seconde cubique liée aux triangles pseudoisoscèles.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Les fonctions elliptiques associées à cette équation des triangles pseudoisoscèles ont pour caractéristiques:

$$g_2 = \frac{25}{12}, \qquad g_3 = -\frac{11.23}{8.27}, \qquad \Delta = -28 ;$$

$$e_1 = -\frac{11}{12},$$

$$\wp'^2 u = 4\left(\wp u + \frac{11}{12}\right)\left(\wp^2 u - \frac{11}{12}\wp u + \frac{23}{27}\right) ;$$

$$\wp w = \frac{13}{12}, \qquad \wp' w = 2, \qquad \wp'' w = 6,$$

$$\wp v = \frac{1}{12}, \qquad \wp' v = -1, \qquad \wp'' w = -1,$$

$$\wp 3w = -\frac{11}{12}, \qquad \wp' 3w = 0,$$

$$\wp 4w = \frac{1}{12}, \qquad \wp' 4w = -1,$$

$$\wp 5w = \frac{13}{12}, \ldots$$

l'argument w est sixième de période; les seuls arithmopoints connus sont les points réels d'inflexion, un sommet et les points qui en dérivent par alignements; au total, cinq arithmopoints seulement.

UNE SECONDE CUBIQUE LIÉE AUX TRIANGLES PSEUDOISOSCÈLES.

7. — Soient (x, y, z) les coordonnées barycentriques d'un point M du plan du triangle de référence ABC. L'aire du triangle ABC étant S,

$$x + y + z = 2S,$$

celle S′ du triangle A′B′C′ dont les sommets sont les points A′, B′, C′ où les droites AM, BM, CM rencontrent respectivement les côtés BC, CA, AB du triangle est déterminée par la formule:

$$(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{2S + S'}{S'}.$$

Le lieu des points M du plan du triangle, tels que l'aire de A' B' C' reste constante est donc une cubique dont l'équation peut être mise sous l'une des formes suivantes:

$$(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = m ,$$

$$(x + y)(y + z)(z + x) = 2n.xyz ,$$

avec $m = \frac{2S}{S'} + 1$, $n = \frac{S}{S'}$, $m = 2n + 1$. Dans les calculs qui suivent, est introduit un autre paramètre s tel que $s = m + 1$.

La cubique passe par les sommets A, B, C du triangle et y admet pour tangentes les parallèles aux côtés opposés.

Les trois points à l'infini sont inflexionnels. Les asymptotes, parallèles aux côtés, forment un triangle dont les sommets sont situés sur les médianes respectives de ABC. L'asymptote parallèle à BC a pour équation: $x + y + z = mx$.

La question est projective. Il suffit donc de construire les cubiques correspondant aux diverses valeurs du paramètre m, pour le triangle équilatéral.

La cubique est invariante dans la transformation quadratique ayant pour points fondamentaux le centre de gravité G et les trois points à l'infini dans la direction des côtés.

8. — La représentation elliptique de la cubique

$$(x + y + z)(xy + yz + zx) = mxyz , \qquad m = s - 1 ,$$

s'effectue en observant que les nombres

$$X = \frac{x + z}{z} , \qquad Y = \frac{y + z}{z}$$

ont un produit Π et une somme Σ reliés par la formule homographique

$$\Pi = (2 - s)\frac{\Sigma - 1}{\Sigma - s} .$$

Comme

$$\Sigma^2 - 4\Pi = D = (\Sigma - s).(\Sigma - 2).(\Sigma^2 - 2n\Sigma + 4n) , \quad m = 2n + 1 ,$$

l'équation $D = 0$, du quatrième degré, admet les zéros rationnels 2 et s et par suite la résolvante cubique admet une racine rationnelle. Les constantes elliptiques sont:

$$g_2 = \frac{4}{3}(n^4 - 4n^3 + 2n + 1) ,$$

$$g_3 = \frac{4}{9} e_1 (-2n^4 + 8n^3 + 2n + 1) ,$$

$$\Delta = m^2 (m - 1)^3 (m - 9) ,$$

$$e_1 = \frac{m^2 - 6m - 3}{12} = \frac{n^2 - 2n - 2}{3} ,$$

$$(e_1 - e_2)(e_1 - e_3) = m .$$

$$\wp v = \frac{(n-1)^2}{3} , \qquad \wp' v = -2n , \qquad \wp'' v = 4n(n-1) ,$$

$$\wp w = \frac{n^2 + 4n + 1}{3} , \qquad \wp' w = 2mn = m(m-1) ,$$

$$\wp'' w = 2mns = 4n(n+1)(2n+1) ,$$

$$\wp v - e_1 = 1 , \qquad \wp w - e_1 = m .$$

$$v + 2w = 0 , \qquad 3w = \omega_1 .$$

Ces formules ne font connaître en tout que cinq arithmopoints de la cubique de Weierstrass: le sommet e_1, deux inflexions $\pm v$, et les deux points $\pm w$ qui se déduisent des points d'inflexion et du sommet par alignements. Elles correspondent au cas singulier où, l'argument w étant sixième de période, les formules d'addition et de multiplication appliquées à ces arguments ω_1, w, v de toutes manières possibles ne donnent qu'un nombre limité de solutions rationnelles.

