Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 26 (1927)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOMBRE DIMENSIQNNEL ET ENSEMBLES IMPROPRES DANS LE PROBLÈME DE DIRICHLET

Autor: Bouligand, Georges

Kapitel: Chapitre II. L'allure d'un potentiel au voisinage de l'ensemble potentiant. Application au problème de Dirichlet.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21255

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

s'agit soit du domaine ouvert, soit du domaine fermé qu'elle délimite. Cette étendue sera comparée à celle de la surface totale, prise pour unité (par exemple). Lorsqu'on subdivise l'unité de longueur en 3 parties égales, l'étalon de l'étendue actuellement considérée se subdivise en 25 parties égales. Le nombre dimensionnel est donc ici

$$\delta = \frac{\log 25}{\log 3} = 2\frac{\log 5}{\log 3} . \qquad \left(< \frac{\log 27}{\log 3}\right)$$

Indiquons sans insister qu'on pourrait beaucoup varier les considérations précédentes, et à l'exemple de ce que nous avons vu au n° 4, tirer parti de transformations linéaires qui supplanteraient les similitudes intervenues ici.

Chapitre II.

L'allure d'un potentiel au voisinage de l'ensemble potentiant. Application au problème de Dirichlet.

8. — Au cours des travaux récents sur le problème de Dirichlet, on a pris l'habitude de raisonner avec le maximum de généralité; on formule l'énoncé de la manière suivante:

Soit un domaine ouvert Ω (c'est-à-dire exclusivement composé de points intérieurs) tout entier à distance finie; soit Σ la frontière de ce domaine, dont on sait seulement:

1° Qu'elle constitue un ensemble fermé;

2° Qu'elle comprend nécessairement un continu externe.

On donne une fonction continue $f(Q)$ sur l'ensemble fermé Σ. et on cherche à trouver une fonction F (P), harmonique dans Ω, et possédant en général, en chaque point de Σ, une valeur limite unique égale à f (Q), l'ensemble des points exceptionnels étant aussi raréfié que possible.

J'ai présenté une étude détaillée de ce problème, envisagé avec ce degré de généralité dans mon mémoire des Annales de la Société Polonaise de Mathématique (t. IV, année 1925, p. 59-112), qui est en même temps la rédaction des leçons que j'ai faites sur cette question, pendant le dernier trimestre de 1925, à l'Université de Cracovie.

Je ne rappellerai donc ici que quelques points, pour permettre une lecture autonome du présent travail. On peut, pour tout domaine ouvert Ω, définir la fonction de Green $G(A, P)$: c'est la limite des fonctions de Green des domaines intérieurs à Ω, pour lesquels le problème de Dirichlet est résoluble au sens classique (c'est-à-dire avec continuité de la solution dans $\Omega + \Sigma$). Cette limite existe et est harmonique, d'après le théorème de Harnack, et surpasse les fonctions de Green des domaines intérieurs, qui en sont des valeurs approchées. Cela posé, si $f(Q)$ est l'empreinte sur Σ d'un polynome $\mathcal{F}(P)$, la solution du problème de Dirichlet est donnée, quel que soit le domaine Ω, par la formule

$$F(P) = \mathcal{F}(P) + \frac{1}{(n-2)S_n} \int_\Omega \Delta\mathcal{F}(M)\, G(M, P)\, d\omega_M . \qquad (1)$$

De là, on passe aisément au cas général, grâce à ce théorème de M. H. Lebesgue d'après lequel toute fonction continue sur un ensemble fermé est l'empreinte d'une fonction continue dans tout l'espace et grâce au théorème de Weierstrass sur l'approximation des fonctions continues par polynômes.

9. — Cela posé, il y a lieu, étant donné un domaine quelconque Ω de considérer les points de la frontière Σ où l'on a

$$\varliminf_{PQ \to 0} G(A, P) \neq 0 .$$

Ces points constituent la *partie impropre de la frontière* Σ: on peut les supprimer de manière à ce que la partie subsistante de la frontière soit encore la frontière d'un nouveau domaine et de manière à ce que la solution du problème de Dirichlet reste inchangée par cette ablation, les valeurs périphériques restant les mêmes.

Notre attention est donc attirée sur les ensembles impropres, c'est-à-dire ceux qui ne peuvent porter, d'une manière efficace, des données de Dirichlet bornées. C'est précisément pour discriminer ces ensembles que j'ai songé à introduire le nombre dimensionnel.

