

Zeitschrift:	L'Enseignement Mathématique
Herausgeber:	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band:	26 (1927)
Heft:	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
Artikel:	NOMBRE DIMENSIONNEL ET ENSEMBLES IMPROPRES DANS LE PROBLÈME DE DIRICHLET
Autor:	Bouligand, Georges
Kapitel:	Chapitre Premier. Ensembles, lignes et surfaces ayant des nombres dimensionnels variés.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-21255

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 24.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

inégalités, les ensembles étudiés pouvant de ce fait présenter une généralité beaucoup plus grande que les ensembles tombant sous le coup des considérations de M. Haussdorff, une moins grande homogénéité dans la structure se trouvait requise et par là, je me rapprochais du caractère presque complètement arbitraire des ensembles formant la frontière d'un domaine pour lequel on cherche à résoudre le problème de Dirichlet, par exemple.

Ces remarques permettront d'apercevoir de prime abord l'esprit dans lequel est rédigé le présent travail. Dans un premier chapitre, pour accoutumer le lecteur à la considération du nombre dimensionnel, nous avons formé différents exemples, aussi simples que possible, et qui de ce fait même, se rapportent à des ensembles partitifs. Ces exemples, intéressants par eux-mêmes, montrent notamment que les courbes rectifiables ne sont qu'un cas particulier d'une famille de courbes beaucoup plus générales, douées d'une métrique, fournissant une représentation intrinsèque.

Dans le second chapitre, nous montrons que la considération du nombre dimensionnel d'un ensemble permet, d'une manière incomplète, mais suffisante dans beaucoup d'applications, de caractériser les ensembles improches du problème de Dirichlet : on étudie pour cela l'allure du potentiel produit par une répartition de masses, placée sur l'ensemble donné, au voisinage de ces masses ; on obtient ainsi deux théorèmes (A et B), qui sont la contrepartie l'un de l'autre (sans qu'il y ait toutefois réciprocité). Malgré quoi, ces théorèmes sont souvent décisifs. Nous verrons en outre, en les appliquant aux exemples précédemment étudiés, qu'ils nous conduiront à des remarques importantes, relatives à la convergence de certaines intégrales dont l'élément devient infini (n° 13).

CHAPITRE PREMIER.

Ensembles, lignes et surfaces ayant des nombres dimensionnels variés.

3. — Pour donner accès aux considérations que nous allons exposer, il est opportun de présenter d'abord quelques exemples à la suite desquels apparaîtra mieux l'utilité des notions que nous aurons à introduire.

Nous avons déjà cité au n° 1 l'ensemble triadique de Cantor et avons montré comment une remarque de similitude permet immédiatement de prévoir son nombre dimensionnel.

C'est encore de remarques du même genre que prendront naissance les exemples qui vont suivre et où nous considérerons, au lieu d'ensembles partout discontinus, des lignes et des surfaces de Jordan. Toutefois, avant de passer à des continus, indiquons quelques suggestions émanant de l'exemple précédent.

Envisageons un parallélépipède rectangle construit sur trois vecteurs (deux à deux orthogonaux) OA, OB, OC. Sur OA comme base, avec λ pour rapport d'ablation (= rapport du segment enlevé au segment initial), construisons un premier ensemble triadique (α); faisons de même sur OB et sur OC comme bases, avec des rapports d'ablation respectivement égaux à μ et ν . Soient (β) et (γ) les ensembles ainsi obtenus; soit E l'ensemble des points projetés sur OA en quelque point de (α), sur OB en quelque point de (β), sur OC en quelque point de (γ). Lorsque $\lambda = \mu = \nu$, l'ensemble E appartient encore à la classe des ensembles partitifs admettant une infinité de sous-ensembles, de diamètre arbitrairement petit, semblables à l'ensemble total: On trouve ainsi son nombre dimensionnel

$$\delta = \frac{3 \log 2}{\log \frac{2}{1-\lambda}}$$

si λ, μ, ν sont distincts, l'ensemble E n'appartient plus à la classe précédente, mais à une classe plus vaste obtenue en substituant à la similitude une transformation linéaire. Il serait cependant facile, après avoir imposé au nombre dimensionnel de E, que nous désirons définir, quelques postulats géométriques très simples, de trouver sa valeur qui est ici

$$\delta = \frac{\log 2}{\log \frac{2}{1-\lambda}} + \frac{\log 2}{\log \frac{2}{1-\mu}} + \frac{\log 2}{\log \frac{2}{1-\nu}} .$$

En utilisant un autre mode de définition, ce fait sera d'ailleurs justifié plus loin (n° 12).

