

# SUR LES TRIANGLES PSEUDO-ISOSCÈLES

Autor(en): **Turrière, Emile**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-21880>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# SUR LES TRIANGLES PSEUDO-ISOSCÈLES

PAR

M. Emile TURRIÈRE (Montpellier).

Dans un précédent article<sup>1</sup> relatif aux *Formules elliptiques pour la résolution de certaines équations de Fermat*, j'ai été amené à faire allusion aux triangles pseudo-isoscèles de Steiner (paragraphe 10).

Dans les lignes qui suivent, quelques considérations nouvelles vont être données au sujet de cette classe de triangles :

$$c^3 - (a + b)c^2 + 3abc - (a + b)ab = 0 ,$$

ainsi que sur leurs relations avec deux cubiques planes.

## UNE CUBIQUE UNICURSALE.

1. — Reprenons tout d'abord les formules générales de résolution des équations de FERMAT.

Lorsque le polynome du quatrième degré, qui doit être rendu carré parfait par un choix convenable de la variable  $x$ , se présente sous la forme d'un produit de deux facteurs quadratiques à coefficients réels et rationnels,

$$X = (x^2 + 2Ax + B)(x^2 + 2Cx + D) ,$$

les constantes elliptiques s'expriment simplement par l'intermédiaire des discriminants  $\delta_1$  et  $\delta_2$ ,  $\delta_1 = A^2 - B$ ,  $\delta_2 = C^2 - D$  et de l'invariant mixte

$$\delta_1 + \delta_2 - (A - C)^2 = 2AC - (B + D) = 6e ,$$

<sup>1</sup> *Enseignement math.*, XXVI<sup>e</sup> année, 1927, p. 260-286.

dont la propriété est d'exprimer par la formule  $e = 0$  que les couples de racines des trinômes quadratiques sont conjugués harmoniques. Le calcul des constantes elliptiques donne alors:

$$\begin{aligned} g_2 &= \delta_1 \delta_2 + 3e^2, & g_3 &= e(e^2 - \delta_1 \delta_2), \\ \Delta &= \delta_1 \delta_2 (9e^2 - \delta_1 \delta_2)^2, \\ p^\nu &= \frac{1}{4}(\delta_1 + \delta_2 - 2e), & p'^\nu &= \frac{1}{4}(\delta_1 - \delta_2)(A - C); \\ p''^\nu &= \frac{1}{8}[3\delta_1^2 + 3\delta_2^2 + 2\delta_1 \delta_2 - 12e(\delta_1 + \delta_2)]; \end{aligned}$$

$e$  est précisément une racine de la résolvante cubique; soit  $e = p\omega$ ; les deux autres racines  $e'$   $e''$  de  $p'u = 0$  sont telles que:

$$\begin{aligned} (e' - e'')^2 &= \delta_1 \delta_2, & (e - e')(e - e'') &= \frac{1}{4}(9e^2 - \delta_1 \delta_2); \\ p^\nu - e_1 &= \frac{1}{4}(A - C)^2. \end{aligned}$$

La condition d'existence des trois racines est  $\delta_1 \delta_2 > 0$ . Pour  $\delta_1 \delta_2 > 9e^2$ , la racine  $e$  est comprise entre  $e'$  et  $e''$ . Pour  $0 < \delta_1 \delta_2 < 9e^2$ ,  $e$  est la plus grande racine ou la plus petite racine suivant qu'elle est positive ou négative.

2. — Ces remarques générales trouvent une application dans l'étude de la question suivante. *Etant donné un triangle ABC, déterminer les couples AA' et BB' de droites issues des sommets respectifs A et B, limitées aux côtés opposés qui sont égales et rationnellement mesurées en fonction des côtés a, b et c du triangle.*

Résolvons d'abord la question de géométrie que pose la condition d'égalité  $AA' = BB'$ . Soit M le point de concours des droites AA' et BB', soit (D) la droite joignant leurs pieds A' B'. En coordonnées barycentriques si  $(\xi, \eta, \zeta)$  sont les coordonnées du point M et  $(u, v, w)$  les coordonnées tangentielles de la droite (D), ce point M et cette droite (D) sont associés dans la transformation qu'expriment les formules:

$$u\xi = v\eta = -w\zeta.$$

Les longueurs AA' et BB' sont:

$$\overline{AA'}^2 = \frac{c^2 \eta^2 + (b^2 + c^2 - a^2) \eta \zeta + b^2 \zeta^2}{(\eta + \zeta)^2} = \frac{b^2 v^2 - (b^2 + c^2 - a^2) uv + c^2 w^2}{(v - w)^2}$$

$$\overline{BB'}^2 = \frac{a^2 \xi^2 + (c^2 + a^2 - b^2) \xi \zeta + c^2 \zeta^2}{(\xi + \zeta)^2} = \frac{a^2 u^2 - (b^2 + c^2 - a^2) uw + c^2 w^2}{(u - w)^2}$$

