Les autres constantes elliptiques sont:

$$g_2 = \frac{64\,S^4}{3a^8c^4}(a^4 + b^4 - a^2b^2)\ , \quad g_3 = \frac{256}{27}\,\frac{S^6}{a^{12}c^6}(a^2+b^2)(2a^2-b^2)(2b^2-a^2)\ ,$$

$$\mathfrak{p}\nu = \frac{4S^2}{3a^4c^4}[12S^2 - (a^2+b^2)c^2]\ ,$$

$$\mathfrak{p}'\nu = \frac{8\,S^4}{a^6c^6}[(a^2-b^2)^2 - c^4]\ .$$

Les triangles pseudoisoscèles.

4. — Déterminons l'intersection de la cubique lieu de M avec la bissectrice intérieure de l'angle C, dont l'équation est $\frac{\xi}{a} = \frac{\eta}{b}$. Nous introduisons l'inconnue auxiliaire ψ telle que

$$\frac{\xi}{a} = \frac{\eta}{b} = \frac{\zeta}{c\psi}\ ;$$

et nous poserons

$$a + b = c\,.\,\Sigma\ , \qquad ab = c^2\,.\,\Pi\ .$$

L'équation des points d'intersection est alors:

$$(a-b)\,.\,\{\Pi(\Sigma^2 + 4\psi\Sigma + 2\psi^2 + 1) + \psi(\Sigma+\psi)(\psi\Sigma + 1)\} = 0\ .$$

Si le triangle n'est pas isocèle (AB = AC), cette relation peut être mise sous la forme

$$\Pi = -\,\psi\,.\,\frac{(\Sigma+\psi)(\psi\Sigma+1)}{\Sigma^2 + 4\psi\Sigma + 2\psi^2 + 1}\ .$$

Si maintenant on considère ψ comme un nombre constant, cette équation exprime une condition, symétrique entre a et b, à laquelle est soumise le triangle ABC.

Remarquons que si, pour un triangle quelconque, deux points sont pris, l'un A′ sur le côté BC, le second B′ sur le côté CA, tels que

$$\frac{BA'}{c\psi} = \frac{A'C}{b}\ , \qquad \frac{CB'}{a} = \frac{B'A}{c\psi}\ ,$$

le lieu du point M d'intersection des droites AA′ et BB′, pour les diverses valeurs de ψ, est la bissectrice intérieure de l'angle

BCA. Les coordonnées trilinéaires du point M peuvent être prises égales à X = Y = 1, Z = 4. Si C′ est le pied de la bissectrice intérieure de C et I le centre du cercle inscrit dans le triangle (ψ = 1 donne ce centre I), on a:

$$\frac{MC'}{CC'} = \frac{c\psi}{a+b}, \qquad \frac{MI}{CC'} = \frac{(a+b)c}{(a+b+c)(a+b+c\psi)}(\psi - 1) ;$$

Ces diverses relations mettent en évidence que le nombre constant ψ correspond à des divisions en rapports donnés des côtés CA, CB et de la bissectrice intérieure.

Lorsque ψ est imposé, le triangle ABC satisfait donc à une condition qui, si l'on pose $c = 1$, par exemple, exprime que la somme et le produit des deux autres côtés sont liés par la relation ci-dessus écrite. Celle-ci dégénère en une relation homographique entre le produit Π et la somme Σ dans quatre cas:

1° Pour $\psi = 1$. Le point M est au centre I du cercle inscrit. Les droites égales AA′ = BB′ sont alors les bissectrices intérieures des angles A et B. La relation homographique est:

$$\Pi = -\frac{\Sigma + 1}{\Sigma + 3} ;$$

elle ne saurait manifestement être vérifiée par un triangle réel. C'est donc le cas des *triangles pseudoisoscèles imaginaires avec égalité des bissectrices intérieures.*

2° Pour $\psi = -1$. Le point M étant alors le centre du cercle exinscrit, situé dans l'angle C, la relation correspondante représente les *triangles pseudoisoscèles avec égalité des bissectrices extérieures* (c'est-à-dire les triangles connus sous la dénomination de *triangles pseudoisoscèles*) :

$$\Pi = \frac{\Sigma - 1}{3 - \Sigma} .$$

3° Pour $\psi = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\Pi = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\Sigma + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\Sigma + \sqrt{2}} ,$$

triangles manifestement imaginaires.

