INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1927)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

en introduisant la fonction $f(t)$ du paragraphe 5:

$$f(t) \equiv \mathfrak{p}'t - \mathfrak{p}'v - s(\mathfrak{p}t - \mathfrak{p}v) \ ;$$

d'où pour X′ et X″ les expressions en produits de sigma se réduisant à celles du paragraphe 12 par simple changement d'argument $u = t + w$.

14. — *Etude directe de la relation entre* X′ *et* X″. — Les racines X′, X″ sont liées par la relation

$$xy(x + y - s) = \mathrm{A}(x + y) + \mathrm{B} \ ,$$

représentative d'une cubique plane. La discussion précédente a mis en évidence l'existence d'arithmopoints sur cette cubique quels que soient A, B et s:

$$x = -\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} , \qquad y = s + \frac{\mathrm{B}^2 - \mathrm{A}^3}{\mathrm{AB}} ,$$

$$x = -\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} , \qquad y = 0 , \ \ldots$$

et ceux qui en résultent par symétrie par rapport à l'axe $x = y$.

D'autre part, si on se donne x, l'équation en y est du second degré; de même l'équation en x pour une valeur donnée de y. Ainsi, de tout couple donné (x_1, y_1) représentatif d'un arithmopoint, il est possible de déduire immédiatement deux nouvelles solutions (x_1, y_2) et (x_2, y_1) et ainsi de suite dans les deux sens.

Ceci revient à partir d'un arithmopoint de cette cubique plane et à mener les parallèles à l'une et à l'autre des asymptotes $x = 0$, $y = 0$. C'est sous une forme élémentaire l'addition des arguments des fonctions elliptiques.

La cubique considérée peut-être représentée par les fonctions de Weierstrass au moyen des formules qui ont été données aux paragraphes 12 et 13, pour les expressions de X′ et X″.

Interprétation géométrique.

15. — Soient t, t' deux arithmopoints quelconques d'une arithmoconique (P) du plan des coordonnées. En désignant par S et P

la somme et le produit des paramètres t et t' de ces points, une relation quelconque entre S et P peut-être considérée comme l'équation tangentielle d'une courbe (Q) du plan, enveloppée par la corde tt'; et réciproquement.

L'ensemble de cette équation tangentielle et de celle, $S^2 - 4P = 0$, de la conique (P), représente les tangentes communes à (P) et à (Q); l'existence des solutions rationnelles pour ce système d'équations équivaut à la détermination rationnelle d'autant de tangentes communes.

Sans restreindre la généralité de la question, il est toujours possible de prendre pour (P) une parabole d'équations paramétriques $x = t^2$, $y = t$. La corde tt' de cette courbe a pour équation:

$$x - Sy + P = 0 ;$$

les coordonnées tangentielles de cette droite sont $u = 1$, $V = -S$, $W = P$.

Si, d'autre part, l'équation tangentielle d'une seconde conique (Q) est:

$$aU^2 + 2bUV + cV^2 + 2dUW + 2eVW + fW^2 = 0 ,$$

le problème de la détermination des cordes joignant deux arithmopoints de la parabole (P) et tangentes à la conique (Q) est réduit à l'équation

$$a - 2bS + cS^2 + 2dP - 2ePS + fP^2 = 0 .$$

La disparition de P^2 exige que la conique (Q) soit elle aussi une parabole ($f = 0$).

La disparition du terme en S^2 exige que la conique Q soit tangente à l'axe Ox de la parabole (P).

Pour que la relation entre P *et* S *soit homographique, il faut et il suffit que la conique* (Q) *soit une parabole tangente à l'axe de la parabole* (P).

Comme le coefficient e de PS ne saurait être nul sans décomposition d'une part de la parabole (Q) et sans dégénérescence d'autre

part, de l'homographie, il sera pris égal à l'unité; les formules de correspondance sont:

$$A = -b\ , \qquad B = \frac{a}{2}\ , \qquad s = d\ , \qquad e = 1\ .$$

La parabole (Q) dépend de trois paramètres; son équation tangentielle est:

$$BU^2 - AUV + sUW + VW = 0\ . \qquad (Q)$$

L'équation ponctuelle s'obtient immédiatement en remplaçant, dans l'équation de la corde tt', le produit P par son expression homographique en S et en égalant à zéro le discriminant du polynome en S, du second degré, ainsi obtenu:

$$(x + sy + A)^2 = 4y(sx - B)\ , \qquad (Q)$$

ou encore

$$(x - sy + A)^2 + 4(As + B)y = 0\ ;$$

cette parabole (Q) touche Ox au point $x = A$; l'autre tangente issue de O a pour équation $Ax + By = 0$: c'est une arithmocorde particulière de (P), qui représente la solution $S = -\frac{B}{A}$, $P = 0$.

La directrice a pour équation $y + sx = B$; les coordonnées du foyer sont:

$$x = \frac{Bs - A}{1 + s^2}\ , \qquad y = -\frac{As + B}{1 + s^2}\ .$$

Examen de cas spéciaux.

16. — *Cas où l'équation* $D = 0$ *a une seconde racine rationnelle.* — Soit $S = 2a$, la racine rationnelle (autre que $S = s$). Alors:

$$S^3 - sS^2 - 4AS - 4B \equiv (S - 2a)(S^2 - 2LS + 2M)\ ;$$

a, L et M sont supposés donnés; soit $\delta = L^2 - 2M$ la quantité dont dépend la réalité des racines du facteur quadratique.