

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 27 (1928)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES TRIANGLES PSEUDO-ISOSCÈLES  
**Autor:** Turrière, Emile  
**Kapitel:** seconde cubique liée aux triangles pseudoisoscelles.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-21880>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Les fonctions elliptiques associées à cette équation des triangles pseudoisoscelles ont pour caractéristiques :

$$g_2 = \frac{25}{12}, \quad g_3 = -\frac{11 \cdot 23}{8 \cdot 27}, \quad \Delta = -28;$$

$$e_1 = -\frac{11}{12},$$

$$p'^2 u = 4 \left( p^u + \frac{11}{12} \right) \left( p^2 u - \frac{11}{12} p^u + \frac{23}{27} \right);$$

$$p^{w'} = \frac{13}{12}, \quad p'^w = 2, \quad p''^w = 6,$$

$$p^v = \frac{1}{12}, \quad p'^v = -1, \quad p''^v = -1,$$

$$p^{3w} = -\frac{11}{12}, \quad p'^{3w} = 0,$$

$$p^{4w} = \frac{1}{12}, \quad p'^{4w} = -1,$$

$$p^{5w} = \frac{13}{12}, \dots$$

l'argument  $w$  est sixième de période; les seuls arithmopoints connus sont les points réels d'inflexion, un sommet et les points qui en dérivent par alignements; au total, cinq arithmopoints seulement.

#### UNE SECONDE CUBIQUE LIÉE AUX TRIANGLES PSEUDOISOSCELLES.

7. — Soient  $(x, y, z)$  les coordonnées barycentriques d'un point M du plan du triangle de référence ABC. L'aire du triangle ABC étant S,

$$x + y + z = 2S,$$

celle  $S'$  du triangle  $A'B'C'$  dont les sommets sont les points  $A', B', C'$  où les droites  $AM, BM, CM$  rencontrent respectivement les côtés  $BC, CA, AB$  du triangle est déterminée par la formule :

$$(x + y + z) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \frac{2S + S'}{S'}.$$

Le lieu des points M du plan du triangle, tels que l'aire de A'B'C' reste constante est donc une cubique dont l'équation peut être mise sous l'une des formes suivantes:

$$(x + y + z) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = m ,$$

$$(x + y)(y + z)(z + x) = 2nxyz ,$$

avec  $m = \frac{2S}{S'} + 1$ ,  $n = \frac{S}{S'}$ ,  $m = 2n + 1$ . Dans les calculs qui suivent, est introduit un autre paramètre  $s$  tel que  $s = m + 1$ .

La cubique passe par les sommets A, B, C du triangle et y admet pour tangentes les parallèles aux côtés opposés.

Les trois points à l'infini sont inflexionnels. Les asymptotes, parallèles aux côtés, forment un triangle dont les sommets sont situés sur les médianes respectives de ABC. L'asymptote parallèle à BC a pour équation:  $x + y + z = mx$ .

La question est projective. Il suffit donc de construire les cubiques correspondant aux diverses valeurs du paramètre  $m$ , pour le triangle équilatéral.

La cubique est invariante dans la transformation quadratique ayant pour points fondamentaux le centre de gravité G et les trois points à l'infini dans la direction des côtés.

### 8. — La représentation elliptique de la cubique

$$(x + y + z)(xy + yz + zx) = mxyz , \quad m = s - 1 ,$$

s'effectue en observant que les nombres

$$X = \frac{x + z}{z} , \quad Y = \frac{y + z}{z}$$

ont un produit  $\Pi$  et une somme  $\Sigma$  reliés par la formule homographique

$$\Pi = (2 - s) \frac{\Sigma - 1}{\Sigma - s} .$$

Comme

$$\Sigma^2 - 4\Pi = D = (\Sigma - s) . (\Sigma - 2) . (\Sigma^2 - 2n\Sigma + 4n) , \quad m = 2n + 1 ,$$

l'équation  $D = 0$ , du quatrième degré, admet les zéros rationnels  $2$  et  $s$  et par suite la résolvante cubique admet une racine rationnelle. Les constantes elliptiques sont:

$$g_2 = \frac{4}{3} (n^4 - 4n^3 + 2n + 1) ,$$

$$g_3 = \frac{4}{9} e_1 (-2n^4 + 8n^3 + 2n + 1) ,$$

$$\Delta = m^2(m-1)^3(m-9) ,$$

$$e_1 = \frac{m^2 - 6m - 3}{12} = \frac{n^2 - 2n - 2}{3} ,$$

$$(e_1 - e_2)(e_1 - e_3) = m .$$

$$p^\nu = \frac{(n-1)^2}{3} , \quad p'^\nu = -2n , \quad p''^\nu = 4n(n-1) ,$$

$$p^\omega = \frac{n^2 + 4n + 1}{3} , \quad p'^\omega = 2mn = m(m-1) ,$$

$$p''^\omega = 2mns = 4n(n+1)(2n+1) ,$$

$$p^\nu - e_1 = 1 , \quad p^\omega - e_1 = m .$$

$$\nu + 2\omega = 0 , \quad 3\omega = \omega_1 .$$

Ces formules ne font connaître en tout que cinq arithmopoints de la cubique de Weierstrass: le sommet  $e_1$ , deux inflexions  $\pm \nu$ , et les deux points  $\pm \omega$  qui se déduisent des points d'infexion et du sommet par alignements. Elles correspondent au cas singulier où, l'argument  $\omega$  étant sixième de période, les formules d'addition et de multiplication appliquées à ces arguments  $\omega_1, \omega, \nu$  de toutes manières possibles ne donnent qu'un nombre limité de solutions rationnelles.