Nous établirons d'abord le théorème suivant:

Pour qu'un ensemble fermé E, *tout entier situé à distance finie, et dépourvu de points intérieurs*[1], *soit impropre, il suffit (cond. I) qu'en répartissant des masses positives sur* E, *de manière que chaque sphère centrée en un point de cet ensemble contienne à son intérieur une masse totale non nulle, la limite du potentiel en tout point de* E *soit* $+\infty$. *Il faut (cond. II) que sa limité supérieure soit* $+\infty$.

Montrons d'abord que la condition II est nécessaire. En effet, soit E un ensemble impropre. Répartissons sur cet ensemble des masses positives, de manière qu'une sphère, centrée en quelque point Q de E contienne à son intérieur une masse non nulle. Supposons un instant que la limite supérieure en Q du potentiel de cette répartition soit finie. Alors, nous pourrons trouver une sphère de centre Q telle que la même propriété soit satisfaite en tout point non extérieur à cette sphère: isolons cette partie E_1 de l'ensemble E, nous ne pouvons que diminuer le potentiel, qui restera donc borné; soit L la limite supérieure de ce nouveau potentiel. Considérons le problème de Dirichlet extérieur, pour le domaine qui s'étend à l'infini et dont la frontière est constituée par l'ensemble E_1; envisageons la solution attachée à la valeur L sur E_1 et évanescente à l'infini (solution qu'on peut encore définir au moyen du théorème de Harnack, en imitant ce que nous avons fait pour la fonction de Green). Cette solution devrait dépasser le potentiel précédent. Or puisque E est impropre, il en est de même *a fortiori* de E_1: elle est donc identiquement nulle. De cette contradiction, résulte bien que la condition

$$\overline{\lim_{PQ \to 0}} V(P) = +\infty .$$

est nécessaire.

La condition I est suffisante: en effet, si elle est remplie, les surfaces équipotentielles $V(P) = \lambda$ délimitent des domaines extérieurs s'étendant jusqu'à l'infini et définis par

$$V(P) < \lambda .$$

La fonction $\frac{V(P)}{\lambda}$ est la solution du problème de Dirichlet extérieur, relatif à l'un de ces domaines, solution attachée à la

[1] Si un ensemble E contenait des points intérieurs, l'ensemble (*i*) de ces points serait une somme de domaines ouverts. On raisonnerait sur E — *i* au lieu de raisonner directement sur E. Mon énoncé primitif du Mémoire cité des *Annales de la Soc. Pol.* était incorrect: je l'ai rectifié à la suite d'un échange de vues avec M. Vasilesco.

valeur 1 sur la frontière $V = \lambda$, et évanescente à l'infini. Lorsque les domaines vont en se dilatant de manière que leurs complémentaires tendent vers E, la suite des fonctions $\frac{V(P)}{\lambda}$ tend vers la solution du problème de Dirichlet pour la région extérieure à E, avec la valeur 1 sur E, et la valeur 0 à l'infini. Lorsque λ croit indéfiniment, $\frac{V(P)}{\lambda}$ tend vers zéro: la solution en question est donc nulle et par suite, l'ensemble E est bien un ensemble impropre. (Le fait que les surfaces $V = \lambda$ n'ont pas de point commun avec E joue un rôle essentiel.)

10. — Il est maintenant facile de montrer comment l'idée du nombre dimensionnel, qui joue ici le rôle principal, va nous permettre d'énoncer une condition suffisante pour qu'un ensemble fermé soit impropre. D'ailleurs un ensemble fermé est la somme d'un ensemble dénombrable, lequel est impropre et d'un ensemble parfait: nous pourrons donc raisonner sur un ensemble parfait.

Nous énoncerons d'abord la condition en question (et cela intentionnellement) sans faire intervenir explicitement le nombre dimensionnel:

THÉORÈME A. — *Un ensemble parfait* E *est toujours impropre, quand on peut y répartir des masses, de manière que chaque sphère de rayon* ρ *infiniment petit, ayant son centre en un point* Q *de* E, *contienne à son intérieur une masse* $\mu(\rho)$ *dont le quotient par* ρ^{n-2} *ne tende pas vers zéro.*

S'il y avait des masses finies en certains points de E, il est facile de voir qu'on pourrait les supprimer, sans que la répartition subsistante cesse de satisfaire à la condition de l'énoncé. Nous pourrons donc supposer que $\mu(\rho)$ tende vers zéro avec ρ.

