

Zeitschrift:	L'Enseignement Mathématique
Herausgeber:	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band:	26 (1927)
Heft:	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
Artikel:	FORMULES ELLIPTIQUES POUR LA RÉSOLUTION DE CERTAINES ÉQUATIONS DE FERMAT
Autor:	Turrière, Emile
Kapitel:	cas B = 0 et les triangles héroniens.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-21256

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 19.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

LE CAS $B = 0$ ET LES TRIANGLES HÉRONIENS.

24. — Pour $B = 0$, c'est-à-dire pour la relation

$$\frac{A}{P} + \frac{s}{S} = 1 ,$$

l'équation $D = 0$ est satisfaite pour $S = 0$ et $P = 0$. Par suite, quels que soient A et s , l'équation cubique a la racine rationnelle

$$e_1 = p\omega_1 = p^v = \frac{s^2 + 8A}{12} , \quad v = \omega_1 + \text{période} .$$

Il en résulte les formules suivantes :

$$\begin{aligned} g_2 &= 4(3e_1^2 - A^2) , \\ g_3 &= 4e_1(A^2 - 2e_1^2) , \\ \Delta &= 16A^4(ge_1^2 - 4A^2) ; \\ p'^2u &= 4(pu - e_1) \cdot [p^2u + e_1pu + A^2 - 2e_1^2] ; \\ (e_2 - e_3)^2 &= 9e_1^2 - 4A^2 = \frac{s^2}{16}(s^2 + 16A) . \end{aligned}$$

Lorsque $s^2 + 16A$ est positif, les trois racines existent et e_1 est la plus grande des racines :

$$\begin{aligned} e_1 &> e_2 > e_3 \\ (e_1 - e_2)(e_1 - e_3) &= A^2 ; \end{aligned}$$

cette dernière expression se présentant comme un carré parfait, les valeurs de pu , pour $\frac{\omega_1}{2}$ et $\frac{\omega_1}{2} + \text{une demi-période}$, sont rationnelles. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} p\psi_1 &= \frac{s^2 - 4A}{12} , \quad p'\psi_1 = \pm As , \quad p''\psi_1 = -As^2 , \\ p\psi_2 &= \frac{s^2 + 20A}{12} , \quad p'\psi_2 = \pm A\sqrt{s^2 + 16A} , \quad p''\psi_2 = A(s^2 + 16A) ; \end{aligned}$$

$2\psi_1$ et $2\psi_2$ étant égaux à ω_1 (à une demi-période près); au signe près ψ_1 est d'ailleurs égal à $\frac{v}{2} + \omega'$.

22. — Les trois racines sont rationnelles, lorsque $s^2 + 16A$ est un carré; alors ψ_2 est l'argument d'un arithmopoint de la cubique.

Soit, dans ce cas, $A = \frac{\lambda^2 - s^2}{16}$, $B = 0$. En fonction des paramètres rationnels s et λ , il vient:

$$3.64.g_2 = \lambda^4 + \lambda^2s^2 + s^4,$$

$$27.2^9.g_3 = (\lambda^2 + s^2)(\lambda^4 - 34\lambda^2s^2 + s^4),$$

$$2^{16}\Delta = \lambda^2s^2(\lambda^2 - s^2)^2.$$

$$24e_1 = \lambda^2 + s^2 > 0,$$

$$48e_2 = -(\lambda^2 - 6\lambda s + s^2) < 0,$$

$$48e_3 = -(\lambda^2 + 6\lambda s + s^2) < 0.$$

$$e_1 - e_2 = \frac{1}{16}(\lambda - s)^2, \quad e_1 - e_3 = \frac{1}{16}(\lambda + s)^2, \quad e_2 - e_3 = \frac{1}{4}\lambda s;$$

on peut toujours supposer λ positif, ce qui assure l'ordre des racines $e_1 > e_2 > e_3$.

En posant $s = 2(b + c)$, $\lambda = 2(c - b)$, $c > b$, ces formules rentrent comme cas particulier dans celles qui ont été données plus haut (paragraphe 17); a est ici égal à zéro:

$$A = -bc, \quad B = 0, \quad s = 2(b + c),$$

$$g_2 = \frac{4}{3}(b^4 - b^2c^2 + c^4), \quad g_3 = \frac{4}{27}(b^2 + c^2)(b^2 - 2c^2)(c^2 - 2b^2),$$

$$\Delta = 16b^4c^4(b^2 - c^2)^2,$$

$$e_1 = \frac{b^2 + c^2}{3}, \quad e_2 = \frac{c^2 - 2b^2}{3}, \quad e_3 = \frac{b^2 - 2c^2}{3},$$

$$e_1 - e_2 = b^2, \quad e_1 - e_3 = c^2, \quad e_2 - e_3 = c^2 - b^2.$$

$$\nu = \omega_1, \quad p^\nu = e_1, \quad p'\nu = 0, \quad p''\nu = 2b^2c^2,$$

$$\alpha = \frac{\nu}{2}, \quad p\frac{\nu}{2} = \frac{b^2 + 3bc + c^2}{3}, \quad p'\frac{\nu}{2} = -2bc(b + c),$$

$$p^\beta = \frac{b^2 - 3bc + c^2}{3}, \quad p'\beta = 2bc(c - b),$$

$$\gamma = -\beta;$$

aux arguments α, β, γ correspondent les racines $S = 0,2b$ et $2c$ de l'équation $D = 0$; à $u = \omega_1$ correspond une valeur infinie de S .

A $u = \omega_2$ et ω_3 correspond: $S = b + c$, $P = bc$, $X' = b$, $X'' = c$.

Le cas de $B = 0$, avec $s = 2$ et A carré, présente cette particularité intéressante de représenter la solution du problème suivant : *détermination de tous les triangles héroniens ayant un côté donné et une aire imposée*. J'étudierai la question prochainement.

CAS ÉLÉMENTAIRE DE DÉGÉNÉRESCENCE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

23. — L'expression du discriminant Δ des fonctions elliptiques, abstraction faite du facteur double $As + B$, qui ne saurait être nul sans dégénérescence de l'homographie, se présente sous forme d'un polynôme du second degré seulement par rapport au paramètre B . Les deux autres paramètres A et s étant supposés donnés, rationnels et quelconques, l'équation $\Delta = 0$ n'a des racines rationnelles en B que si $s^2 + 12A$ est un carré. En introduisant un nouveau paramètre rationnel et arbitraire, ω , cette dernière condition est satisfaite de la manière la plus générale en prenant :

$$A = \frac{\omega^2 - s^2}{12} ;$$

d'où l'expression correspondante du discriminant :

$$\Delta = -27(As + B)^2(B - B_1)(B - B_2) ,$$

avec :

$$4 \cdot 27B_1 = s^3 - 3\omega^2s - 2\omega^3 = (s + \omega)^2 \cdot (s - 2\omega) ,$$

$$4 \cdot 27B_2 = s^3 - 3\omega^2s + 2\omega^3 = (s - \omega)^2 \cdot (s + 2\omega) ;$$

$$27(B_2 - B_1) = \omega^3 .$$

Le changement de signe sur ω produit l'échange des valeurs de B_1 et B_2 ; en supposant que ω peut prendre toutes les valeurs rationnelles et algébriques, le discriminant Δ s'annule donc lorsque les coefficients A et B sont de la forme générale suivante :

$$A = \frac{\omega^2 - s^2}{12} , \quad B = \frac{1}{108}(s - \omega)^2 \cdot (s + 2\omega) ,$$