Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 26 (1927)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FORMULES ELLIPTIQUES POUR LA RÉSOLUTION DE CERTAINES ÉQUATIONS DE FERMAT

Autor: Turrière, Emile

Kapitel: INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21256

en introduisant la fonction $f(t)$ du paragraphe 5:

$$f(t) \equiv \wp' t - \wp' v - s(\wp t - \wp v) \;;$$

d'où pour X′ et X″ les expressions en produits de sigma se réduisant à celles du paragraphe 12 par simple changement d'argument $u = t + v$.

14. — *Etude directe de la relation entre* X′ *et* X″. — Les racines X′, X″ sont liées par la relation

$$xy(x + y - s) = A(x + y) + B \,,$$

représentative d'une cubique plane. La discussion précédente a mis en évidence l'existence d'arithmopoints sur cette cubique quels que soient A, B et s:

$$x = -\frac{B}{A}\,, \qquad y = s + \frac{B^2 - A^3}{AB}\,,$$

$$x = -\frac{B}{A}\,, \qquad y = 0\,, \ldots$$

et ceux qui en résultent par symétrie par rapport à l'axe $x = y$.

D'autre part, si on se donne x, l'équation en y est du second degré; de même l'équation en x pour une valeur donnée de y. Ainsi, de tout couple donné (x_1, y_1) représentatif d'un arithmopoint, il est possible de déduire immédiatement deux nouvelles solutions (x_1, y_2) et (x_2, y_1) et ainsi de suite dans les deux sens.

Ceci revient à partir d'un arithmopoint de cette cubique plane et à mener les parallèles à l'une et à l'autre des asymptotes $x = 0$, $y = 0$. C'est sous une forme élémentaire l'addition des arguments des fonctions elliptiques.

La cubique considérée peut-être représentée par les fonctions de Weierstrass au moyen des formules qui ont été données aux paragraphes 12 et 13, pour les expressions de X′ et X″.

Interprétation géométrique.

15. — Soient t, t' deux arithmopoints quelconques d'une arithmoconique (P) du plan des coordonnées. En désignant par S et P

la somme et le produit des paramètres t et t' de ces points, une relation quelconque entre S et P peut-être considérée comme l'équation tangentielle d'une courbe (Q) du plan, enveloppée par la corde tt'; et réciproquement.

L'ensemble de cette équation tangentielle et de celle, $S^2 - 4P = 0$, de la conique (P), représente les tangentes communes à (P) et à (Q); l'existence des solutions rationnelles pour ce système d'équations équivaut à la détermination rationnelle d'autant de tangentes communes.

Sans restreindre la généralité de la question, il est toujours possible de prendre pour (P) une parabole d'équations paramétriques $x = t^2$, $y = t$. La corde tt' de cette courbe a pour équation:

$$x - Sy + P = 0 \ ;$$

les coordonnées tangentielles de cette droite sont $u = 1$, $V = -S$, $W = P$.

Si, d'autre part, l'équation tangentielle d'une seconde conique (Q) est:

$$aU^2 + 2bUV + cV^2 + 2dUW + 2eVW + fW^2 = 0 \ ,$$

le problème de la détermination des cordes joignant deux arithmopoints de la parabole (P) et tangentes à la conique (Q) est réduit à l'équation

$$a - 2bS + cS^2 + 2dP - 2ePS + fP^2 = 0 \ .$$

La disparition de P^2 exige que la conique (Q) soit elle aussi une parabole ($f = 0$).

La disparition du terme en S^2 exige que la conique Q soit tangente à l'axe Ox de la parabole (P).

Pour que la relation entre P *et* S *soit homographique, il faut et il suffit que la conique* (Q) *soit une parabole tangente à l'axe de la parabole* (P).

Comme le coefficient e de PS ne saurait être nul sans décomposition d'une part de la parabole (Q) et sans dégénérescence d'autre part, de l'homographie, il sera pris égal à l'unité; les formules de correspondance sont:

$$A = -b, \quad B = \frac{a}{2}, \quad s = d, \quad e = 1.$$

La parabole (Q) dépend de trois paramètres; son équation tangentielle est:

$$BU^2 - AUV + sUW + VW = 0. \tag{Q}$$

L'équation ponctuelle s'obtient immédiatement en remplaçant, dans l'équation de la corde tt', le produit P par son expression homographique en S et en égalant à zéro le discriminant du polynome en S, du second degré, ainsi obtenu:

$$(x + sy + A)^2 = 4y(sx - B), \tag{Q}$$

ou encore

$$(x - sy + A)^2 + 4(As + B)y = 0;$$

cette parabole (Q) touche Ox au point $x = A$; l'autre tangente issue de O a pour équation $Ax + By = 0$: c'est une arithmocorde particulière de (P), qui représente la solution $S = -\frac{B}{A}$, $P = 0$.

La directrice a pour équation $y + sx = B$; les coordonnées du foyer sont:

$$x = \frac{Bs - A}{1 + s^2}, \quad y = -\frac{As + B}{1 + s^2}.$$

Examen de cas spéciaux.

16. — *Cas où l'équation* $D = 0$ *a une seconde racine rationnelle.* — Soit $S = 2a$, la racine rationnelle (autre que $S = s$). Alors:

$$S^3 - sS^2 - 4AS - 4B \equiv (S - 2a)(S^2 - 2LS + 2M);$$

a, L et M sont supposés donnés; soit $\delta = L^2 - 2M$ la quantité dont dépend la réalité des racines du facteur quadratique.