Pour AA' = BB', le lieu du point M est une courbe du troisième degré et l'enveloppe de (D) est une courbe de quatrième classe, dont les équations, ponctuelle pour l'une et tangentielle pour l'autre, résultent immédiatement de la comparaison des expressions ci-dessus. Introduisons deux paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  par les formules

$$u = \frac{\lambda - 1}{\lambda} w \quad v = \frac{\mu - 1}{\mu} w :$$

les expressions des longueurs deviennent:

$$\overline{AA'}^2 = a^2 \mu^2 - (a^2 + b^2 - c^2) \mu + b^2 .$$

$$\overline{BB'}^2 = b^2 \lambda^2 - (a^2 + b^2 - c^2) \lambda + a^2 .$$

L'égalité AA' = BB' correspond au fait que le point représentatif de coordonnées ordinaires  $\lambda$  et  $\mu$  décrit une conique; cette conique passe par les deux points ( $\lambda = 1, \mu = 1$ ) et ( $\lambda = -1, \mu = -1$ ), auxquelles correspondent pour la longueur commune  $L = AA' = BB'$  les valeurs  $L^2 = c^2$  et  $L^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$ . Dans le premier cas, L n'est autre que le côté BA; dans le second, L est le double de la médiane issue de C.

La cubique lieu de M a un point double  $C_1$  quatrième sommet du parallélogramme complétant ABC. Les formules (S = surface du triangle):

$$\xi + \xi_1 = 2S, \quad \eta + \eta_1 = 2S, \quad \zeta + \zeta_1 = 0$$

$$\xi = \eta_1 + \zeta_1, \quad \eta = \xi_1 + \zeta_1,$$

$$\xi_1 = \eta + \zeta, \quad \eta_1 = \xi + \zeta,$$

donnent pour équation de la même cubique, relativement au triangle de référence  $ABC_1$ :

$$\zeta_1 (b^2 \xi_1^2 - a^2 \eta_1^2) = \xi_1 \eta_1 [(a^2 + c^2 - b^2) \eta_1 - (b^2 + c^2 - a^2) \xi_1] .$$

Le rapport de  $\xi_1$  à  $\eta_1$  est indiqué comme paramètre de représentation de la cubique:

$$\eta_1 [(a^2 - c^2) \xi_1^2 + (a^2 + c^2 - b^2) \xi_1 \eta_1 - a^2 \eta_1^2] \stackrel{\xi}{=} \xi_1 [(c^2 - b^2) \eta_1^2 - (b^2 + c^2 - a^2) \xi_1 \eta_1 + b^2 \xi_1^2] \stackrel{\eta}{=} \xi_1 \eta_1 [(b^2 + c^2 - a^2) \xi_1 - (a^2 + c^2 - b^2) \eta_1] .$$

D'où:

$$(b^2 \xi_1^2 - a^2 \eta_1^2)^2 (L^2 - c^2) = \xi_1 \eta_1 [(b^2 + c^2 - a^2) \xi_1 - (a^2 + c^2 - b^2) \eta_1] [a^2 (b^2 + c^2 - a^2) \eta_1 - b^2 (a^2 + c^2 - b^2) \xi_1] .$$

D'ailleurs la représentation de la conique transformée  $(\lambda, \mu)$  se fait en posant  $\frac{\mu - 1}{\lambda - 1} = t$ ; si T désigne l'expression,

$$T = b^2 - a^2 t^2 ,$$

on obtient pour les deux courbes considérées:

$$\begin{aligned} u &= -W_0 \cdot W_1 , & \xi &= t \cdot W_2 , \\ v &= t \cdot W_0 \cdot W_2 , & \eta &= -W_1 , \\ w &= W_1 W_2 , & \zeta &= t W_0 , \end{aligned}$$

avec trois polynomes en  $t$ :

$$\begin{aligned} W_0 &= t(a^2 + c^2 - b^2) - (b^2 + c^2 - a^2) , \\ W_1 &= t^2(c^2 - b^2) - t(b^2 + c^2 - a^2) + b^2 , \\ W_2 &= a^2 t^2 - t(b^2 + c^2 - a^2) + c^2 - a^2 . \end{aligned}$$

