

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 26 (1927)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FORMULES ELLIPTIQUES POUR LA RÉOLUTION DE CERTAINES ÉQUATIONS DE FERMAT
Autor: Turrière, Emile
Kapitel: Examen de cas spéciaux.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-21256>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 30.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

part, de l'homographie, il sera pris égal à l'unité; les formules de correspondance sont:

$$A = -b, \quad B = \frac{a}{2}, \quad s = d, \quad e = 1.$$

La parabole (Q) dépend de trois paramètres; son équation tangentielle est:

$$BU^2 - AUV + sUW + VW = 0. \quad (Q)$$

L'équation ponctuelle s'obtient immédiatement en remplaçant, dans l'équation de la corde tt' , le produit P par son expression homographique en S et en égalant à zéro le discriminant du polynôme en S, du second degré, ainsi obtenu:

$$(x + sy + A)^2 = 4y(sx - B), \quad (Q)$$

ou encore

$$(x - sy + A)^2 + 4(As + B)y = 0;$$

cette parabole (Q) touche Ox au point $x = A$; l'autre tangente issue de O a pour équation $Ax + By = 0$: c'est une arithmocode particulière de (P), qui représente la solution $S = -\frac{B}{A}$, $P = 0$.

La directrice a pour équation $y + sx = B$; les coordonnées du foyer sont:

$$x = \frac{Bs - A}{1 + s^2}, \quad y = -\frac{As + B}{1 + s^2}.$$

EXAMEN DE CAS SPÉCIAUX.

16. — *Cas où l'équation $D = 0$ a une seconde racine rationnelle.* — Soit $S = 2a$, la racine rationnelle (autre que $S = s$). Alors:

$$S^2 - sS^2 - 4AS - 4B \equiv (S - 2a)(S^2 - 2LS + 2M);$$

a , L et M sont supposés donnés; soit $\delta = L^2 - 2M$ la quantité dont dépend la réalité des racines du facteur quadratique.

Les formules sont les suivantes. L'équation cubique $p'u = 0$ a une racine rationnelle e_1 .

$$s = 2(a + L) , \quad A = -\left(aL + \frac{M}{2}\right) , \quad B = aM ;$$

$$e_1 = p\omega_1 = -\frac{2}{3}\left(a^2 + \frac{M - L^2}{2}\right) ,$$

$$g_2 = 3e_1^2 + \delta L^2 . \quad g_3 = e_1(e_1^2 - \delta L^2) , \quad \Delta = \delta L^2(9e_1^2 - \delta L^2)^2 .$$

$$p^\nu = \frac{1}{3}(a^2 + L^2 - M) , \quad p'^\nu = -aM , \quad p''^\nu = 2a^2(L^2 - M) + \frac{M^2}{2} ,$$

$$p^{\frac{\nu}{2}} = \frac{1}{3}\left(a^2 + 3aL + L^2 + \frac{M}{2}\right) , \quad p'^{\frac{\nu}{2}} = -2L\left(a^2 + aL + \frac{M}{2}\right) ,$$

$$p''^{\frac{\nu}{2}} = -s \cdot p'^{\frac{\nu}{2}} ;$$

$$p^\alpha = \frac{1}{3}\left(a^2 - 3aL + L^2 + \frac{M}{2}\right) , \quad p'^\alpha = -2L\left(a^2 - aL + \frac{M}{2}\right) ,$$

$$p''^\alpha = -s \cdot p'^\alpha .$$

α est l'argument associé à $S = 2a$; sa valeur est $\alpha = \omega_1 - \frac{\nu}{2}$.

17. — *Cas où toutes les racines de l'équation $D = 0$ sont rationnelles.* Soient $2a, 2b, 2c$ les racines de l'équation en S :

$$S^3 - sS^2 - 4AS - 4B ;$$

les expressions de A, B, s sont alors:

$$s = 2(a + b + c) ,$$

$$A = -(ab + bc + ca) , \quad B = 2abc .$$

D'où, pour les éléments elliptiques les expressions:

$$g_2 = \frac{4}{3}(a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2) > 0 ,$$

$$g_3 = \frac{4}{27}(a^2 + b^2 - 2c^2)(b^2 + c^2 - 2a^2)(c^2 + a^2 - 2b^2) ,$$

$$\Delta = 16(a^2 - b^2)^2(b^2 - c^2)^2(c^2 - a^2)^2 > 0 .$$

Les trois racines de $p'u = 0$ sont réelles et rationnelles :

$$e_1 = \frac{1}{3}(b^2 + c^2 - 2a^2), \quad e_2 = \frac{1}{3}(c^2 + a^2 - 2b^2),$$

$$e_3 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 - 2c^2);$$

dans l'ordre $e_1 > e_2 > e_3$, pour $a^2 < b^2 < c^2$.

$$p^\nu = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2), \quad p'^\nu = -2abc, \quad p''^\nu = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2);$$

$$p^{\frac{\nu}{2}} = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + ab + bc + ca, \quad p'^{\frac{\nu}{2}} = -2(a+b)(b+c)(c+a).$$

Si α, β, γ sont les valeurs des arguments associés à $S = 2a, 2b$ et $2c$, les formules générales de correspondance donnent :

$$p^\alpha = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + bc - a(b+c), \quad p'^\alpha = -2(b+c)(a-b)(a-c),$$

etc.

