Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 26 (1927)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FORMULES ELLIPTIQUES POUR LA RÉSOLUTION DE CERTAINES ÉQUATIONS DE FERMAT

Autor: Turrière, Emile

Kapitel: Observations préliminaires sur les équations de Fermat dans le cas où le polynome du quatrième degré a au moins un zéro rationnel.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21256

nous nous sommes occupés ici et qui sont aussi les ensembles de capacité électro-statique nulle sont également ceux qui ne sauraient être ensembles de singularités pour une fonction harmonique bornée, ensembles au sujet desquels M. H. Lebesgue avait fait connaître des résultats importants [1].

FORMULES ELLIPTIQUES POUR LA RÉSOLUTION DE CERTAINES ÉQUATIONS DE FERMAT

PAR

Emile Turrière (Montpellier).

Observations préliminaires sur les équations de Fermat dans le cas où le polynome du quatrième degré a au moins un zéro rationnel.

1. — L'étude d'une équation indéterminée du quatrième degré de Fermat

$$\alpha_0 z^4 + 4\alpha_1 z^3 + 6\alpha_2 z^2 + 4\alpha_3 z + \alpha_4 = y^2 ,$$

dont une solution particulière est connue *a priori*, se ramène tout d'abord, par une transformation homographique sur la variable z, à celle d'une équation du même type, mais avec $\alpha_0 = 1$:

$$x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 = \mathrm{X} = \square ;$$

la solution connue z_0 est devenue la valeur infinie de la nouvelle variable x.

---

[1] *C. R.* Ac. Sc., t. 176, p. 1097, avril 1923.

Les formules générales de l'inversion elliptique résolvent alors la question. Les fonctions elliptiques sont caractérisées par les invariants:

$$g_2 = a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2 ,$$
$$g_3 = a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 ;$$

la cubique de Weierstrass est particulière en ce sens qu'elle admet au moins un arithmopoint d'argument v tel que:

$$\wp v = a_1^2 - a_2 , \qquad \wp' v = a_3 - 3a_1 a_2 + 2a_1^3 ;$$

en général, la cubique admet toute la chaîne illimitée dans les deux sens de solutions $-2v$, $-v$, v, $2v$, ... comprises dans la formule $u = n.v$ (n entier algébrique quelconque). Dans le cas général, on ne connaît que ces arithmopoints.

2. — En général, la connaissance des valeurs du système des trois nombres $\wp u_0$, $\wp' u_0$, $\wp'' u_0$ suffit pour déterminer complètement une cubique de Weierstrass. Les invariants sont définis par les formules:

$$g_2 = 12\wp^2 - 2\wp'' ;$$
$$g_3 = -8\wp^3 + 2\wp\wp'' - \wp'^2 ;$$

dans le cas actuel de fonctions elliptiques liées à une équation de Fermat, la question est complètement définie par la connaissance de $\wp v$, $\wp' v$ et g_2 par exemple.

Les formules générales de résolution sont alors, avec un argument variable u:

$$x = -a_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v} ,$$
$$\sqrt{X} = \wp u - \wp(u + v) .$$

Dans le cas de forme illusoire pour l'expression de x (c'est-à-dire lorsque $u = v$), la vraie valeur de x est

$$x = -a_1 + \frac{1}{2} \frac{\wp'' u}{\wp' u} .$$

Aux couples de solutions de l'équation de Fermat correspondant à une même valeur de x et aux deux déterminations du radical $\sqrt{X}$, correspondent des arguments u, u' tels que:

$$u + u' + v = \text{une période} .$$

Ces généralités rappelées [1], nous supposerons dorénavant que l'équation considérée est du type spécial pour lequel le polynome du quatrième degré X a un zéro rationnel.

3. — Soient $x_1 \dots x_4$ les quatre zéros de $X = 0$; les arguments correspondants sont:

$$u_1 = -\frac{v}{2} + \omega_1 , \quad u_2 = -\frac{v}{2} + \omega_2 , \quad u_3 = -\frac{v}{2} + \omega_3 , \quad u_4 = -\frac{v}{2} .$$

ω_1, ω_2, ω_3 sont trois demi-périodes auxquelles correspondent les trois racines de $\wp' u = 0$:

$$e_1 = \wp\omega_1 , \quad e_2 = \wp\omega_2 , \quad e_3 = \wp\omega_3 .$$

La différence de deux quelconques de ces quatre valeurs de u étant une demi-période, si ces deux arguments représentent deux zéros rationnels de X, c'est-à-dire deux arithmopoints de la cubique, l'une des trois racines e est rationnelle: aux arithmopoints u_1 et u_2, par exemple, correspond une valeur rationnelle de e_3:

$$u_1 - u_2 = \omega_1 - \omega_2 = \omega_3 + \text{période} ;$$

$$e_3 = \wp(u_1 - u_2) .$$

D'où les propositions suivantes:

Si le polynome X *a deux zéros rationnels, l'équation* $\wp' u = 0$ *a une racine rationnelle.*

Si le polynome X *a ses quatre zéros rationnels, l'équation* $\wp' u = 0$ *a ses trois racines rationnelles.*

Réciproquement, *dans le cas d'un polynome* X *ayant déjà un zéro rationnel, la connaissance d'une racine rationnelle de l'équation cubique* $\wp' u = 0$ *entraîne celle d'un second zéro rationnel du polynome* X.

---

[1] Voir à ce sujet mon étude générale *Sur les équations indéterminées de Fermat* du *Bulletin de la Société mathématique de France* (mars 1928).

Dans le même cas, l'existence de trois racines rationnelles de l'équation cubique, implique l'existence de quatre zéros rationnels pour le polynome du quatrième degré.