4. — Occupons-nous maintenant des lignes de Jordan. Il va sans dire qu'une ligne rectifiable, dans la théorie qui nous occupe,

devra jouer le rôle d'un ensemble partitif et avoir pour nombre dimensionnel l'unité.

Nous allons montrer la possibilité de définir des lignes dont le nombre dimensionnel dépasse l'unité. Dans ce but, nous utiliserons justement les mêmes remarques de similitude que précédemment. Nous définirons les courbes en question au moyen d'une suite de lignes polygonales inscrites: soit L_k la ligne polygonale inscrite d'ordre k ; nous nous conformerons aux conditions suivantes:

1^o Les sommets de L_k sont aussi des sommets de L_{k+1} , quel que soit k .

2^o La figure formée par un côté de L_k et le tronçon de L_{k+1} substitué à ce côté est définie à une similitude près.

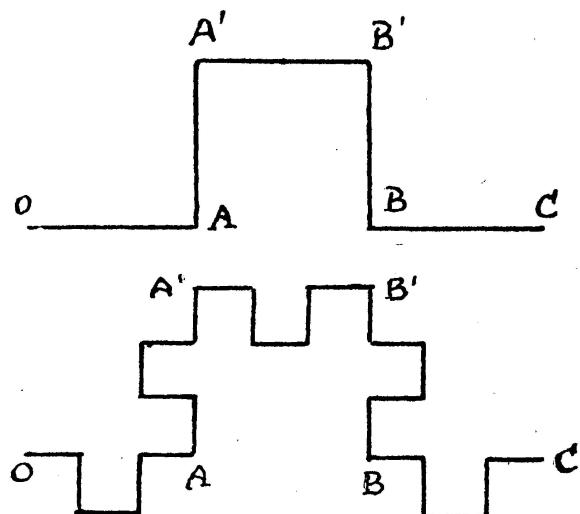


Fig. 1.

Par exemple, on divise l'unité de longueur OC (choisie pour L_1) en trois parties égales $OA = AB = BC$; sur AB on construit un carré; soit $A' B'$ le côté opposé à AB ; d'un côté de L_k , on passe au tronçon associé de L_{k+1} par une construction semblable à celle qui remplace OC par $OA A' B' BC$: ce contour polygonal sera justement notre ligne L_2 ; au-dessous de lui, sur le dessin ci-contre, nous avons représenté L_3 . On imagine ainsi facilement une succession de lignes crénelées tendant vers la courbe, et d'après le processus qui permet leur obtention, on pourra définir sur cette courbe des arcs d'étendue égale. La définition sera immédiate pour les arcs dont les extrémités ont été obtenues

comme sommets de lignes inscrites; ces sommets formant un ensemble partout dense sur la courbe en question, on passera facilement de ce cas particulier au cas général.

Notre courbe possède donc une métrique propre et, par suite, on peut y définir une répartition uniforme de masses. On voit de plus que lorsqu'on partage en 3 parties égales l'échelon de longueur OC, l'échelon associé d'étendue sur notre courbe (c'est-à-dire la totalité de celle-ci) se subdivise en 5 parties égales. Nous en déduisons comme précédemment que cette étendue se rapporte au nombre dimensionnel

$$\delta = \frac{\log 5}{\log 3} .$$

5. — Le processus que nous venons d'indiquer peut être varié de différentes manières, en conservant les deux conditions de liaison de L_{k+1} à L_k . Nous nous dispenserons d'insister s'il ne nous semblait intéressant d'attirer l'attention sur des cas particuliers qui se présentent dans cette théorie et qui en font mieux comprendre les aspects variés.

Prenons encore pour L_1 l'unité de longueur OC et partageons-la en 3 parties égales $OA = AB = BC$. Nous supposerons que L_2 est une ligne gauche, que nous avons représentée sur le dessin ci-contre en perspective: cette ligne a 9 côtés et la figure formée

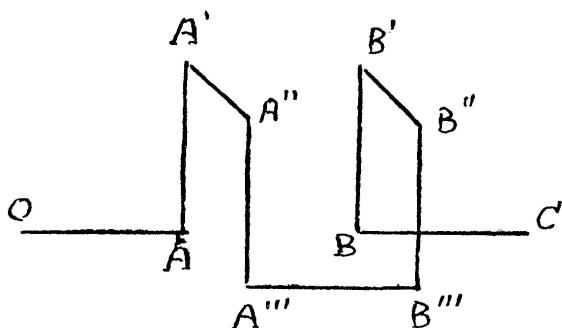


Fig. 2.

par A, B et les 6 sommets interpolés entre eux est un cube. Nous pouvons répéter sur cet exemple tout ce que nous avons dit à propos du précédent: le nombre dimensionnel aura ici pour valeur

$$\delta = \frac{\log 9}{\log 3} = 2 .$$

Cet exemple nous suggère l'existence de continus possédant un même nombre dimensionnel malgré leurs structures très différentes; tel est le cas du continu précédent d'une part, de l'ensemble des points d'un carré, d'autre part.