Les racines  $e_2$  et  $e_3$  ne sont rationnelles que pour les valeurs de  $n$  rendant carré le produit  $n(n-4)$ , c'est-à-dire lorsque  $n$  est de la forme

$$n = \frac{(t+1)^2}{t} , \quad m = \frac{2t^2 + 5t + 2}{t}$$

en fonction d'un nombre rationnel quelconque. Les six points d'intersection, autres que les sommets, de la courbe avec les

médiannes sont alors des arithmopoints; par exemple, sur la médiane AG.

$$\begin{aligned}x &= t, & y &= 1, & z &= 1, \\x &= 1, & y &= t, & z &= t.\end{aligned}$$

Les racines sont alors

$$\begin{aligned}e_1 &= \frac{t^4 + 2t^3 + 2t + 1}{3t^2}, & e_2 &= \frac{t^4 + 2t^3 - 4t - 2}{3t^2}, & e_3 &= \frac{-2t^4 - 4t^3 + 2t + 1}{3t^2} \\e_1 - e_2 &= \frac{2t + 1}{t^2}, & e_2 - e_3 &= \frac{(t - 1) \cdot (t + 1)^2}{t^2}, & e_1 - e_3 &= t(t + 2),\end{aligned}$$

leur ordre dépendant de  $t$ .

D'autre part, lorsque  $n$  est de la forme

$$n = \frac{t^2 + 2t + 2}{t}, \quad m = \frac{2t^2 + 5t + 4}{t},$$

la courbe admet deux arithmopoints sur la parallèle  $y + z = \lambda x$  au côté BC, par exemple le point:

$$x = t + 2, \quad y = t(t + 1), \quad z = t$$

et par conséquent dans ce cas six arithmopoints sont connus. Les valeurs entières de  $m$  correspondant à ce cas sont  $m = -1, -4, 11$  et  $14$ .

Lorsque  $m$  est carré,  $m = q^2$ ,  $p'u$  prend des valeurs rationnelles pour des valeurs de l'argument égales aux quarts de la période  $2\omega_1$ ; mais  $p'u$  prend des valeurs généralement irrationnelles dépendant de la racine carrée de  $(q - 1)(q + 3)$ . Pour que deux de ces quarts de période correspondent à des arithmopoints de la cubique, il faut prendre:

$$m = q^2, \quad \text{avec} \quad q = \frac{t^2 - t + 1}{t},$$

$$n = \frac{t^2 + 1}{2t^2}(t - 1)^2,$$

$$p \frac{\omega_1}{2} = e_1 + q, \quad p' \frac{\omega_1}{2} = \pm \frac{t^2 - t + 1}{t^3} (t + 1)(t - 1)^3,$$

$$p^\nu = \frac{(t^4 - 2t^3 - 2t + 1)^2}{12t^4}, \quad p'^\nu = -\frac{t^2 + 1}{t^2} (t - 1)^2.$$

Il en résulte que la cubique admet l'arithmopoint

$$x = t^2, \quad y = -t, \quad z = 1,$$

situé sur la conique  $y^2 = xz$ , et les arithmopoints qui en dérivent par des permutations entre  $x$ ,  $y$  et  $z$ .

9. — *Cas particuliers.* — *Cas m = 9.* La cubique est alors unicursale, avec le centre de gravité pour point double isolé. Les tangentes au point G ont pour équations respectives

$$jx + j^2y + z = 0, \quad j^2x + jy + z = 0, \quad j^3 = 1.$$

( $j$  racine imaginaire de l'unité).

Si l'on représente par

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0, \quad \lambda + \mu + \nu = 0,$$

une droite GM quelconque passant par G, les coordonnées courantes de M peuvent être prises égales (à un facteur d'homo-généité près) à:

$$x = \mu\nu(\nu - \mu), \quad y = \nu\lambda(\lambda - \nu), \quad z = \lambda\mu(\mu - \lambda).$$

Le point M peut être considéré comme l'intersection de GM avec la droite  $\lambda^2x + \mu^2y + \nu^2z = 0$ , tangente variable de la conique inscrite au triangle d'équation tangentielle:

$$\sqrt{u} + \sqrt{\nu} + \sqrt{\omega} = 0.$$

*Cas m = 0.* Décomposition de la cubique en la droite de l'infini et une conique circonscrite au triangle.

*Cas m = 1.* Décomposition de la cubique en le système des trois parallèles aux côtés menées par les sommets.

*Cas m = 2.* Les fonctions elliptiques sont alors celles du problème des triangles pseudoisoscelles de Steiner.

En attribuant donc cette valeur particulière,  $m = 2$ , au paramètre  $m$  dans les formules générales du paragraphe 8, on retrouve celles qui ont été données au paragraphe 6 pour les constantes elliptiques du problème des triangles pseudoisoscelles.