Et, par suite :

$$\alpha = \omega_1 - \frac{\nu}{2}, \quad \beta = \omega_2 - \frac{\nu}{2}, \quad \gamma = \omega_3 - \frac{\nu}{2},$$

$$e_1 = p^{\omega_1}, \quad e_2 = p^{\omega_2}, \quad e_3 = p^{\omega_3}.$$

Pour $u = \omega_1$, il vient :

$$S = a + b + c - \frac{bc}{a}, \quad P = ab + ac - bc, \quad \pm \sqrt{D} = \frac{(a-b)(a-c)}{a},$$

$$X' = a, \quad X'' = b + c - \frac{bc}{a}.$$

18. — *Interprétations géométriques.* — Les formules ci-dessus assurent l'existence de trois tangentes rationnelles, communes aux paraboles (P) et (Q) du paragraphe 15 :

$$U = 1, \quad V = -2a, \quad W = a^2, \quad \text{etc. ...}$$

Cette question peut encore être traitée en rapportant les deux paraboles au triangle de référence formé par les trois tangentes communes. Sans restriction de généralité, la parabole (P) peut être représentée par les équations tangentielle et ponctuelle :

$$\frac{1}{U} + \frac{1}{V} + \frac{1}{W} = 0, \quad \pm \sqrt{x} \pm \sqrt{y} \pm \sqrt{z} = 0.$$

Si t est le paramètre du point courant et de la tangente associée, on pourra prendre la représentation paramétrique suivante en coordonnées homogènes :

$$U = \frac{1}{1 + \sigma + t}, \quad V = \frac{1}{1 - \sigma - t}, \quad W = -\frac{1}{2};$$

$$x = \frac{1}{U^2} = (t + \sigma + 1)^2, \quad y = \frac{1}{V^2} = (t + \sigma - 1)^2, \quad z = \frac{1}{W^2} = 4;$$

les coordonnées tangentielles de la corde tt' sont alors :

$$U = 2 - (S + 2\sigma), \quad V = 2 + (S + 2\sigma), \\ W = P + \sigma S + \sigma^2 - 1;$$

où $S = t + t'$, $P = tt'$. Si maintenant la conique (Q) est représentée par l'équation

$$\frac{L}{U} + \frac{M}{V} = \frac{1}{W},$$

les constantes σ , L et M étant liées par la relation

$$\sigma(M - L) = 1,$$

l'homographie définie entre P et S par les tangentes de (Q) a pour coefficients :

$$A = 1 + \sigma^2 + 2\sigma^2(L + M), \\ B = 2\sigma(\sigma^2 - 1)(L + M + 1), \\ s = 2\sigma(L + M - 1).$$

Les formules d'équivalence entre les deux modes de représentation sont :

$$a = 1 - \sigma, \\ b = -1 - \sigma, \\ c = \sigma(L + M + 1),$$

le paramètre d'homogénéité étant choisi de telle manière que $a - b = 2$.

19. — *Cas de la cubique équi-anharmonique.* — En prenant A et s arbitraires, $s \neq 0$, la formule

$$24(Bs - 2A^2) + (s^2 + 8A)^2 = 0,$$

permet de donner à B une valeur rationnelle assurant l'existence d'un cas équiharmonique ($g_2 = 0$). Ces formules peuvent être écrites sous la forme suivante, avec un paramètre rationnel t :

$$A = \frac{12t - s^2}{8}, \quad B = \frac{s^4 - 24ts^2 - 48t^2}{32s},$$

$$g_2 = 0, \quad g_3 = 4t^3 - B^2 = -\frac{(s^2 - 4t)^3(s^2 - 36t)}{2^{10}s^2};$$

$$p^\nu = t, \quad p'^\nu = -B, \quad p''^\nu = 6t^2.$$

$$p_{\frac{\nu}{2}} = \frac{s^2 - 4t}{8}, \quad p'_{\frac{\nu}{2}} = -\frac{3}{32} \cdot \frac{(s^2 - 4t)^2}{s}.$$

20. — *Cas de la cubique harmonique.* — L'invariant g_3 est nul, lorsque se trouve remplie une condition entre les paramètres, qui est du second degré en B; il en résulte que $\frac{s^2 + 8A}{12}$ est un carré. Il faut donc prendre:

$$p^\nu = \square = \lambda^2,$$

λ étant un nombre rationnel. D'où découlent les formules suivantes de représentation générale du cas où la cubique de Weierstrass est harmonique:

$$A = \frac{12\lambda^2 - s^2}{8}, \quad B = \lambda \left(\lambda^2 - \lambda s - \frac{s^2}{4} \right),$$

$$g_2 = \frac{1}{16} (s + 2\lambda)^2 (s + 6\lambda) (2\lambda - s), \quad g_3 = 0.$$

$$p^\nu = \lambda^2, \quad p'^\nu = -B,$$

$$p_{\frac{\nu}{2}} = \frac{s^2 - 4\lambda^2}{8}, \quad p'_{\frac{\nu}{2}} = -\frac{1}{8} (s + 2\lambda)^2 (s - 2\lambda);$$

Si la racine nulle e_1 est $p\omega_1 = 0$, on a une nouvelle solution simple:

$$p\left(\frac{\nu}{2} + \omega_1\right) = \frac{1}{8} (s + 6\lambda) (s + 2\lambda), \quad p'\left(\frac{\nu}{2} + \omega_1\right) = (s + 2\lambda) \cdot p\left(\frac{\nu}{2} + \omega_1\right).$$