D'où la condition définitive:

$$T^2(L^2 - c^2) = -t[(a^2 + c^2 - b^2)t - (b^2 + c^2 - a^2)] [a^2(b^2 + c^2 - a^2)t - b^2(a^2 + c^2 - b^2)] .$$

Il n'est pas inutile d'observer que ce choix de paramètre, s'il n'a qu'une importance secondaire sous le point de vue habituel de la Géométrie analytique, doit être fait judicieusement pour mener à bien les calculs d'analyse indéterminée qui suivront. Dans l'indétermination de la représentation paramétrique de la conique (par exemple en prenant pour paramètre le rapport de  $\mu + 1$  à  $\lambda + 1$ ), le numérateur de la fraction exprimant

$L^2 - c^2$  est généralement du quatrième degré. On connaît toujours les quatre zéros rationnels de  $L^2 - c^2$ ; ce sont quatre solutions de l'équation de Fermat, mais lorsqu'il s'agit d'étudier le polynome du quatrième degré correspondant à  $L^2$ , les coefficients sont non seulement compliqués mais les deux coefficients extrêmes ne se présentent pas comme carrés. Afin d'appliquer les formules de représentation au moyen des fonctions de Weierstrass il est indispensable de faire subir à l'équation une transformation homographique de variable lui assurant une solution nulle ou infinie, c'est-à-dire rendant carré parfait l'un ou l'autre des deux coefficients extrêmes. Le choix précédent du paramètre  $t$  donne au polynome  $T^2(L^2 - c^2)$  les deux zéros  $t = 0$  et  $t$  infini; par suite le polynome de l'équation de Fermat a nécessairement ses coefficients extrêmes tous deux carrés parfaits comme étant identiques à ceux du polynome du quatrième degré  $(cT)^2$ . Effectivement:

$$(a^2 t^2 - b^2)^2 L^2 = a_0 t^4 + 4a_1 t^3 + 6a_2 t^2 + 4a_3 t + 4a_4 ,$$

avec:

$$\begin{aligned} a_0 &= a^4 c^2 , & a_4 &= b^4 c^2 , \\ 4a_1 &= -a^2(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2) , \\ 4a_3 &= -b^2(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2) , \\ 6a_2 &= (a^2 + b^2)[c^4 + (a^2 - b^2)^2] - 2c^2(a^4 + b^4 - a^2 b^2) . \end{aligned}$$

3. — Quels sont d'autre part les zéros du polynome  $T^2 L^2$  ? La cubique lieu de M est circulaire et l'on obtient des solutions de  $AA' = BB'$  en joignant A et B aux points cycliques du plan du triangle: ce qui correspond à quatre droites particulières D. Comme  $AA'$  et  $BB'$  sont alors des droites isotropes on se trouve précisément en présence des solutions de l'équation  $L = 0$ , c'est-à-dire des quatre zéros du polynome du quatrième degré: Les valeurs de  $\lambda$  et  $\mu$ .

$$\frac{a}{b} \mu = e^{\pm iC} , \quad \frac{b}{a} \lambda = e^{\pm iC} ,$$

donnent

$$\lambda = \frac{a^2 + b^2 - c^2 + 4\varepsilon iS}{2b^2} , \quad \mu = \frac{a^2 + b^2 - c^2 + 4\varepsilon' iS}{2a^2} ,$$

avec  $\varepsilon^2 = \varepsilon'^2 = 1$ . D'où quatre valeurs pour  $t$ , deux par deux conjuguées,

$$t = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2 \pm 4iS}{b^2 + c^2 - a^2 \pm 4iS},$$

correspondant aux quatre combinaisons possibles des signes de  $4iS$ . Il en résulte que le polynome du quatrième degré est nécessairement :

$$\begin{aligned} T^2L^2 &= [a^2t^2 + (a^2 + b^2 - c^2)t + b^2] \cdot \\ &\cdot [a^2c^2t^2 - [(a^2 + b^2)c^2 - (a^2 - b^2)^2]t + b^2c^2], \end{aligned}$$

(à un facteur constant près que l'on détermine par comparaison de terme de plus haut degré et qui se trouve être l'unité positive). Ainsi la considération des droites isotropes issues des sommets A et B conduit directement au résultat, donné plus haut dans la représentation rationnelle des courbes unicursales enveloppe de (D) et lieu du point M.

