Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 27 (1928)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EQUIVALENCES DE FORMES ET D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES PAR LES TRANSFORMATIONS A VARIABLES SÉPARÉES

Autor: Delens, P. C.

Kapitel: Conservation d'une équation quadratique.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21879

équations $\varpi_1 = 0$, $\varpi_2 = 0$, donc on trouverait en outre $2(n+1)$ invariants mixtes pour ces deux équations. Et pour l'ordre $n > 2$, $2(n-1)$ invariants étant fournis séparément par les équations $\varpi_1 = 0$, $\varpi_2 = 0$, on doit trouver deux nouveaux invariants. En fait, les choses ne se passent pas aussi régulièrement dès le début.

Il est préférable de traiter plus symétriquement le système (61), ce qui permet en particulier d'obtenir des formes normées plus simples pour les expressions de Pfaff; mais nous ne traiterons pas directement ce système, devant retrouver un système analogue dans le problème suivant, relatif à la conservation d'une équation quadratique.

Conservation d'une équation quadratique.

26. — Soit l'équation quadratique

$$\chi \equiv L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0 \tag{62}$$

qui sera conservée moyennant les conditions

$$\frac{\delta L - 2L\xi'}{L} = \frac{\delta M - M(\xi' + \eta')}{M} = \frac{\delta N - 2N\eta'}{N} \tag{63}$$

Dans le cas général $L \neq 0$, $M \neq 0$, $N \neq 0$, on pose

$$L = e^{2l} \qquad M = e^{m} \qquad N = e^{2n}$$

Comme nous venons de l'indiquer au cas précédent, $n(n+1)$ invariants distincts sont à prévoir jusqu'à l'ordre n, et $2n$ nouveaux pour cet ordre. Mais en posant

$$\mu = e^{2(m-l-n)} = \frac{M^2}{LN} \tag{64}$$

$$P = \frac{L}{N} = e^{2p} \qquad p = l - n$$

on voit aussitôt que μ *est un invariant d'ordre zéro;* en effet, tout invariant de la forme χ, qui ne dépend que du rapport des coefficients de cette forme, est aussi invariant de l'équation $\chi = 0$. Les équations à écrire sont

$$\delta\mu = 0 \qquad \delta p = \xi' - \eta' \tag*{[V, 0]}$$

$$\left\{\begin{aligned} \delta p_{10} &= p_{10}\xi' + \xi'' & \delta p_{01} &= p_{01}\eta' - \eta'' \\ \delta \mu_{10} &= \mu_{10}\xi' & \delta \mu_{01} &= \mu_{01}\eta' \end{aligned}\right. \tag*{[V, 1]}$$

En écartant le cas des équations invariantes $\mu_{10} = 0$, $\mu_{01} = 0$, on trouve pour le premier ordre un seul nouvel invariant

$$\tau = \frac{\mu_{10}}{\mu_{01}} e^{-p} \tag{65}$$

(ce qui donne bien 2 invariants jusqu'au 1er ordre inclus); du reste $\tau = \frac{\rho}{\sigma}$. ρ et σ étant deux invariants du 1er ordre de la forme χ (n° 16). On peut ensuite substituer à la seconde équation [V, 0]

$$\delta\tau = 0 \qquad [\text{V}, 0']$$

et en posant

$$\mu_{10} = e^{x} \qquad \mu_{01} = e^{y} \tag{66}$$

on peut écrire les deux dernières équations [V, 1] sous la forme

$$\delta x = \xi' \qquad \delta y = \eta' \qquad [\text{V}, 1']$$

Dans les équations dérivées, on pourra encore substituer celles en $\delta\tau_{10}$ et $\delta\tau_{01}$ à celles en δx_{10} et δy_{01}, de sorte que nous écrirons

$$\left\{\begin{array}{ll} \delta p_{20} = 2p_{20}\xi' + p_{10}\xi'' + \xi''' & \delta p_{02} = 2p_{02}\eta' + p_{01}\eta'' - \eta''' \\ \multicolumn{2}{c}{\delta p_{11} = p_{11}(\xi' + \eta')} \\ \delta\tau_{10} = \tau_{10}\xi' & \delta\tau_{01} = \tau_{01}\eta' \\ \delta y_{10} = y_{10}\xi' & \delta x_{01} = x_{01}\eta' \end{array}\right. \qquad [\text{V}, 2]$$