4. — Toujours dans le cas d'un polynome X doué d'un zéro rationnel, reprenons les formules d'inversion elliptique. Sans restreindre la généralité des résultats, on peut supposer que la racine rationnelle connue *a priori* est $x = 0$; le coefficient a_4 est nul. Il existe alors un nouvel arithmopoint w sur la cubique:

$$\wp w = \frac{1}{2} a_2 \,, \qquad \wp' w = a_3 \,, \qquad \wp'' w = 2 a_1 a_3 \;;$$

d'où, par application des formules d'addition des fonctions elliptiques:

$$\wp 2w = \wp v \,, \quad \wp' 2w = -\wp' v \;;$$

$$2w + v = \text{période} \;;$$

l'argument w est identique à l'une des quatre valeurs $u_1 \ldots u_4$.

La connaissance d'un zéro rationnel de X est ainsi équivalente à celle d'une des quatre déterminations de la moitié de l'argument v.

Inversement, supposons connues les valeurs de $\wp w$, $\wp' w$, $\wp'' w$. Les invariants g_2, g_3 en résultent par les formules données plus haut. Les formules:

$$s = \frac{\wp'' w}{\wp' w} \,, \qquad \wp v + 2\wp w = \frac{s^2}{4} \,, \qquad \wp' v - \wp' w = s(\wp v - \wp w)$$

permettent de calculer successivement le coefficient angulaire s de la tangente en l'arithmopoint w de la cubique de Weierstrass, la valeur de $\wp v$ et celle de $\wp' v$.

Il existe une infinité de polynomes X associables à une même cubique de Weierstrass (tant que l'on ne précise pas la nature de v). Mais la détermination de X s'effectue sans ambiguïté lorsque sont données $\wp v$, $\wp' v$, $\wp'' v$ (ou g_2). Ici les formules pour la détermination de X se présentent sous la forme simple

$$a_1 = \frac{s}{2} \,, \qquad a_2 = 2\wp w \,, \qquad a_3 = \wp' w \,, \qquad a_4 = 0 \,.$$

5. — *Expression de* x *en produit de facteurs* σ. — L'expression de x est ensuite:

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v} - s\right).$$

Considérons la fonction entière:

$$f(u) = \wp' u - \wp' v - s(\wp u - \wp v) \; ;$$

elle admet le zéro simple $u = v$ et le zéro double $u = w$; elle s'exprime donc sous la forme

$$f(u) = -\frac{2}{C} \cdot \frac{\sigma(u-v) \, . \, \sigma^2(u-w)}{\sigma^3 u},$$

C étant une constante qui se détermine simplement en attribuant à u une valeur particulière telle que $u = -v$ ou $u = -w$.

$$f(-v) = -2\wp' v \, , \qquad f(-w) = -2\wp' w \, .$$

$$C = \sigma^2 w \, . \, \sigma 2w \, .$$

D'ailleurs un calcul direct donne:

$$\frac{f'(u)}{f(u)} = \frac{\wp' u + \wp' w}{\wp u - \wp w} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\wp' u + \wp' v}{\wp u - \wp v} + \frac{s}{2} \; ;$$

(après suppression d'un facteur, commun aux deux termes, $\wp u - \wp v$). D'où:

$$\frac{f'(u)}{f(u)} = \zeta(u-v) + 2\zeta(u-w) - 3\zeta u$$

(la constante additive $\zeta v + 2\zeta w + \frac{s}{2}$ étant évidemment nulle); l'intégration donne alors l'expression ci-dessus de $f(u)$ en produit de fonctions sigma.

Finalement l'expression de x (dans le cas où l'un des zéros est $x = 0$, correspondant à $u = w$) est:

$$x = \frac{\sigma 2w}{\sigma^2 w} \times \frac{\sigma^2(u-w)}{\sigma(u-2w) \, . \, \sigma u} \, .$$

6. — *Autre représentation des résultats précédents.* — Par le fait que le polynome en z du quatrième degré a un zéro rationnel z_0, qui est d'ailleurs une solution de l'équation de Fermat, la réso-

lution de celle-ci est réductible aux fonctions elliptiques quel que soit le coefficient a_0. Il suffit de rendre nul α_4 en posant $x = z - z_0$, puis de poser

$$x = \frac{a_3}{\xi - \frac{1}{2} a_2}$$

pour se ramener à une équation

$$4\xi^3 - g_2\xi - g_3 = \square \, .$$

Les invariants se présentent sous leur forme habituelle, où $a_4 = 0$. Bref, cette méthode conduit à la représentation suivante de la solution générale de l'équation de Fermat pour $a_4 = 0$:

$$x = \frac{\wp' w}{\wp t - \wp w} \, , \qquad \sqrt{X} = \frac{\wp' t}{\wp' w} \cdot x^2 \, .$$

Comme d'une manière générale $\wp' w = - \frac{\sigma(2w)}{\sigma^4 w}$, ces expressions sont identiques à celles qui viennent d'être données, en liant les arguments u et t par la relation:

$$u = t + w \, .$$

Nouvelle forme de la question précédente. Etude d'une relation homographique.

7. — L'étude arithmogéométrique de certaines classes de triangles remarquables pose la question suivante:

« *Former les équations du second degré, à racines rationnelles,* « *dont la somme et le produit sont reliés homographiquement.* »

La résolution de cette question dépend des fonctions elliptiques, avec un cas étendu de dégénérescence.

Voici l'étude complète de cette question.

8. — *Formules générales.* — Soient S et P la somme et le produit des racines de l'équation du second degré; ces expressions sont liées par la relation homographique:

$$P = \frac{AS + B}{S - s} \, ,$$