Dans le cas actuel, les formules plus générales du paragraphe 1 donnent :

$$\begin{aligned} \delta_1 &= -\frac{4S^2}{a^4}, & \delta_2 &= -\frac{4S^2}{a^4c^4}(a^2 - b^2)^2, \\ e &= -\frac{4}{3} \cdot \frac{S^2}{a^4c^4}(a^2 + b^2) < 0; \end{aligned}$$

$\delta_1\delta_2$  est carré, ce qui entraîne  $\Delta =$  carré et l'existence des trois racines rationnelles de la résolvante  $p'u = 0$ ;  $e$  est la plus petite racine. En supposant  $a > b$ , par exemple, les racines sont, dans l'ordre  $e_1 > e_2 > e_3$ :

$$e_1 = \frac{4S^2}{3a^4c^2}(2a^2 - b^2), \quad e_2 = \frac{4S^2}{3a^4c^2}(2b^2 - a^2), \quad e_3 = -\frac{4S^2}{3a^4c^2}(a^2 + b^2),$$

$$e_1 - e_2 = \frac{4S^2(a^2 - b^2)}{a^4c^2}, \quad e_1 - e_3 = \frac{4S^2}{a^2c^2}, \quad e_2 - e_3 = \frac{4S^2b^2}{a^4c^2};$$

$$(e_3 - e_1)(e_3 - e_2) = \left[ \frac{4S^2b}{a^3c^2} \right]^2.$$

Cette dernière expression étant le carré d'une fonction rationnelle des trois côtés, les arguments égaux aux quarts de la période  $2\omega_3$  donnent les valeurs rationnelles à la fonction  $pu$ ; mais des valeurs imaginaires à la fonction  $p'u$ .

Les autres constantes elliptiques sont:

$$g_2 = \frac{64 S^4}{3 a^8 c^4} (a^4 + b^4 - a^2 b^2), \quad g_3 = \frac{256}{27} \frac{S^6}{a^{12} c^6} (a^2 + b^2) (2a^2 - b^2) (2b^2 - a^2),$$

$$p^v = \frac{4 S^2}{3 a^4 c^4} [12 S^2 - (a^2 + b^2) c^2],$$

$$p'^v = \frac{8 S^4}{a^6 c^6} [(a^2 - b^2)^2 - c^4].$$

LES TRIANGLES PSEUDOISOSCÈLES.

4. — Déterminons l'intersection de la cubique lieu de M avec la bissectrice intérieure de l'angle C, dont l'équation est  $\frac{\xi}{a} = \frac{\eta}{b}$ . Nous introduisons l'inconnue auxiliaire  $\psi$  telle que

$$\frac{\xi}{a} = \frac{\eta}{b} = \frac{\zeta}{c\psi};$$

et nous poserons

$$a + b = c \cdot \Sigma, \quad ab = c^2 \cdot \Pi.$$

L'équation des points d'intersection est alors:

$$(a - b) \cdot \{ \Pi (\Sigma^2 + 4\psi\Sigma + 2\psi^2 + 1) + \psi (\Sigma + \psi) (\psi\Sigma + 1) \} = 0.$$

Si le triangle n'est pas isocèle ( $AB \neq AC$ ), cette relation peut être mise sous la forme

$$\Pi = -\psi \cdot \frac{(\Sigma + \psi) (\psi\Sigma + 1)}{\Sigma^2 + 4\psi\Sigma + 2\psi^2 + 1}.$$

Si maintenant on considère  $\psi$  comme un nombre constant, cette équation exprime une condition, symétrique entre  $a$  et  $b$ , à laquelle est soumise le triangle ABC.

Remarquons que si, pour un triangle quelconque, deux points sont pris, l'un A' sur le côté BC, le second B' sur le côté CA, tels que

$$\frac{BA'}{c\psi} = \frac{A'C}{b}, \quad \frac{CB'}{a} = \frac{B'A}{c\psi},$$

le lieu du point M d'intersection des droites AA' et BB', pour les diverses valeurs de  $\psi$ , est la bissectrice intérieure de l'angle



BCA. Les coordonnées trilineaires du point M peuvent être prises égales à  $X = Y = 1, Z = 4$ . Si C' est le pied de la bissectrice intérieure de C et I le centre du cercle inscrit dans le triangle ( $\psi = 1$  donne ce centre I), on a :

$$\frac{MC'}{CC'} = \frac{c\psi}{a+b}, \quad \frac{MI}{CC'} = \frac{(a+b)c}{(a+b+c)(a+b+c\psi)} (\psi - 1) ;$$

Ces diverses relations mettent en évidence que le nombre constant  $\psi$  correspond à des divisions en rapports donnés des côtés CA, CB et de la bissectrice intérieure.