soit 7 équations au lieu de 6, les deux dernières n'étant pas indépendantes, à cause de la relation

$$\mu_{11} = x_{01} e^{x} = y_{10} e^{y} \tag{67}$$

On obtiendra donc les 4 invariants distincts du 3me ordre[1]

$$\varepsilon = \mu_{11} e^{-x-y} \qquad \zeta = p_{11} e^{-x-y} \qquad \theta = \tau_{10} e^{-x} \qquad \varphi = \tau_{01} e^{-y} \tag{68}$$

Les paramètres différentiels d'une fonction f

$$\vartheta_u f = f_{10} e^{-x} \qquad \vartheta_v f = f_{01} e^{-y} \tag{69}$$

---

[1] Les lettres ε, ζ, θ, φ sont ici employées pour représenter des invariants différents de ceux précédemment désignés par les mêmes symboles.

donnent lieu aux relations

$$\left\{\begin{array}{ll} \vartheta_u \vartheta_v f = f_{11} e^{-x-y} - \varepsilon \vartheta_v f & \vartheta_v \vartheta_u f = f_{11} e^{-x-y} - \varepsilon \vartheta_u f \\ (\vartheta_u \vartheta_v) f = \varepsilon (\vartheta_u f - \vartheta_v f) & \vartheta_{uv} f = f_{11} e^{-x-y} \end{array}\right. \tag{70}$$

et permettent de former tous les invariants suivants à partir des invariants essentiels μ, τ, ε, ζ. Dans le cas général, $\theta \neq \varphi$, les invariants μ, τ, θ, φ sont suffisants; en effet les conditions

$$\delta \mu = \delta \tau = \delta \theta = \delta \varphi = 0$$

permettent alors, en tenant compte des relations

$$\mu_{10} e^{-x} = \mu_{01} e^{-y} = 1 \tag{66'}$$

d'où

$$\delta(\mu_{10} e^{-x}) = \delta(\mu_{01} e^{-y}) = 0$$

de retrouver $\xi_{01} = \eta_{10} = 0$ et les équations [V, 0].

27. — *Cas particuliers.* — Si deux des quantités L, M, N sont nulles, les équations réductibles aux formes $du^2 = 0$, $du dv = 0$, $dv^2 = 0$, n'ont pas d'invariants.

Si L ou N est nul, l'équation a une forme $\varpi dv = 0$ ou $\varpi du = 0$; l'on est par suite ramené au cas de l'équation $\varpi = 0$.

Si M $= 0$, la conservation de l'équation quadratique se traite exactement comme celle d'une équation de Pfaff; on part en effet de la seule relation

$$\delta p = \xi' - \eta'$$

analogue à [IV, 0] du nº 18. L'équation a ici une forme $\varpi_1 \varpi_2 = 0$, où les formes de Pfaff ϖ_1 et ϖ_2 ne diffèrent que par le signe du coefficient C (c'est-à-dire $C_1 + C_2 = 0$). De même, dans le cas $\mu_{10} = \mu_{01} = 0$, donc μ constant, tous les invariants, en dehors de μ, sont formés comme dans le cas précédent $\mu = 0$, c'est-à-dire comme pour une équation de Pfaff.

Nous ne traiterons pas le cas où une seule des quantités μ_{10} et μ_{01} serait nulle, ni les autres cas particuliers qui se présentent ensuite.

28. — *Formes normées et normales.* — On peut évidemment, pour conserver l'équation $\chi = 0$, ramener le problème à celui

de la conservation d'une forme quadratique normée par un facteur convenable; en considérant deux formes équivalentes, les relations

$$\frac{\overline{L}U'^2}{L} = \frac{\overline{M}U'V'}{M} = \frac{\overline{N}V'^2}{N} = \frac{\overline{\chi}}{\chi} \tag{71}$$

montrent qu'on obtiendra des facteurs normants en utilisant des invariants relatifs (Σ), (Σ_1) ou (Σ_2) de l'équation $\chi = 0$; les formes normées seront toujours caractérisées par certaines relations entre leurs invariants.