Cela posé, du point Q comme centre, traçons une suite de sphères de rayons

$$\rho_0 > \rho_1 > \cdots > \rho_k > \cdots$$

qui tendent vers zéro. Par hypothèse, nous pouvons choisir cette suite de manière que l'expression

$$\frac{\mu(\rho_k)}{\rho_k^{n-2}}$$

reste supérieure à un nombre fixe a. A une distance $\rho_k/2$ de Q, le potentiel surpassera la somme des k premiers termes dans une série de terme général proportionnel à

$$\frac{\mu(\rho_{k-1}) - \mu(\rho_k)}{\rho_{k-1}^{n-2}}$$

dont le reste s'écrit

$$\frac{\mu(\rho_{k-1}) - \mu(\rho_k)}{\rho_{k-1}^{n-2}} + \frac{\mu(\rho_k) - \mu(\rho_{k+1})}{\rho_k^{n-2}} + \frac{\mu(\rho_{k+1}) - \mu(\rho_{k+2})}{\rho_{k+1}^{n-2}} + \dots$$

et surpasse la somme obtenue en remplaçant chaque dénominateur par ρ_{k-1}^{n-2}, c'est-à-dire dépasse

$$\frac{\mu(\rho_{k-1})}{\rho_{k-1}^{n-2}}.$$

Ainsi le reste de la série qui fournirait la limite en Q du potentiel ne tend pas vers zéro. Cette série est donc divergente. (C.Q.F.D.)

11. — Dans le même esprit, nous allons établir une proposition qui constitue une contre partie (mais non d'ailleurs une réciproque) de la précédente.

THÉORÈME B. — *Considérons une répartition de masses positives sur un ensemble parfait* E. *Supposons qu'une sphère, ayant pour centre un point* Q *de* E *et pour rayon une longueur* ρ *infiniment petite, contienne à son intérieur une masse* $\mu(\rho)$ *telle que,* h *étant un exposant positif* (d'ailleurs arbitrairement petit) *le rapport*

$$\mu(\rho) : \rho^{n-2+h}$$

tende vers zéro. Alors le potentiel est fini au point Q[1].

En effet, soit R le maximum de distance d'un point de E au point Q précédent. Il faut montrer que l'intégrale

$$\int_0^R \frac{d\mu(\rho)}{\rho^{n-2}}$$

[1] Ceci entraîne qu'il est *partout borné,* car P étant pris hors de E, on peut toujours lui faire correspondre un point Q de E tel que $MQ < 2\,MP$, pour tout point M de E.

a un sens. Intégrons de ε à R, en appelant ε une longueur infiniment petite. Nous aurons

$$\int_{\varepsilon}^{R} \frac{d\mu(\rho)}{\rho^{n-2}} = \left.\frac{\mu(\rho)}{\rho^{n-2}}\right|_{\varepsilon}^{R} + (n-2)\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\mu(\rho)\,d\rho}{\rho^{n-1}}$$

$$= \left[\frac{\mu(R)}{R^{n-2}} - \frac{\mu(\varepsilon)}{\varepsilon^{n-2}}\right] + (n-2)\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\mu(\rho)}{\rho^{n-2+h}}\,\frac{d\rho}{\rho^{1-h}}$$

sous cette forme, en vertu de l'hypothèse, le résultat annoncé est immédiat. (C.Q.F.D.)

D'une manière plus générale, on démontre par le même raisonnement ce théorème:

THÉORÈME B′. — *Si le rapport $\mu(\rho):\rho^{n-2}$ reste borné et si l'intégrale*

$$\int_{0}^{R} \frac{\mu(\rho)}{\rho^{n-2}}\,\frac{d\rho}{\rho}$$

a un sens, même conclusion.

Il est clair que B n'est qu'un cas particulier de B′, adapté à la pratique. Si, en chaque point de E, les conditions de B′ sont vérifiées, on est assuré qu'aucune portion de E n'est impropre. Soit Ω le domaine des points intérieurs à une sphère qui contient E, on peut affirmer que l'on a, en appelant G (A, P) la fonction de Green de Ω — E

$$\varliminf_{PQ=0} G(A, P) = 0 .$$

Grâce à B ou à B′, on pourra formuler sur la frontière Σ d'un domaine pour lequel on cherche à résoudre le problème de Dirichlet une légère restriction de généralité, telle qu'*a priori*, on soit assuré que cette frontière soit d'ores et déjà réduite, c'est-à-dire, débarrassé d'ensembles impropres.