A cette occasion, remarquons que l'exemple indiqué au n° 3 permettrait d'obtenir des ensembles parfaits discontinus de nombre dimensionnel égal ou bien à 1, ou bien à 2: ces ensembles sont réalisés, dans un espace à 3 dimensions. Dans la théorie de la mesure de M. Lebesgue les ensembles parfaits discontinus mesurables en volume (auxquels on devra attribuer un nombre dimensionnel égal à 3) sont classiquement connus.

6. — Dans les exemples de courbes donnés au n°s 4 et 5, on peut disposer des indéterminées (subsistant aux conditions qui lient L_{k+1} à L_k) de manière à ce que les lignes obtenues soient sans point double.

D'ailleurs, la présence de points doubles serait ici sans importance. Il y a un exemple classique où de tels points existent et qu'on peut rattacher à nos considérations actuelles: c'est celui

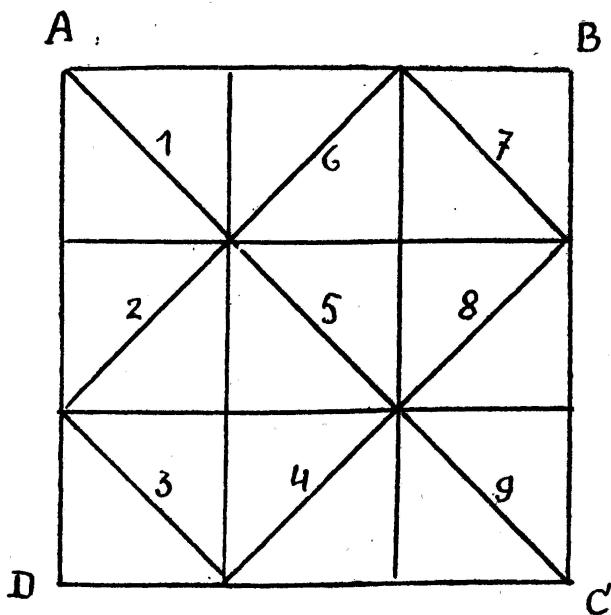


Fig. 3.

de la courbe de Peano. On obtient en effet une telle courbe par une construction respectant les deux conditions du n° 4. Soit ABCD un carré de côté égal à l'unité de longueur. On partage encore l'unité en trois parties égales, si nous prenons pour L_1 la

diagonale AC du carré, la seconde ligne polygonale inscrite L_2 sera formée avec des diagonales de nos carrés divisionnaires, prises dans l'ordre de succession indiqué par la figure. Pour passer d'une ligne inscrite à la suivante, on fera toujours sur chaque côté, à une similitude près, la même construction. Finalement, nous pourrons encore (quelque paradoxal que cela puisse sembler) définir sur la courbe de Peano ainsi construite des arcs de même étendue: on commencera par le cas, immédiatement résolu, d'arcs ayant leurs extrémités en des nœuds du réseau progressif, obtenu à partir du carré par subdivision ternaire indéfinie, on passera encore de là au cas général en remarquant que l'ensemble des nœuds précédents est partout dense sur la courbe de Peano. Bien entendu, le nombre dimensionnel est ici égal à 2.

6 bis. — Partant de la courbe étudiée au n° 4 ou de la courbe de Peano étudiée au n° 6, on pourrait en déduire dans l'espace des lignes analogues aux hélices. Soit M un point d'une de nos courbes planes: menant en M la perpendiculaire au plan de la courbe, on porterait sur cette perpendiculaire une longueur proportionnelle au paramètre qui définit d'une manière intrinsèque la position du point M sur la courbe. Il est facile de voir que les lignes brisées inscrites dans cette hélice généralisée, projetées sur le plan de la courbe initiale suivant les lignes L_k respectent les conditions auxquelles nous nous sommes conformés dans la construction de ces lignes. Il s'ensuit que l'on peut aussi définir sur ces hélices des répartitions uniformes de masses et que la projection d'une répartition uniforme sur l'hélice est encore une répartition uniforme sur la courbe initiale: l'hélice aura un nombre dimensionnel égal à celui de la courbe initiale¹.

7. — Les mêmes considérations permettent d'obtenir des surfaces de Jordan qui sont des ensembles partitifs dont les nombres

¹ Les résultats obtenus ici apportent, dans des cas particuliers, une contribution à ce problème:

Trouver une représentation paramétrique intrinsèque (c'est-à-dire invariante par le groupe des déplacements) d'une courbe de Jordan.