Considérons en particulier la forme que nous appellerons *normale* (dans le cas général)

$$\chi^* \equiv Q\chi \equiv L^* du^2 + 2M^* du\, dv + N^* dv^2 \tag{72}$$

(les quantités se rapportant à cette forme étant marquées d'un astérisque), avec le facteur normant du premier ordre

$$Q = \frac{\mu_{10}\mu_{01}}{\sqrt{LN}} = \frac{e^{x+y}}{\sqrt{LN}} = \rho\sigma \tag{73}$$

donnant

$$L^* = e^{x+y+p} = e^{2x-\log\tau}, \quad N^* = e^{x+y-p} = e^{2y+\log\tau}, \quad M^* = \sqrt{\mu L^* N^*} \tag{74}$$

et calculons les premiers invariants de la forme χ^* en fonction de ceux de l'équation $\chi = 0$

$$\mu^* = \mu, \ \lambda^* = \varepsilon\sqrt{\tau} + \frac{\theta}{2\sqrt{\tau}}, \ \nu^* = \frac{1}{\tau}\left(\varepsilon\sqrt{\tau} - \frac{\varphi}{2\sqrt{\tau}}\right), \ \rho^* = \sqrt{\tau}, \ \sigma^* = \frac{1}{\sqrt{\tau}}. \tag{75}$$

On voit que $\rho^* \sigma^* = 1$; par suite une forme quadratique normale est caractérisée par la relation

$$\rho\sigma = 1 \tag{76}$$

entre deux de ses invariants du premier ordre; cette relation entraîne en effet

$$\mu_{10}\mu_{01} = e^{l+n} \qquad \text{ou} \qquad e^{x+y} = e^{l+n}$$

par suite

$$L^* = L \qquad M^* = M \qquad N^* = N \qquad Q = 1$$

Si l'on se reporte aux décompositions d'une forme χ indiquées au n° 17, soit

$$\chi \equiv \varpi_1\varpi_2 \equiv \varpi^2 + \chi_0 \qquad \chi_0 \equiv 2M_0\, du\, dv \tag{33}$$

on voit que l'on a ici

$$\chi^* \equiv {}^*\varpi^2 + \chi_0^* \qquad {}^*\varpi \equiv \sqrt{Q}\,\varpi$$

et la forme $^*\varpi$ n'est pas normale au sens du n° 22, ni même normée intrinsèquement, mais seulement par rapport à la forme χ; on devrait naturellement employer un autre facteur normant pour χ dans le cas μ = constante.

Equation de Pfaff et forme quadratique particulière. Conclusion.

29. — Envisageons enfin le problème de la conservation simultanée de l'équation

$$\varpi \equiv \mathrm{A}\,du + \mathrm{B}\,dv = 0 \qquad \mathrm{C} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = e^c \tag{34}$$

et de la forme quadratique

$$\chi_0 \equiv 2\mathrm{M}_0\,du\,dv \qquad \mathrm{M}_0 = e^{m_0} \tag{77}$$

On obtient les conditions

$$\delta c = \xi' - \eta' \qquad \delta m_0 = \xi' + \eta' \qquad [\mathrm{VI}, 0]$$

ou, en posant

$$m_0 + c = 2z \qquad m_0 - c = 2w$$

$$\delta z = \xi' \qquad \delta w = \eta' \qquad [\mathrm{VI}, 0']$$

conditions analogues à celles obtenues pour la conservation de la forme

$$\bar{\varpi} \equiv \bar{\mathrm{A}}\,du + \bar{\mathrm{B}}\,dv \qquad \bar{\mathrm{A}} = \sqrt{\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\mathrm{M}_0} \qquad \bar{\mathrm{B}} = \sqrt{\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\mathrm{M}_0} \tag{78}$$

On utilise donc ici un facteur normant d'ordre zéro

$$\mathrm{H} = \sqrt{\frac{\mathrm{M}_0}{\mathrm{AB}}} \tag{79}$$

et l'on peut aussi rattacher aux formes $\bar{\varpi}$ et χ_0 la forme quadratique

$$\bar{\chi} \equiv \bar{\varpi}^2 - \chi_0$$

dont l'invariant $\bar{\mu}$ d'ordre zéro est nul.