Lorsque  $\psi$  est imposé, le triangle ABC satisfait donc à une condition qui, si l'on pose  $c = 1$ , par exemple, exprime que la somme et le produit des deux autres côtés sont liés par la relation ci-dessus écrite. Celle-ci dégénère en une relation homographique entre le produit  $\Pi$  et la somme  $\Sigma$  dans quatre cas :

1° Pour  $\psi = 1$ . Le point M est au centre I du cercle inscrit. Les droites égales  $AA' = BB'$  sont alors les bissectrices intérieures des angles A et B. La relation homographique est :

$$\Pi = -\frac{\Sigma + 1}{\Sigma + 3} ;$$

elle ne saurait manifestement être vérifiée par un triangle réel. C'est donc le cas des *triangles pseudoisocèles imaginaires avec égalité des bissectrices intérieures*.

2° Pour  $\psi = -1$ . Le point M étant alors le centre du cercle exinscrit, situé dans l'angle C, la relation correspondante représente les *triangles pseudoisocèles avec égalité des bissectrices extérieures* (c'est-à-dire les triangles connus sous la dénomination de *triangles pseudoisocèles*) :

$$\Pi = \frac{\Sigma - 1}{3 - \Sigma} .$$

3° Pour  $\psi = \frac{\sqrt{2}}{2}$  :

$$\Pi = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\Sigma + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\Sigma + \sqrt{2}} ,$$

triangles manifestement imaginaires.

4° Pour  $\psi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  :

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Sigma - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2} - \Sigma} .$$

La formule exprimant la longueur commune des droites égales  $AA' = BB'$ , dans le cas d'intersection sur la bissectrice intérieure de l'angle C et pour  $\psi$  quelconque, étant

$$L^2 = \frac{(\Sigma + \psi)(\psi\Sigma + 1)}{\Sigma + 2\psi} ,$$

devient pour  $\psi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  :

$$L^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left( \Sigma - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) ;$$

aucune valeur positive de  $\Sigma$  ne saurait rendre positifs simultanément  $\Pi$  et  $L^2$ . Le quatrième cas correspond donc encore à des triangles imaginaires.

Analytiquement, sous le point de vue des considérations que j'ai précédemment développées au sujet des relations homographiques entre  $\Pi$  et  $\Sigma$ , les deux premiers cas sont équivalents par simple changement de signe sur  $\Sigma$ . De même les deux derniers cas sont équivalents par changement de signe sur  $\Sigma$ .

Dans le quatrième cas, les fonctions elliptiques ont pour caractéristiques :

$$g_2 = \frac{1}{3} , \quad g_3 = -\frac{19}{3 \cdot 27} , \quad \Delta = -\frac{11}{64} .$$

$$p^v = -\frac{1}{6} , \quad p'^v = -\frac{\sqrt{2}}{4} , \quad p''^v = 0 ,$$

$$p^w = \frac{1}{3} , \quad p'^w = \frac{\sqrt{2}}{4} , \quad p''^w = \frac{1}{2} ;$$

la cubique de Weierstrass admet les arithmopoints

$$p^u = \frac{1}{12} , \quad p'^u = \frac{1}{4} , \quad p''^u = -\frac{1}{8} ,$$

$$p(2u) = -\frac{5}{48} , \quad p'(2u) = -\frac{11}{32} , \quad p''(2u) = -\frac{13}{128} .$$

Cette équation constitue un exemple de détermination rationnelle d'un *cinquième de période*. Les relations

$$p^{\omega} = p^{4\omega} = \frac{1}{3}, \quad p^{2\omega} = p^{3\omega} = -\frac{1}{6},$$

$$p'^{\omega} = p'^{2\omega} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad p'^{3\omega} = p'^{4\omega} = -\frac{\sqrt{2}}{4},$$

montrent que l'argument  $5\omega$  est une période.

5. — La relation du second cas

$$\Pi = \frac{\Sigma - 1}{3 - \Sigma},$$

définit les triangles nommés *pseudoisoscèles*. Il existe une infinité de tels triangles, abstraction faite de la similitude, et qui correspondent aux valeurs de  $\Sigma$  comprises dans l'intervalle  $1 < \Sigma < 2$ .

Puisque l'occasion s'en offre, voici quelques renseignements bibliographiques au sujet de cette classe de triangles spéciaux.