Ce problème a été résolu dans un tout autre sens, mais avec une entière et remarquable généralité par M. Maurice Fréchet (*Journ. de Math.*, t. 4, 1925, p. 281-297).

dimensionnels pourront prendre des valeurs variées. Nous définirons ces surfaces comme limites de suites de surfaces polyédrales, qui pour fixer les idées, respecteront les conditions suivantes :

1^o Chaque surface polyédrale Σ_k de notre suite a des facettes rectangulaires semblables, dont chaque arête est parallèle à l'un des trois axes de coordonnées (choisis orthogonaux) ;

2^o Les sommets de Σ_k sont encore sommets de Σ_{k+1} ;

3^o La figure formée par une facette de Σ_k et la figure polyédrale qui lui est substituée dans Σ_{k+1} est définie à une similitude près.

Par exemple, partant d'un carré (qui sera Σ_1) nous subdiviserons son arête en 3 parties égales, puis le carré se trouvant ainsi partagé en 9 autres, nous laisserons subsister ceux qui sont situés aux 4 coins et le carré central, les 4 autres se trouvant remplacés

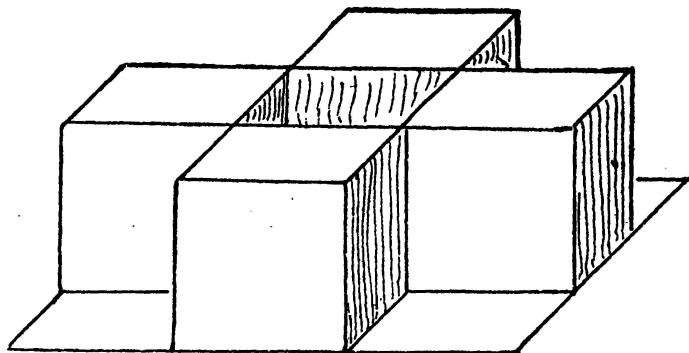


Fig. 4.

par des assemblages de facettes tels que chaque assemblage forme un cube avec la facette qu'il remplace : nous avons représenté ci-contre la forme de la surface Σ_2 ainsi obtenue. Cela posé, en itérant indéfiniment cette opération, nous pourrons obtenir une portion de surface, image topologique d'un carré : sur cette surface, on pourra définir des étendues égales, délimitées par des lignes fermées simples de Jordan : cela sera immédiat lorsque ces lignes seront des lignes brisées empruntant leurs arêtes aux facettes des surfaces polyédrales Σ_k . Comme toute ligne de notre surface finale est d'ailleurs la limite de telles lignes brisées, on généralise aisément la notion de l'étendue délimitée par une courbe simple de la surface, en spécifiant par exemple qu'il

s'agit soit du domaine ouvert, soit du domaine fermé qu'elle délimite. Cette étendue sera comparée à celle de la surface totale, prise pour unité (par exemple). Lorsqu'on subdivise l'unité de longueur en 3 parties égales, l'étalon de l'étendue actuellement considérée se subdivise en 25 parties égales. Le nombre dimensionnel est donc ici

$$\delta = \frac{\log 25}{\log 3} = 2 \frac{\log 5}{\log 3} . \quad \left(< \frac{\log 27}{\log 3} \right)$$

Indiquons sans insister qu'on pourrait beaucoup varier les considérations précédentes, et à l'exemple de ce que nous avons vu au n° 4, tirer parti de transformations linéaires qui supplanteraient les similitudes intervenues ici.

CHAPITRE II.

L'allure d'un potentiel au voisinage de l'ensemble potentiant. Application au problème de Dirichlet.

8. — Au cours des travaux récents sur le problème de Dirichlet, on a pris l'habitude de raisonner avec le maximum de généralité; on formule l'énoncé de la manière suivante:

Soit un domaine ouvert Ω (c'est-à-dire exclusivement composé de points intérieurs) tout entier à distance finie; soit Σ la frontière de ce domaine, dont on sait seulement:

- 1^o Qu'elle constitue un ensemble fermé;
- 2^o Qu'elle comprend nécessairement un continu externe.

On donne une fonction continue $f(Q)$ sur l'ensemble fermé Σ , et on cherche à trouver une fonction $F(P)$, harmonique dans Ω , et possédant en général, en chaque point de Σ , une valeur limite unique égale à $f(Q)$, l'ensemble des points exceptionnels étant aussi raréfié que possible.

J'ai présenté une étude détaillée de ce problème, envisagé avec ce degré de généralité dans mon mémoire des Annales de la Société Polonaise de Mathématique (t. IV, année 1925, p. 59-112), qui est en même temps la rédaction des leçons que j'ai faites sur cette question, pendant le dernier trimestre de 1925, à l'Université de Cracovie.