4° Pour $\psi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Sigma - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2} - \Sigma} .$$

La formule exprimant la longueur commune des droites égales $AA' = BB'$, dans le cas d'intersection sur la bissectrice intérieure de l'angle C et pour ψ quelconque, étant

$$L^2 = \frac{(\Sigma + \psi)(\psi\Sigma + 1)}{\Sigma + 2\psi} ,$$

devient pour $\psi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$L^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\Sigma - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) ;$$

aucune valeur positive de Σ ne saurait rendre positifs simultanément Π et L^2. Le quatrième cas correspond donc encore à des triangles imaginaires.

Analytiquement, sous le point de vue des considérations que j'ai précédemment développées au sujet des relations homographiques entre Π et Σ, les deux premiers cas sont équivalents par simple changement de signe sur Σ. De même les deux derniers cas sont équivalents par changement de signe sur Σ.

Dans le quatrième cas, les fonctions elliptiques ont pour caractéristiques:

$$g_2 = \frac{1}{3} , \quad g_3 = -\frac{19}{3.27} , \quad \Delta = -\frac{11}{64} .$$

$$\wp v = -\frac{1}{6} , \quad \wp' v = -\frac{\sqrt{2}}{4} , \quad \wp'' v = 0 ,$$

$$\wp w = \frac{1}{3} , \quad \wp' w = \frac{\sqrt{2}}{4} , \quad \wp'' w = \frac{1}{2} ;$$

la cubique de Weierstrass admet les arithmopoints

$$\wp u = \frac{1}{12} , \quad \wp' u = \frac{1}{4} , \quad \wp'' u = -\frac{1}{8} ,$$

$$\wp(2u) = -\frac{5}{48} , \quad \wp'(2u) = -\frac{11}{32} , \quad \wp''(2u) = -\frac{13}{128} .$$

Cette équation constitue un exemple de détermination rationnelle d'un *cinquième de période*. Les relations

$$\mathfrak{p}w = \mathfrak{p}4w = \frac{1}{3}, \qquad \mathfrak{p}2w = \mathfrak{p}3w = -\frac{1}{6},$$

$$\mathfrak{p}'w = \mathfrak{p}'2w = \frac{\sqrt{2}}{4}, \qquad \mathfrak{p}'3w = \mathfrak{p}'4w = -\frac{\sqrt{2}}{4},$$

montrent que l'argument $5w$ est une période.

5. — La relation du second cas

$$\Pi = \frac{\Sigma - 1}{3 - \Sigma},$$

définit les triangles nommés *pseudoisoscèles*. Il existe une infinité de tels triangles, abstraction faite de la similitude, et qui correspondent aux valeurs de Σ comprises dans l'intervalle $1 < \Sigma < 2$.

Puisque l'occasion s'en offre, voici quelques renseignements bibliographiques au sujet de cette classe de triangles spéciaux.

Alors que diverses questions concernant les médianes ou les hauteurs sont accessibles dès le début de l'étude de la géométrie, il en est autrement quand il s'agit des questions analogues concernant les bissectrices des triangles.

L'exemple classique de ce genre de difficultés est la démonstration *géométrique* de la réciproque de l'égalité des bissectrices d'un triangle isoscèle. Les triangles isoscèles sont les seuls triangles *réels* dont deux bissectrices *intérieures* sont égales [1]. La difficulté de la démonstration géométrique découle de ce fait qu'analytiquement la condition d'égalité de ces lignes se présente sous la forme $(a - b) \cdot f(a, b) = 0$, avec un facteur $f(a, b)$ nécessairement positif, mais qui correspond aux triangles pseudoisoscèles imaginaires du premier cas.

---

[1] Pour une solution de cette question, voir les *Nouvelles Annales de Mathématiques* de 1842, p. 87, une note de TERQUEM.