Alors que diverses questions concernant les médianes ou les hauteurs sont accessibles dès le début de l'étude de la géométrie, il en est autrement quand il s'agit des questions analogues concernant les bissectrices des triangles.

L'exemple classique de ce genre de difficultés est la démonstration *géométrique* de la réciproque de l'égalité des bissectrices d'un triangle isocèle. Les triangles isocèles sont les seuls triangles *réels* dont deux bissectrices *intérieures* sont égales<sup>1</sup>. La difficulté de la démonstration géométrique découle de ce fait qu'analytiquement la condition d'égalité de ces lignes se présente sous la forme  $(a - b) \cdot f(a, b) = 0$ , avec un facteur  $f(a, b)$  nécessairement positif, mais qui correspond aux triangles pseudoisoscèles imaginaires du premier cas.

<sup>1</sup> Pour une solution de cette question, voir les *Nouvelles Annales de Mathématiques* de 1842, p. 87, une note de TERQUEM.

Voir aussi: J. STEINER: Elementare Lösung einer Aufgabe über das ebene und das sphärische Dreieck. (Crelle's Journal, XXVIII, S. 375-379; Werke, II, S. 323-325).

Une seconde question intéressante mais ardue est la construction d'un triangle connaissant les longueurs de trois des bissectrices ou encore un angle et deux bissectrices.

Contrairement à ce qui se produit avec d'autres lignes remarquables du triangle, pour lesquelles la géométrie élémentaire fournit des solutions immédiates, il en est tout autrement pour le cas de la détermination d'un triangle connaissant des longueurs de trois bissectrices. Ce problème n'est plus du ressort de la géométrie pure, sa résolution dépend en effet d'équations de degré élevé, atteignant par exemple le seizième degré avec trois bissectrices quelconques, ou le 14<sup>me</sup> avec trois bissectrices intérieures <sup>1</sup>.

6. — L'équation de FERMAT, dont dépendrait la détermination de tous les triangles pseudoisoscèles à côtés rationnels, est

$$(\Sigma - 2)(\Sigma - 3)(\Sigma^2 - \Sigma + 2) = \square .$$

elle n'admet aucune solution rationnelle, en dehors des racines 2 et 3 du polynome du premier membre. Il suffit d'étudier les facteurs premiers communs des trois nombres

$$x - 2y , \quad x - 3y , \quad x^2 - 2xy + 2y^2 ,$$

en supposant que  $x$  et  $y$  sont les termes d'une fraction irréductible représentant  $\Sigma$ , pour arriver à cette conclusion négative.

*Il n'y a donc pas de triangle à côtés tous les trois rationnels parmi les triangles pseudoisoscèles.*

---

<sup>1</sup> Cette question a été l'objet d'une étude étendue par M. BAKER (Richard-Philipp) *The problem of the angle bisectors* (The University of Chicago Press), dissertation de l'Université de Chicago, 1911.

L'auteur cite P. BARBARIN: Construire un triangle dont les bissectrices sont données (*Mathesis*, 1896, p. 143-160); Résumé d'un mémoire sur la détermination d'un triangle au moyen des longueurs de bissectrices (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1894, t. XXII, p. 76-80). On peut en outre citer J. DELITALA, Construire un triangle connaissant une bissectrice de chaque angle (*Mathesis*, 1902, p. 159-162) et une note de TERQUEM dans les *Nouvelles Annales de mathématiques*, 1842, p. 87.

Les fonctions elliptiques associées à cette équation des triangles pseudoisosèles ont pour caractéristiques :

$$g_2 = \frac{25}{12}, \quad g_3 = -\frac{11 \cdot 23}{8 \cdot 27}, \quad \Delta = -28 ;$$

$$e_1 = -\frac{11}{12},$$

$$p'^2 u = 4 \left( p^u + \frac{11}{12} \right) \left( p^2 u - \frac{11}{12} p^u + \frac{23}{27} \right) ;$$

$$p^{\omega} = \frac{13}{12}, \quad p'^{\omega} = 2, \quad p''^{\omega} = 6,$$

$$p^{\nu} = \frac{1}{12}, \quad p'^{\nu} = -1, \quad p''^{\nu} = -1,$$

$$p^{3\omega} = -\frac{11}{12}, \quad p'^{3\omega} = 0,$$

$$p^{4\omega} = \frac{1}{12}, \quad p'^{4\omega} = -1,$$

$$p^{5\omega} = \frac{13}{12}, \dots$$

l'argument  $\omega$  est sixième de période; les seuls arithmopoints connus sont les points réels d'inflexion, un sommet et les points qui en dérivent par alignements; au total, cinq arithmopoints seulement.

