# cas B = 0 et les triangles héroniens.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1927)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.04.2024**

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

## Le cas B = 0 et les triangles héroniens.

21. — Pour B = 0, c'est-à-dire pour la relation

$$\frac{A}{P} + \frac{s}{S} = 1 ,$$

l'équation D = 0 est satisfaite pour S = 0 et P = 0. Par suite, quels que soient A et $s$, l'équation cubique a la racine rationnelle

$$e_1 = \wp\omega_1 = \wp\nu = \frac{s^2 + 8A}{12} , \qquad \nu = \omega_1 + \text{période} .$$

Il en résulte les formules suivantes:

$$g_2 = 4(3e_1^2 - A^2) ,$$
$$g_3 = 4e_1(A^2 - 2e_1^2) ,$$
$$\Delta = 16A^4(ge_1^2 - 4A^2) ;$$

$$\wp'^2 u = 4(\wp u - e_1) \cdot [\wp^2 u + e_1 \wp u + A^2 - 2e_1^2] ;$$

$$(e_2 - e_3)^2 = 9e_1^2 - 4A^2 = \frac{s^2}{16}(s^2 + 16A) .$$

Lorsque $s^2 + 16A$ est positif, les trois racines existent et $e_1$ est la plus grande des racines:

$$e_1 > e_2 > e_3$$
$$(e_1 - e_2)(e_1 - e_3) = A^2 ;$$

cette dernière expression se présentant comme un carré parfait, les valeurs de $\wp u$, pour $\frac{\omega_1}{2}$ et $\frac{\omega_1}{2}$ + une demi-période, sont rationnelles. On obtient ainsi:

$$\wp\psi_1 = \frac{s^2 - 4A}{12} , \qquad \wp'\psi_1 = \pm As , \qquad \wp''\psi_1 = -As^2 ,$$

$$\wp\psi_2 = \frac{s^2 + 20A}{12} , \qquad \wp'\psi_2 = \pm A\sqrt{s^2 + 16A} , \qquad \wp''\psi_2 = A(s^2 + 16A) ;$$

$2\psi_1$ et $2\psi_2$ étant égaux à $\omega_1$ (à une demi-période près); au signe près $\psi_1$ est d'ailleurs égal à $\frac{\nu}{2} + \omega'$.

22. — Les trois racines sont rationnelles, lorsque $s^2 + 16A$ est un carré; alors $\psi_2$ est l'argument d'un arithmopoint de la cubique.

Soit, dans ce cas, $A = \frac{\lambda^2 - s^2}{16}$, $B = 0$. En fonction des paramètres rationnels $s$ et $\lambda$, il vient:

$$3.64.g_2 = \lambda^4 + \lambda^2 s^2 + s^4 ,$$
$$27.2^9.g_3 = (\lambda^2 + s^2)(\lambda^4 - 34\lambda^2 s^2 + s^4) ,$$
$$2^{16}\Delta = \lambda^2 s^2 (\lambda^2 - s^2)^2 .$$

$$24e_1 = \lambda^2 + s^2 > 0 ,$$
$$48e_2 = -(\lambda^2 - 6\lambda s + s^2) < 0 ,$$
$$48e_3 = -(\lambda^2 + 6\lambda s + s^2) < 0 .$$

$$e_1 - e_2 = \frac{1}{16}(\lambda - s)^2 , \qquad e_1 - e_3 = \frac{1}{16}(\lambda + s)^2 , \qquad e_2 - e_3 = \frac{1}{4}\lambda s ;$$

on peut toujours supposer $\lambda$ positif, ce qui assure l'ordre des racines $e_1 > e_2 > e_3$.

En posant $s = 2(b + c)$, $\lambda = 2(c - b)$, $c > b$, ces formules rentrent comme cas particulier dans celles qui ont été données plus haut (paragraphe 17); $a$ est ici égal à zéro:

$$A = -bc , \qquad B = 0 , \qquad s = 2(b + c) ,$$
$$g_2 = \frac{4}{3}(b^4 - b^2c^2 + c^4) , \qquad g_3 = \frac{4}{27}(b^2 + c^2)(b^2 - 2c^2)(c^2 - 2b^2) ,$$
$$\Delta = 16b^4c^4(b^2 - c^2)^2 ,$$
$$e_1 = \frac{b^2 + c^2}{3} , \qquad e_2 = \frac{c^2 - 2b^2}{3} , \qquad e_3 = \frac{b^2 - 2c^2}{3} ,$$
$$e_1 - e_2 = b^2 , \qquad e_1 - e_3 = c^2 , \qquad e_2 - e_3 = c^2 - b^2 .$$
$$\nu = \omega_1 , \qquad \wp\nu = e_1 , \qquad \wp'\nu = 0 , \qquad \wp''\nu = 2b^2c^2 ,$$
$$\alpha = \frac{\nu}{2} , \qquad \wp\frac{\nu}{2} = \frac{b^2 + 3bc + c^2}{3} , \qquad \wp'\frac{\nu}{2} = -2bc(b + c) ,$$
$$\wp\beta = \frac{b^2 - 3bc + c^2}{3} , \qquad \wp'\beta = 2bc(c - b) ,$$
$$\gamma = -\beta ;$$

aux arguments $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ correspondent les racines $S = 0, 2b$ et $2c$ de l'équation $D = 0$; à $u = \omega_1$ correspond une valeur infinie de S. A $u = \omega_2$ et $\omega_3$ correspond: $S = b + c$, $P = bc$, $X' = b$, $X'' = c$.

Le cas de $B = 0$, avec $s = 2$ et A carré, présente cette particularité intéressante de représenter la solution du problème suivant : *détermination de tous les triangles héroniens ayant un côté donné et une aire imposée.* J'étudierai la question prochainement.

## Cas élémentaire de dégénérescence des fonctions elliptiques.

23. — L'expression du discriminant $\Delta$ des fonctions elliptiques, abstraction faite du facteur double $As + B$, qui ne saurait être nul sans dégénérescence de l'homographie, se présente sous forme d'un polynome du second degré seulement par rapport au paramètre B. Les deux autres paramètres A et $s$ étant supposés donnés, rationnels et quelconques, l'équation $\Delta = 0$ n'a des racines rationnelles en B que si $s^2 + 12\,A$ est un carré. En introduisant un nouveau paramètre rationnel et arbitraire, $\omega$, cette dernière condition est satisfaite de la manière la plus générale en prenant :

$$A = \frac{\omega^2 - s^2}{12} ;$$

d'où l'expression correspondante du discriminant :

$$\Delta = -27(As + B)^2(B - B_1)(B - B_2) ,$$

avec :

$$4.27B_1 = s^3 - 3\omega^2 s - 2\omega^3 = (s + \omega)^2.(s - 2\omega) ,$$

$$4.27B_2 = s^3 - 3\omega^2 s + 2\omega^3 = (s - \omega)^2.(s + 2\omega) ;$$

$$27(B_2 - B_1) = \omega^3 .$$

Le changement de signe sur $\omega$ produit l'échange des valeurs de $B_1$ et $B_2$; en supposant que $\omega$ peut prendre toutes les valeurs rationnelles et algébriques, le discriminant $\Delta$ s'annule donc lorsque les coefficients A et B sont de la forme générale suivante :

$$A = \frac{\omega^2 - s^2}{12} , \qquad B = \frac{1}{108}(s - \omega)^2.(s + 2\omega) ,$$