12. — Avant de traduire au moyen du nombre dimensionnel les hypothèses des théorèmes précédents, nous allons voir ce qu'on peut tirer dans les cas particuliers signalés au chapitre I.

Supposons donc, simplement pour fixer les idées[1] que l'on

[1] Faisons remarquer à cette occasion que les théorèmes des Nos 9, 10, 11 ont été établis en supposant $n \geqq 3$, mais il serait facile de les étendre au cas de $n = 2$.

ait $n = 3$ et occupons-nous d'abord de l'exemple du n° 3. Sur cet ensemble on peut, ainsi que nous l'avons dit, répartir uniformément l'unité de masse. Pour cela, prenons sur chacune des arêtes OA, OB, OC un segment de même milieu et partageons le parallélipipède initial en 27 autres, en ne laissant subsister de ceux-ci que les 8 ayant un sommet commun avec le parallélipipède initial. Répétons sur chacun d'eux, à une transformation linéaire près (toujours la même, de directions principales OA, OB, OC) la même opération et ainsi de suite. A chaque opération, partageons la masse attribuée, lors d'un parallélipipède complet, en 8 parties égales que nous attribuerons respectivement aux 8 parallélipipèdes remplaçant le premier. Un point Q de l'ensemble peut toujours s'obtenir comme limite d'une suite de parallélipipèdes emboîtés: disons qu'un parallélipipède est de rang k s'il est obtenu après la k^e opération; il contient alors la masse $2^{\frac{1}{3k}}$ et a pour arêtes

$$a\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)^k \qquad b\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^k \qquad c\left(\frac{1-\nu}{2}\right)^k.$$

De Q comme centre décrivons une sphère de rayon ρ: la masse contenue dans cette sphère est comprise entre celles que contiendraient deux cubes de centre Q d'arêtes parallèles à OA, OB, OC et respectivement égales à ρ et 2ρ. Nous allons chercher l'ordre de grandeur de ces dernières masses. A cet effet, remarquons que, si l'on affecte chaque portion de l'ensemble (α) (projection de l'ensemble étudié sur OA) d'une masse égale à la somme des masses situées sur l'ensemble étudié et projetées sur cette portion de (α), on obtient une répartition uniforme sur (α). Donc, sur une portion de (α) de même ordre de grandeur que ρ (par exemple, comprise entre ρ et 2ρ) se projette une masse qui est de l'ordre de [1]

$$\rho^{\frac{\log 2}{\log \frac{2}{1-\lambda}}} = \rho^{\alpha}$$

[1] En effet, le sous-ensemble maximum de (α) semblable à (α) qui soit situé tout entier dans le segment de milieu q et de longueur ρ (ou aussi bien 2ρ) a un diamètre qui *est de l'ordre de* ρ, au sens précis donné à cette locution dans le texte. Alors, la masse portée par le segment en question est du même ordre que la masse portée par le sous-ensemble. Or un raisonnement de similitude montre immédiatement que cette dernière s'obtient en élevant la mesure du diamètre de ce sous-ensemble à la puissance $\alpha = \dfrac{\log 2}{\log \frac{2}{1-\lambda}}$.

ce qui signifie qu'elle est comprise entre deux limites de la forme

$$G\rho^{\alpha} \quad \text{et} \quad F\rho^{\alpha}$$

G et F désignant deux limites fixes. Par suite, dans cette acception, nous pouvons dire que la masse intérieure à la sphère en question est de l'ordre de

$$\rho^{\alpha+\beta+\gamma} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\log 2}{\log \frac{2}{1-\lambda}}$$

$$\beta = \frac{\log 2}{\log \frac{2}{1-\mu}}$$

$$\gamma = \frac{\log 2}{\log \frac{2}{1-\nu}}.$$

Supposons que l'on ait $\alpha + \beta + \gamma \leqq 1$. Le théorème A montre alors que l'ensemble construit sur OA, OB, OC à partir de (α), (β), (γ) est impropre.

Au contraire, si l'on a $\alpha + \beta + \gamma > 1$, le théorème B nous montre que cet ensemble a partout un potentiel newtonien borné: notamment, si l'on pose le problème de Dirichlet extérieur avec cet ensemble pris comme frontière, aucune partie de cette frontière ne sera impropre; autrement dit, *ipso facto*, cette frontière sera réduite.