Les racines e_2 et e_3 ne sont rationnelles que pour les valeurs de n rendant carré le produit $n(n-4)$, c'est-à-dire lorsque n est de la forme

$$n = \frac{(t+1)^2}{t} , \qquad m = \frac{2t^2 + 5t + 2}{t}$$

en fonction d'un nombre rationnel quelconque. Les six points d'intersection, autres que les sommets, de la courbe avec les médianes sont alors des arithmopoints; par exemple, sur la médiane AG.

$$x = t\ ,\quad y = 1\ ,\quad z = 1\ ,$$

$$x = 1\ ,\quad y = t\ ,\quad z = t\ .$$

Les racines sont alors

$$e_1 = \frac{t^4 + 2t^3 + 2t + 1}{3t^2}\ ,\quad e_2 = \frac{t^4 + 2t^3 - 4t - 2}{3t^2}\ ,\quad e_3 = \frac{-2t^4 - 4t^3 + 2t + 1}{3t^2}$$

$$e_1 - e_2 = \frac{2t + 1}{t^2}\ ,\quad e_2 - e_3 = \frac{(t-1)\,.\,(t+1)^2}{t^2}\ ,\quad e_1 - e_3 = t(t+2)\ ,$$

leur ordre dépendant de t.

D'autre part, lorsque n est de la forme

$$n = \frac{t^2 + 2t + 2}{t}\ ,\qquad m = \frac{2t^2 + 5t + 4}{t}\ ,$$

la courbe admet deux arithmopoints sur la parallèle $y + z = \lambda x$ au côté BC, par exemple le point:

$$x = t + 2\ ,\quad y = t(t+1)\ ,\quad z = t$$

et par conséquent dans ce cas six arithmopoints sont connus. Les valeurs entières de m correspondant à ce cas sont $m = -1$, -4, 11 et 14.

Lorsque m est carré, $m = q^2$, $\wp u$ prend des valeurs rationnelles pour des valeurs de l'argument égales aux quarts de la période $2\omega_1$; mais $\wp' u$ prend des valeurs généralement irrationnelles dépendant de la racine carrée de $(q-1)(q+3)$. Pour que deux de ces quarts de période correspondent à des arithmopoints de la cubique, il faut prendre:

$$m = q^2\ ,\qquad \text{avec}\qquad q = \frac{t^2 - t + 1}{t}\ ,$$

$$n = \frac{t^2 + 1}{2t^2}(t-1)^2\ ,$$

$$\wp\frac{\omega_1}{2} = e_1 + q\ ,\qquad \wp'\frac{\omega_1}{2} = \pm\frac{t^2 - t + 1}{t^3}(t+1)(t-1)^3\ ,$$

$$\wp v = \frac{(t^4 - 2t^3 - 2t + 1)^2}{12t^4}\ ,\qquad \wp' v = -\frac{t^2+1}{t^2}(t-1)^2\ .$$

Il en résulte que la cubique admet l'arithmopoint

$$x = t^2 , \qquad y = -t , \qquad z = 1 ,$$

situé sur la conique $y^2 = xz$, et les arithmopoints qui en dérivent par des permutations entre x, y et z.

9. — *Cas particuliers.* — *Cas* m $= 9$. La cubique est alors unicursale, avec le centre de gravité pour point double isolé. Les tangentes au point G ont pour équations respectives

$$jx + j^2y + z = 0 , \qquad j^2x + jy + z = 0 , \qquad j^3 = 1 .$$

(j racine imaginaire de l'unité).

Si l'on représente par

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0 , \qquad \lambda + \mu + \nu = 0 ,$$

une droite GM quelconque passant par G, les coordonnées courantes de M peuvent être prises égales (à un facteur d'homogénéité près) à:

$$x = \mu\nu(\nu - \mu) , \qquad y = \nu\lambda(\lambda - \nu) , \qquad z = \lambda\mu(\mu - \lambda) .$$

Le point M peut être considéré comme l'intersection de GM avec la droite $\lambda^2 x + \mu^2 y + \nu^2 z = 0$, tangente variable de la conique inscrite au triangle d'équation tangentielle:

$$\sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w} = 0 .$$

Cas m $= 0$. Décomposition de la cubique en la droite de l'infini et une conique circonscrite au triangle.

Cas m $= 1$. Décomposition de la cubique en le système des trois parallèles aux côtés menées par les sommets.

Cas m $= 2$. Les fonctions elliptiques sont alors celles du problème des *triangles pseudoisoscèles* de Steiner.

En attribuant donc cette valeur particulière, $m = 2$, au paramètre m dans les formules générales du paragraphe 8, on retrouve celles qui ont été données au paragraphe 6 pour les constantes elliptiques du problème des triangles pseudoisoscèles.