Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 26 (1927)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FORMULES ELLIPTIQUES POUR LA RÉSOLUTION DE CERTAINES ÉQUATIONS DE FERMAT

Autor: Turrière, Emile

Kapitel: Examen de cas spéciaux.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21256

part, de l'homographie, il sera pris égal à l'unité; les formules de correspondance sont:

$$A = -b, \quad B = \frac{a}{2}, \quad s = d, \quad e = 1.$$

La parabole (Q) dépend de trois paramètres; son équation tangentielle est:

$$BU^2 - AUV + sUW + VW = 0. \qquad (Q)$$

L'équation ponctuelle s'obtient immédiatement en remplaçant, dans l'équation de la corde tt', le produit P par son expression homographique en S et en égalant à zéro le discriminant du polynome en S, du second degré, ainsi obtenu:

$$(x + sy + A)^2 = 4y(sx - B), \qquad (Q)$$

ou encore

$$(x - sy + A)^2 + 4(As + B)y = 0;$$

cette parabole (Q) touche Ox au point $x = A$; l'autre tangente issue de O a pour équation $Ax + By = 0$: c'est une arithmocorde particulière de (P), qui représente la solution $S = -\frac{B}{A}$, $P = 0$.

La directrice a pour équation $y + sx = B$; les coordonnées du foyer sont:

$$x = \frac{Bs - A}{1 + s^2}, \qquad y = -\frac{As + B}{1 + s^2}.$$

Examen de cas spéciaux.

16. — *Cas où l'équation* $D = 0$ *a une seconde racine rationnelle.* — Soit $S = 2a$, la racine rationnelle (autre que $S = s$). Alors:

$$S^3 - sS^2 - 4AS - 4B \equiv (S - 2a)(S^2 - 2LS + 2M);$$

a, L et M sont supposés donnés; soit $\delta = L^2 - 2M$ la quantité dont dépend la réalité des racines du facteur quadratique.

Les formules sont les suivantes. L'équation cubique $\wp' u = 0$ a une racine rationnelle e_1.

$$s = 2(a + \mathrm{L}) \, , \qquad \mathrm{A} = -\left(a\mathrm{L} + \frac{\mathrm{M}}{2}\right) , \qquad \mathrm{B} = a\mathrm{M} \; ;$$

$$e_1 = \wp\omega_1 = -\frac{2}{3}\left(a^2 + \frac{\mathrm{M} - \mathrm{L}^2}{2}\right) ,$$

$$g_2 = 3e_1^2 + \delta \mathrm{L}^2 \, . \qquad g_3 = e_1(e_1^2 - \delta \mathrm{L}^2) \, , \qquad \Delta = \delta \mathrm{L}^2 (9e_1^2 - \delta \mathrm{L}^2)^2 \, .$$

$$\wp\nu = \frac{1}{3}(a^2 + \mathrm{L}^2 - \mathrm{M}) \, , \quad \wp'\nu = -a\mathrm{M} \, , \quad \wp''\nu = 2a^2(\mathrm{L}^2 - \mathrm{M}) + \frac{\mathrm{M}^2}{2} \, ,$$

$$\wp\frac{\nu}{2} = \frac{1}{3}\left(a^2 + 3a\mathrm{L} + \mathrm{L}^2 + \frac{\mathrm{M}}{2}\right) , \qquad \wp'\frac{\nu}{2} = -2\mathrm{L}\left(a^2 + a\mathrm{L} + \frac{\mathrm{M}}{2}\right) ,$$

$$\wp''\frac{\nu}{2} = -s \, . \, \wp'\frac{\nu}{2} \; ;$$

$$\wp\alpha = \frac{1}{3}\left(a^2 - 3a\mathrm{L} + \mathrm{L}^2 + \frac{\mathrm{M}}{2}\right) , \qquad \wp'\alpha = -2\mathrm{L}\left(a^2 - a\mathrm{L} + \frac{\mathrm{M}}{2}\right) ,$$

$$\wp''\alpha = -s \, . \, \wp'\alpha \, .$$

α est l'argument associé à $\mathrm{S} = 2a$; sa valeur est $\alpha = \omega_1 - \frac{\nu}{2}$.

17. — *Cas où toutes les racines de l'équation* D = 0 *sont rationnelles.* Soient $2a$, $2b$, $2c$ les racines de l'équation en S:

$$\mathrm{S}^3 - s\mathrm{S}^2 - 4\mathrm{AS} - 4\mathrm{B} \; ;$$

les expressions de A, B, s sont alors:

$$s = 2(a + b + c) \, ,$$

$$\mathrm{A} = -(ab + bc + ca) \, , \qquad \mathrm{B} = 2abc \, .$$

D'où, pour les éléments elliptiques les expressions:

$$g_2 = \frac{4}{3}(a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2) > 0 \, ,$$

$$g_3 = \frac{4}{27}(a^2 + b^2 - 2c^2)(b^2 + c^2 - 2a^2)(c^2 + a^2 - 2b^2) \, ,$$

$$\Delta = 16(a^2 - b^2)^2(b^2 - c^2)^2(c^2 - a^2)^2 > 0 \, .$$

Les trois racines de $\wp' u = 0$ sont réelles et rationnelles:

$$e_1 = \frac{1}{3}(b^2 + c^2 - 2a^2) , \qquad e_2 = \frac{1}{3}(c^2 + a^2 - 2b^2) ,$$

$$e_3 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 - 2c^2) ;$$

dans l'ordre $e_1 > e_2 > e_3$, pour $a^2 < b^2 < c^2$.

$$\wp v = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) , \quad \wp' v = -2abc , \quad \wp'' v = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) ;$$

$$\wp\frac{v}{2} = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + ab + bc + ca , \quad \wp'\frac{v}{2} = -2(a+b)(b+c)(c+a) .$$

Si α, β, γ sont les valeurs des arguments associés à $S = 2a$, $2b$ et $2c$, les formules générales de correspondance donnent:

$$\wp\alpha = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + bc - a(b+c) , \quad \wp'\alpha = -2(b+c)(a-b)(a-c) ,$$

etc.