13. — Prenons maintenant les exemples des n°s 4, 5 et 6, qui sont des courbes de Jordan, douées d'une métrique, attachée à un nombre dimensionnel δ surpassant l'unité. Considérons les répartitions uniformes de masses qu'on peut définir sur ces courbes. Par des raisonnements du même genre que les précédents, on pourra voir que la somme de ces masses intérieures à une sphère ayant pour centre un point Q d'une de ces courbes et pour rayon ρ sera de l'ordre de ρ^{δ} en appelant ρ le nombre dimensionnel. Du théorème B, il résulte donc encore que le potentiel newtonien de l'une de ces courbes demeure borné. On pourra par conséquent poser pour ces courbes (dont l'une est d'ailleurs identique à l'aire d'un carré) le problème de l'équilibre électrique.

De ces résultats, découlent des conséquences sur lesquelles il importe d'attirer l'attention. Supposons que l'on ait exprimé les coordonnées d'un point d'une des courbes précédentes sous la forme

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t)$$

le paramètre t étant choisi de manière qu'à des intervalles égaux de variation de t sur la courbe, correspondent des étendues égales. Alors, d'après ce qui précède, chaque intégrale

$$\int_{t_0-h}^{t_0+h} \frac{dt}{\sqrt{[x(t)-x(t_0)]^2+[y(t)-y(t_0)]^2+[z(t)-z(t_0)]^2}}$$

sera convergente: voilà une circonstance à laquelle nous n'étions pas habitués dans le champ des fonctions possédant une dérivée.

Si nous prenons plus spécialement la courbe citée au n° 4, ou la courbe de Peano, étudiée au n° 6, nous obtiendrons pour valeur du potentiel newtonien en un point d'une de ces courbes, en supposant que l'intervalle total de variation de t soit l'intervalle 0,1:

$$I_{x,y} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{[x(t)-x(t_0)]^2+[y(t)-y(t_0)]^2}} \qquad (0 \leqq t_0 \leqq 1)$$

L'intérêt de ce résultat s'accroît lorsqu'on le rapproche du suivant, essentiellement différent, obtenu par M. Paul Lévy[1]:

L'intégrale au premier abord analogue:

$$I_x = \int_0^1 \frac{dt}{|x(t)-x(t_0)|}$$

est infinie pour toutes les valeurs de t_0 *de l'intervalle* 0,1 *exception faite au plus sur un ensemble de mesure nulle.*

Il est d'ailleurs facile de comprendre les raisons de ce contraste. Ainsi que le remarque M. Paul Lévy, l'intégrale I_x ne dépend que de la fonction sommatoire de $x(t)$; on peut de ce fait se ramener

[1] *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2me série, t. 48, 1924, p. 359.

toujours au cas où $x(t)$ est non décroissante. Dès lors, soit p un entier quelconque; le rapport incrémental

$$\left|\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}\right|,$$

sera inférieur à p sauf sur un ensemble formé d'intervalles et dont la mesure totale sera moindre que le quotient par p de l'oscillation de $x(t)$. Le résultat annoncé en résulte.

Si nous passons maintenant à l'intégrale $I_{x,y}$, le même principe de raisonnement ne s'applique plus: il ne serait plus exact de dire que $I_{x,y}$ dépende seulement des fonctions sommatoires de $x(t)$, $y(t)$. On ne peut donc plus procéder dans la sommation à un groupement de termes analogue au précédent. Nos exemples nous ont bien montré d'ailleurs que les résultats alors obtenus sont essentiellement différents.

14. — Il est maintenant facile de systématiser ce qui précède. Considérons un ensemble parfait quelconque et supposons qu'on connaisse sur cet ensemble une répartition de masses conduisant à la propriété suivante: si d'un point Q de E comme centre, avec un rayon ρ infiniment petit, nous décrivons une sphère, la masse totale $\mu(\rho)$ intérieure à cette sphère soit d'un ordre qui demeure, sur tout l'ensemble E, intermédiaire entre celui de ρ^α et celui de $\rho^{\alpha+\beta}$, en appelant α et β des constantes positives. Nous dirons alors que l'ensemble a un nombre dimensionnel compris entre α et $\alpha + \beta$. Lorsque, d'une manière plus précise, la fonction $\mu(\rho)$ est de l'ordre de ρ^α, nous dirons que l'ensemble a pour nombre dimensionnel α.