#### UNE SECONDE CUBIQUE LIÉE AUX TRIANGLES PSEUDOISOSCÈLES.

7. — Soient  $(x, y, z)$  les coordonnées barycentriques d'un point M du plan du triangle de référence ABC. L'aire du triangle ABC étant S,

$$x + y + z = 2S,$$

celle S' du triangle A'B'C' dont les sommets sont les points A', B', C' où les droites AM, BM, CM rencontrent respectivement les côtés BC, CA, AB du triangle est déterminée par la formule:

$$(x + y + z) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \frac{2S + S'}{S'}.$$

Le lieu des points M du plan du triangle, tels que l'aire de A' B' C' reste constante est donc une cubique dont l'équation peut être mise sous l'une des formes suivantes :

$$(x + y + z) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = m ,$$

$$(x + y)(y + z)(z + x) = 2n \cdot xyz ,$$

avec  $m = \frac{2S}{S'} + 1$ ,  $n = \frac{S}{S'}$ ,  $m = 2n + 1$ . Dans les calculs qui suivent, est introduit un autre paramètre  $s$  tel que  $s = m + 1$ .

La cubique passe par les sommets A, B, C du triangle et y admet pour tangentes les parallèles aux côtés opposés.

Les trois points à l'infini sont inflexionnels. Les asymptotes, parallèles aux côtés, forment un triangle dont les sommets sont situés sur les médianes respectives de ABC. L'asymptote parallèle à BC a pour équation:  $x + y + z = mx$ .

La question est projective. Il suffit donc de construire les cubiques correspondant aux diverses valeurs du paramètre  $m$ , pour le triangle équilatéral.

La cubique est invariante dans la transformation quadratique ayant pour points fondamentaux le centre de gravité G et les trois points à l'infini dans la direction des côtés.

8. — La représentation elliptique de la cubique

$$(x + y + z)(xy + yz + zx) = mxyz , \quad m = s - 1 ,$$

s'effectue en observant que les nombres

$$X = \frac{x + z}{z} , \quad Y = \frac{y + z}{z}$$

ont un produit  $\Pi$  et une somme  $\Sigma$  reliés par la formule homographique

$$\Pi = (2 - s) \frac{\Sigma - 1}{\Sigma - s} .$$

Comme

$$\Sigma^2 - 4\Pi = D = (\Sigma - s) \cdot (\Sigma - 2) \cdot (\Sigma^2 - 2n\Sigma + 4n) , \quad m = 2n + 1 ,$$

l'équation  $D = 0$ , du quatrième degré, admet les zéros rationnels 2 et  $s$  et par suite la résolvante cubique admet une racine rationnelle. Les constantes elliptiques sont:

$$g_2 = \frac{4}{3}(n^4 - 4n^3 + 2n + 1) ,$$

$$g_3 = \frac{4}{9}e_1(-2n^4 + 8n^3 + 2n + 1) ,$$

$$\Delta = m^2(m-1)^3(m-9) ,$$

$$e_1 = \frac{m^2 - 6m - 3}{12} = \frac{n^2 - 2n - 2}{3} ,$$

$$(e_1 - e_2)(e_1 - e_3) = m .$$

$$p^v = \frac{(n-1)^2}{3} , \quad p'^v = -2n , \quad p''^v = 4n(n-1) ,$$

$$p^\omega = \frac{n^2 + 4n + 1}{3} , \quad p'^\omega = 2mn = m(m-1) ,$$

$$p''^\omega = 2mns = 4n(n+1)(2n+1) ,$$

$$p^v - e_1 = 1 , \quad p^\omega - e_1 = m .$$

$$v + 2\omega = 0 , \quad 3\omega = \omega_1 .$$

Ces formules ne font connaître en tout que cinq arithmopoints de la cubique de Weierstrass: le sommet  $e_1$ , deux inflexions  $\pm v$ , et les deux points  $\pm \omega$  qui se déduisent des points d'inflexion et du sommet par alignements. Elles correspondent au cas singulier où, l'argument  $\omega$  étant sixième de période, les formules d'addition et de multiplication appliquées à ces arguments  $\omega_1, \omega, v$  de toutes manières possibles ne donnent qu'un nombre limité de solutions rationnelles.