Et, par suite:

$$\alpha = \omega_1 - \frac{v}{2} , \qquad \beta = \omega_2 - \frac{v}{2} , \qquad \gamma = \omega_3 - \frac{v}{2} ,$$

$$e_1 = \wp\omega_1 , \qquad e_2 = \wp\omega_2 , \qquad e_3 = \wp\omega_3 .$$

Pour $u = \omega_1$, il vient:

$$S = a + b + c - \frac{bc}{a} , \quad P = ab + ac - bc , \quad \pm\sqrt{D} = \frac{(a-b)(a-c)}{a} ,$$

$$X' = a , \qquad X'' = b + c - \frac{bc}{a} .$$

18. — *Interprétations géométriques.* — Les formules ci-dessus assurent l'existence de trois tangentes rationnelles, communes aux paraboles (P) et (Q) du paragraphe 15:

$$U = 1 , \quad V = -2a , \quad W = a^2 , \quad \text{etc.} \ldots$$

Cette question peut encore être traitée en rapportant les deux paraboles au triangle de référence formé par les trois tangentes communes. Sans restriction de généralité, la parabole (P) peut être représentée par les équations tangentielle et ponctuelle:

$$\frac{1}{U} + \frac{1}{V} + \frac{1}{W} = 0 , \qquad \pm\sqrt{x} \pm \sqrt{y} \pm \sqrt{z} = 0 .$$

Si t est le paramètre du point courant et de la tangente associée, on pourra prendre la représentation paramétrique suivante en coordonnées homogènes:

$$U = \frac{1}{1+\sigma+t}, \qquad V = \frac{1}{1-\sigma-t}, \qquad W = -\frac{1}{2};$$

$$x = \frac{1}{U^2} = (t+\sigma+1)^2, \quad y = \frac{1}{V^2} = (t+\sigma-1)^2, \quad z = \frac{1}{W^2} = 4;$$

les coordonnées tangentielles de la corde tt' sont alors:

$$U = 2-(S+2\sigma), \qquad V = 2+(S+2\sigma),$$
$$W = P+\sigma S+\sigma^2-1;$$

où $S = t+t'$, $P = tt'$. Si maintenant la conique (Q) est représentée par l'équation

$$\frac{L}{U}+\frac{M}{V}=\frac{1}{W},$$

les constantes σ, L et M étant liées par la relation

$$\sigma(M-L) = 1,$$

l'homographie définie entre P et S par les tangentes de (Q) a pour coefficients:

$$A = 1+\sigma^2+2\sigma^2(L+M),$$
$$B = 2\sigma(\sigma^2-1)(L+M+1),$$
$$s = 2\sigma(L+M-1).$$

Les formules d'équivalence entre les deux modes de représentation sont:

$$a = 1-\sigma,$$
$$b = -1-\sigma,$$
$$c = \sigma(L+M+1),$$

le paramètre d'homogénéité étant choisi de telle manière que $a-b=2$.

19. — *Cas de la cubique équianharmonique.* — En prenant A et s arbitraires, $s \neq 0$, la formule

$$24(Bs-2A^2)+(s^2+8A)^2 = 0,$$

permet de donner à B une valeur rationnelle assurant l'existence d'un cas équianharmonique ($g_2 = 0$). Ces formules peuvent être écrites sous la forme suivante, avec un paramètre rationnel t:

$$A = \frac{12t - s^2}{8}, \qquad B = \frac{s^4 - 24ts^2 - 48t^2}{32s},$$

$$g_2 = 0, \quad g_3 = 4t^3 - B^2 = -\frac{(s^2 - 4t)^3(s^2 - 36t)}{2^{10}s^2};$$

$$\wp v = t, \qquad \wp' v = -B, \qquad \wp'' v = 6t^2.$$

$$\wp\frac{v}{2} = \frac{s^2 - 4t}{8}, \qquad \wp'\frac{v}{2} = -\frac{3}{32}\cdot\frac{(s^2 - 4t)^2}{s}.$$

20. — *Cas de la cubique harmonique.* — L'invariant g_3 est nul, lorsque se trouve remplie une condition entre les paramètres, qui est du second degré en B ; il en résulte que $\frac{s^2 + 8A}{12}$ est un carré. Il faut donc prendre:

$$\wp v = \square = \lambda^2,$$

λ étant un nombre rationnel. D'où découlent les formules suivantes de représentation générale du cas où la cubique de Weierstrass est harmonique:

$$A = \frac{12\lambda^2 - s^2}{8}, \qquad B = \lambda\left(\lambda^2 - \lambda s - \frac{s^2}{4}\right),$$

$$g_2 = \frac{1}{16}(s + 2\lambda)^2(s + 6\lambda)(2\lambda - s), \qquad g_3 = 0.$$

$$\wp v = \lambda^2, \qquad \wp' v = -B,$$

$$\wp\frac{v}{2} = \frac{s^2 - 4\lambda^2}{8}, \qquad \wp'\frac{v}{2} = -\frac{1}{8}(s + 2\lambda)^2.(s - 2\lambda);$$

Si la racine nulle e_1 est $\wp\omega_1 = 0$, on a une nouvelle solution simple:

$$\wp\left(\frac{v}{2} + \omega_1\right) = \frac{1}{8}(s + 6\lambda)(s + 2\lambda), \quad \wp'\left(\frac{v}{2} + \omega_1\right) = (s + 2\lambda).\wp\left(\frac{v}{2} + \omega_1\right).$$