} + 1 = 0 , \quad (12)$$

$\alpha$  et  $\beta$  désignant des constantes dont la première n'est pas nulle.

---

<sup>1</sup> Travaux scientifiques de l'Université de Lille (nouvelle série, volume 4).

Dans les deux premiers cas il existe une infinité de courbes ayant mêmes normales principales que la proposée; dans le troisième il existe une seule courbe ayant mêmes normales principales que la proposée: on l'obtient en associant à chaque point M de la première courbe un point  $M_1$  tel que

$$\overrightarrow{MM_1} = -\alpha \vec{n}.$$

Ces deux courbes sont appelées courbes de Bertrand associées.

Quand deux courbes de Bertrand ayant mêmes normales principales sont deux courbes planes, elles ne peuvent avoir même courbure aux points correspondants; quand ce sont deux hélices circulaires, elles ne peuvent avoir ni même courbure, ni même torsion en deux points correspondants.

Nous ne considérerons plus maintenant que des courbes de Bertrand autres que des courbes planes et des hélices.

Soient C et  $C_1$  deux courbes de Bertrand associées; nous affecterons de l'indice 1 les éléments géométriques relatifs à la courbe  $C_1$ , et nous supposerons que la courbe C satisfait à la relation (12). On a alors<sup>1</sup>, en posant  $s_1 = \vartheta(s)$ , les relations

$$1 + \frac{\alpha}{R} = \vartheta' \sin \varphi, \quad \frac{\alpha}{T} = -\vartheta' \cos \varphi, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\beta}{\alpha};$$

d'autre part on a aussi

$$\vec{t}_1 = \vec{t} \sin \varphi - \vec{b} \cos \varphi, \quad \vec{n}_1 = \varepsilon \vec{n}, \quad \vec{b}_1 = \varepsilon (\vec{t} \cos \varphi + \vec{b} \sin \varphi), \\ (\varepsilon = \pm 1).$$

On en déduit aisément, entre les courbures et les torsions des deux courbes, les relations

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} &= -\frac{\varepsilon T \cos \varphi}{\alpha} \left( \frac{\sin \varphi}{R} - \frac{\cos \varphi}{T} \right) \\ \frac{1}{T_1} &= -\frac{\varepsilon T \cos \varphi}{\alpha} \left( \frac{\cos \varphi}{R} + \frac{\sin \varphi}{T} \right), \end{aligned} \tag{13}$$

où  $\varepsilon$  doit être choisi de telle sorte que  $\frac{1}{R_1}$  soit positif.

<sup>1</sup> *Précis d'Analyse*, loc. cit., p. 82-83.

On sait qu'une courbe à courbure constante et la courbe lieu de ses centres de courbure sont deux courbes de Bertrand associées, ayant même courbure en deux points correspondants. Cherchons d'une façon générale à quelle condition deux courbes de Bertrand associées auront même courbure aux points correspondants. La relation (12) et la première relation (13) peuvent alors s'écrire

$$\begin{aligned} \cos \varphi (T \sin \varphi - R \cos \varphi) + \varepsilon \alpha &= 0 \\ \alpha (T \cos \varphi + R \sin \varphi) + RT \cos \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Comme on a par hypothèse  $\cos \varphi \neq 0$ , on voit que ces deux équations détermineront  $R$  et  $T$  sauf si  $\sin \varphi = 0$ : dans ce dernier cas la relation (12) se réduit à  $R = -\alpha$ . Ainsi *pour que deux courbes de Bertrand associées aient même courbure aux points correspondants, il faut et il suffit qu'elles soient à courbure constante: chacune d'elles est alors le lieu des centres de courbure de l'autre.*

Cherchons de même à quelle condition deux courbes de Bertrand associées auront même torsion aux points correspondants. La relation (12) et la seconde relation (13) montrent que  $T$  devrait être constant; il en serait donc de même de  $R$ , et la courbe  $C$  serait une hélice circulaire, hypothèse à écarter d'après ce que nous avons dit plus haut. Ainsi *il est impossible de trouver deux courbes gauches ayant mêmes normales principales et même torsion aux points correspondants.*