En particulier si une ligne admet une tangente en chaque point, laquelle varie d'une manière continue, on peut montrer qu'en prenant une répartition uniforme de masses sur cette courbe, on obtient une fonction $\mu(\rho)$ du premier ordre. De même si une surface admet un champ continu de normales, on obtient une fonction $\mu(\rho)$ du second ordre, en prenant une répartition uniforme de masses sur la surface. Les variétés qui viennent d'être indiquées admettent donc bien les nombres dimensionnels 1 et 2. Toutefois, il importe de remarquer que si l'on prend une

ligne rectifiable (ou une surface quarrable) quelconque, il peut exister sur cette ligne (ou sur cette surface) des points exceptionnels pour lesquels la fonction $\mu(\rho)$ a un ordre infinitésimal inférieur à 1 (ou à 2), tout au moins lorsqu'on part de masses réparties avec une densité constante [1].

Il n'est nullement impossible que la valeur du nombre dimensionnel dépende du procédé de définition adopté.

Bornons-nous ici à noter la concordance dans un champ étendu et à faire remarquer que la définition précédente, basée sur l'ordre de la fonction $\mu(\rho)$, s'accorde avec les résultats concernant les exemples particuliers précédemment examinés et où des considérations de similitude permettent une autre définition du nombre dimensionnel.

A la faveur de cette concordance, au moins dans un champ étendu, les théorèmes A et B peuvent s'énoncer de la manière suivante:

1° Un ensemble parfait dont le nombre dimensionnel est partout $\leqq n - 2$ est impropre.

2° Un ensemble parfait dont le nombre dimensionnel surpasse partout $n - 2 + h$, où h est un nombre positif fixe, d'ailleurs arbitrairement petit, engendre pour les *répartitions normales* de masses sur cet ensemble (c'est-à-dire celles pour lesquelles $\mu(\rho)$ est partout d'un ordre infinitésimal compris entre des limites aussi resserrées que possible) un potentiel borné. Un tel ensemble constitue, au point de vue de la résolution du problème de Dirichlet, une frontière réduite [2].

Donc, au point de vue pratique, et compte tenu des difficultés que nous avons signalées concernant le mode de définition du nombre dimensionnel, difficultés qu'on évitera en cherchant à se ramener explicitement aux théorèmes A et B, le problème de la discrimination des ensembles impropres peut être regardé comme résolu.

Rappelons pour terminer que les ensembles impropres, dont

---

[1] Il serait intéressant d'examiner alors si, par des répartitions appropriées (c'est-à-dire convenablement atténuées autour des points exceptionnels précédents) on ne pourrait ramener partout l'ordre infinitésimal de $\mu(\rho)$ à la valeur 1 (ou à la valeur 2).

[2] Dans un article à l'impression au *Bulletin des Sciences mathématiques*, j'ai pu préciser les modalités relatives aux répartitions de masses et justifier complètement les deux énoncés ci-dessus.

nous nous sommes occupés ici et qui sont aussi les ensembles de capacité électro-statique nulle sont également ceux qui ne sauraient être ensembles de singularités pour une fonction harmonique bornée, ensembles au sujet desquels M. H. Lebesgue avait fait connaître des résultats importants [1].

FORMULES ELLIPTIQUES POUR LA RÉSOLUTION DE CERTAINES ÉQUATIONS DE FERMAT

PAR

Emile TURRIÈRE (Montpellier).

OBSERVATIONS PRÉLIMINAIRES SUR LES ÉQUATIONS DE FERMAT DANS LE CAS OÙ LE POLYNOME DU QUATRIÈME DEGRÉ A AU MOINS UN ZÉRO RATIONNEL.

1. — L'étude d'une équation indéterminée du quatrième degré de FERMAT

$$\alpha_0 z^4 + 4\alpha_1 z^3 + 6\alpha_2 z^2 + 4\alpha_3 z + \alpha_4 = y^2 ,$$

dont une solution particulière est connue *a priori*, se ramène tout d'abord, par une transformation homographique sur la variable z, à celle d'une équation du même type, mais avec $\alpha_0 = 1$:

$$x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 = X = \square ;$$

la solution connue z_0 est devenue la valeur infinie de la nouvelle variable x.

---

[1] *C. R.* Ac. Sc., t. 176, p. 1097, avril 1923.