Les racines  $e_2$  et  $e_3$  ne sont rationnelles que pour les valeurs de  $n$  rendant carré le produit  $n(n-4)$ , c'est-à-dire lorsque  $n$  est de la forme

$$n = \frac{(t+1)^2}{t} , \quad m = \frac{2t^2 + 5t + 2}{t}$$

en fonction d'un nombre rationnel quelconque. Les six points d'intersection, autres que les sommets, de la courbe avec les

médianes sont alors des arithmopoints; par exemple, sur la médiane AG.

$$\begin{aligned} x &= t, & y &= 1, & z &= 1, \\ x &= 1, & y &= t, & z &= t. \end{aligned}$$

Les racines sont alors

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{t^4 + 2t^3 + 2t + 1}{3t^2}, & e_2 &= \frac{t^4 + 2t^3 - 4t - 2}{3t^2}, & e_3 &= \frac{-2t^4 - 4t^3 + 2t + 1}{3t^2} \\ e_1 - e_2 &= \frac{2t + 1}{t^2}, & e_2 - e_3 &= \frac{(t - 1) \cdot (t + 1)^2}{t^2}, & e_1 - e_3 &= t(t + 2), \end{aligned}$$

leur ordre dépendant de  $t$ .

D'autre part, lorsque  $n$  est de la forme

$$n = \frac{t^2 + 2t + 2}{t}, \quad m = \frac{2t^2 + 5t + 4}{t},$$

la courbe admet deux arithmopoints sur la parallèle  $y + z = \lambda x$  au côté BC, par exemple le point:

$$x = t + 2, \quad y = t(t + 1), \quad z = t$$

et par conséquent dans ce cas six arithmopoints sont connus. Les valeurs entières de  $m$  correspondant à ce cas sont  $m = -1, -4, 11$  et  $14$ .

Lorsque  $m$  est carré,  $m = q^2$ ,  $p$  prend des valeurs rationnelles pour des valeurs de l'argument égales aux quarts de la période  $2\omega_1$ ; mais  $p'u$  prend des valeurs généralement irrationnelles dépendant de la racine carrée de  $(q - 1)(q + 3)$ . Pour que deux de ces quarts de période correspondent à des arithmopoints de la cubique, il faut prendre:

$$m = q^2, \quad \text{avec} \quad q = \frac{t^2 - t + 1}{t},$$

$$n = \frac{t^2 + 1}{2t^2} (t - 1)^2,$$

$$p \frac{\omega_1}{2} = e_1 + q, \quad p' \frac{\omega_1}{2} = \pm \frac{t^2 - t + 1}{t^3} (t + 1)(t - 1)^3,$$

$$p^v = \frac{(t^4 - 2t^3 - 2t + 1)^2}{12t^4}, \quad p'^v = -\frac{t^2 + 1}{t^2} (t - 1)^2.$$



Il en résulte que la cubique admet l'arithmopoint

$$x = t^2, \quad y = -t, \quad z = 1,$$

situé sur la conique  $y^2 = xz$ , et les arithmopoints qui en dérivent par des permutations entre  $x$ ,  $y$  et  $z$ .

9. — *Cas particuliers.* — *Cas*  $m = 9$ . La cubique est alors unicursale, avec le centre de gravité pour point double isolé. Les tangentes au point G ont pour équations respectives

$$jx + j^2y + z = 0, \quad j^2x + jy + z = 0, \quad j^3 = 1.$$

( $j$  racine imaginaire de l'unité).

Si l'on représente par

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0, \quad \lambda + \mu + \nu = 0,$$

une droite GM quelconque passant par G, les coordonnées courantes de M peuvent être prises égales (à un facteur d'homogénéité près) à :

$$x = \mu\nu(\nu - \mu), \quad y = \nu\lambda(\lambda - \nu), \quad z = \lambda\mu(\mu - \lambda).$$

Le point M peut être considéré comme l'intersection de GM avec la droite  $\lambda^2x + \mu^2y + \nu^2z = 0$ , tangente variable de la conique inscrite au triangle d'équation tangentielle :

$$\sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w} = 0.$$

*Cas*  $m = 0$ . Décomposition de la cubique en la droite de l'infini et une conique circonscrite au triangle.

*Cas*  $m = 1$ . Décomposition de la cubique en le système des trois parallèles aux côtés menées par les sommets.

*Cas*  $m = 2$ . Les fonctions elliptiques sont alors celles du problème des *triangles pseudoisosèles* de Steiner.

En attribuant donc cette valeur particulière,  $m = 2$ , au paramètre  $m$  dans les formules générales du paragraphe 8, on retrouve celles qui ont été données au paragraphe 6 pour les constantes elliptiques du problème des triangles pseudoisosèles.