Voir aussi: J. STEINER: Elementare Lösung einer Aufgabe über das ebene und das sphärische Dreieck. (Crelle's Journal, XXVIII, S. 375-379; Werke, II, S. 323-325).

Une seconde question intéressante mais ardue est la construction d'un triangle connaissant les longueurs de trois des bissectrices ou encore un angle et deux bissectrices.

Contrairement à ce qui se produit avec d'autres lignes remarquables du triangle, pour lesquelles la géométrie élémentaire fournit des solutions immédiates, il en est tout autrement pour le cas de la détermination d'un triangle connaissant des longueurs de trois bissectrices. Ce problème n'est plus du ressort de la géométrie pure, sa résolution dépend en effet d'équations de degré élevé, atteignant par exemple le seizième degré avec trois bissectrices quelconques, ou le 14me avec trois bissectrices intérieures [1].

6. — L'équation de FERMAT, dont dépendrait la détermination de tous les triangles pseudoisoscèles à côtés rationnels, est

$$(\Sigma - 2)(\Sigma - 3)(\Sigma^2 - \Sigma + 2) = \square \, .$$

elle n'admet aucune solution rationnelle, en dehors des racines 2 et 3 du polynome du premier membre. Il suffit d'étudier les facteurs premiers communs des trois nombres

$$x - 2y \, , \qquad x - 3y \, , \qquad x^2 - 2xy + 2y^2 \, ,$$

en supposant que x et y sont les termes d'une fraction irréductible représentant Σ, pour arriver à cette conclusion négative.

Il n'y a donc pas de triangle à côtés tous les trois rationnels parmi les triangles pseudoisoscèles.

---

[1] Cette question a été l'objet d'une étude étendue par M. BAKER (Richard-Philipp) *The problem of the angle bisectors* (The University of Chicago Press), dissertation de l'Université de Chicago, 1911.

L'auteur cite P. BARBARIN: Construire un triangle dont les bissectrices sont données (*Mathesis*, 1896, p. 143-160); Résumé d'un mémoire sur la détermination d'un triangle au moyen des longueurs de bissectrices (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1894, t. XXII, p. 76-80). On peut en outre citer J. DELITALA, Construire un triangle connaissant une bissectrice de chaque angle (*Mathesis*, 1902, p. 159-162) et une note de TERQUEM dans les *Nouvelles Annales de mathématiques*, 1842, p. 87.

Les fonctions elliptiques associées à cette équation des triangles pseudoisoscèles ont pour caractéristiques:

$$g_2 = \frac{25}{12}, \qquad g_3 = -\frac{11.23}{8.27}, \qquad \Delta = -28 ;$$

$$e_1 = -\frac{11}{12},$$

$$\wp'^2 u = 4\left(\wp u + \frac{11}{12}\right)\left(\wp^2 u - \frac{11}{12}\wp u + \frac{23}{27}\right) ;$$

$$\wp w = \frac{13}{12}, \qquad \wp' w = 2, \qquad \wp'' w = 6,$$

$$\wp v = \frac{1}{12}, \qquad \wp' v = -1, \qquad \wp'' w = -1,$$

$$\wp 3w = -\frac{11}{12}, \qquad \wp' 3w = 0,$$

$$\wp 4w = \frac{1}{12}, \qquad \wp' 4w = -1,$$

$$\wp 5w = \frac{13}{12}, \ldots$$

l'argument w est sixième de période; les seuls arithmopoints connus sont les points réels d'inflexion, un sommet et les points qui en dérivent par alignements; au total, cinq arithmopoints seulement.

Une seconde cubique liée aux triangles pseudoisoscèles.

7. — Soient (x, y, z) les coordonnées barycentriques d'un point M du plan du triangle de référence ABC. L'aire du triangle ABC étant S,

$$x + y + z = 2S,$$

celle S′ du triangle A′B′C′ dont les sommets sont les points A′, B′, C′ où les droites AM, BM, CM rencontrent respectivement les côtés BC, CA, AB du triangle est déterminée par la formule:

$$(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{2S + S'}{S'}.$$