**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 26 (1927)

**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** NOMBRE DIMENSIQNNEL ET ENSEMBLES IMPROPRES DANS LE PROBLÈME DE DIRICHLET

**Autor:** Bouligand, Georges

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-21255

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

# NOMBRE DIMENSIONNEL ET ENSEMBLES IMPROPRES DANS LE PROBLÈME DE DIRICHLET

PAR

M. Georges BOULIGAND (Poitiers).

## INTRODUCTION.

1. — Il est important d'étudier l'allure d'un potentiel d'après la structure de l'ensemble potentiant et les caractères de la répartition des masses sur cet ensemble. C'est par cette affirmation que j'entamais la rédaction d'une courte note, intitulée: *Dimension, étendue, densité*, déposée en pli cacheté le 17 novembre 1924, cette note a été ouverte en séance par l'Académie des Sciences au début de 1925 [1]. M. Maurice FRÉCHET m'a presque aussitôt averti qu'en s'inspirant des idées de M. CARATHÉODORY sur le problème de la mesure [2], M. HAUSSDORFF avait déjà publié une étude profonde des mêmes questions [3].

J'avais appelé *ensembles partitifs* les ensembles sur lesquels il est possible de définir une répartition uniforme de masses. Ces ensembles étaient également ceux auxquels on pouvait étendre, avec M. Haussdorff, la théorie de la mesure, adaptée à une certaine valeur $\delta$ du nombre dimensionnel. La notion d'ensemble partitif n'avait d'ailleurs, pour les applications dont je m'occupais, qu'une importance limitée. Elle m'avait principalement servi à construire des exemples susceptibles de guider mes recherches: ainsi, je mentionnais dans la note citée l'ensemble triadique de Cantor, obtenu en enlevant d'un segment unitaire de droite un segment de même milieu, de longueur $\lambda < 1$, faisant sur chaque

---

[1] *C. R.*, t. 180, 1925, p. 245. Le présent travail emprunte ses éléments à cette note originelle et à une note récente (*C. R.*, t. 184, p. 430, fév. 1927).

[2] Ueber das lineare Mass von Punktmengen, *Göttingen Nachrichten*, 1914.

[3] Dimension und äusseres Mass (*Math. Ann.*, t. 79, 1918).

segment restant, à une homothétie près, la même ablation, et itérant indéfiniment cette opération. Pour un tel ensemble, la partitivité résulte immédiatement de l'existence de sous-ensembles semblables à l'ensemble total; si l'on fait une homothétie de rapport $\frac{1-\lambda}{2}$, qui fait passer du segment unitaire à l'un des segments subsistant après la première ablation, c'est-à-dire si l'on divise l'étalon de longueur par $\frac{2}{1-\lambda}$, la figure qu'il est naturel d'appeler: « *l'étalon associé* (c'est-à-dire construit sur l'unité de longueur) d'ÉTENDUE SUR L'ENSEMBLE » est divisée par 2. Le nombre dimensionnel $\delta$ doit donc être tel que l'on ait

$$\left(\frac{2}{1-\lambda}\right)^{\delta} = 2$$

relation qui s'écrit tout naturellement en étendant le processus suivant lesquels, dans les cas élémentaires (longueur, aire, volume) le nombre de dimensions réagit lors d'une similitude. Pour cet ensemble, on obtenait donc, moyennant la définition citée de $\delta$:

$$\delta = \frac{\log 2}{\log\left(\frac{2}{1-\lambda}\right)}.$$

Mais M. Haussdorff avait lui-même étudié cet exemple: bien plus, il avait considéré un type d'ensemble linéaire d'une très grande généralité, lui permettant de concrétiser cette idée que j'avais simplement donnée en remarque, dans la note citée: c'est que le clavier des nombres ordinaires pouvant devenir insuffisant (pareillement à ce qui se produit dans la théorie de la croissance) il y avait lieu d'introduire *un ordre dimensionnel* pour certains ensembles, tout comme M. Borel a introduit pour certaines fonctions un *ordre de croissance.*

Pour conclure, je me trouvais donc dispensé de publier le travail assez important résumé dans la note citée.

2. — Ainsi que je l'ai annoncé, la notion de mesure généralisée n'avait pour mes recherches qu'une importance assez minime. Il s'agissait seulement, pour les problèmes que j'avais en vue, d'exprimer que le nombre dimensionnel satisfaisait à certaines

inégalités, les ensembles étudiés pouvant de ce fait présenter une généralité beaucoup plus grande que les ensembles tombant sous le coup des considérations de M. Haussdorff, une moins grande homogénéité dans la structure se trouvait requise et par là, je me rapprochais du caractère presque complètement arbitraire des ensembles formant la frontière d'un domaine pour lequel on cherche à résoudre le problème de Dirichlet, par exemple.

Ces remarques permettront d'apercevoir de prime abord l'esprit dans lequel est rédigé le présent travail. Dans un premier chapitre, pour accoutumer le lecteur à la considération du nombre dimensionnel, nous avons formé différents exemples, aussi simples que possible, et qui de ce fait même, se rapportent à des ensembles partitifs. Ces exemples, intéressants par eux-mêmes, montrent notamment que les courbes rectifiables ne sont qu'un cas particulier d'une famille de courbes beaucoup plus générales, douées d'une métrique, fournissant une représentation intrinsèque.

Dans le second chapitre, nous montrons que la considération du nombre dimensionnel d'un ensemble permet, d'une manière incomplète, mais suffisante dans beaucoup d'applications, de caractériser les ensembles impropres du problème de Dirichlet: on étudie pour cela l'allure du potentiel produit par une répartition de masses, placée sur l'ensemble donné, au voisinage de ces masses; on obtient ainsi deux théorèmes (A et B), qui sont la contrepartie l'un de l'autre (sans qu'il y ait toutefois réciprocité). Malgré quoi, ces théorèmes sont souvent décisifs. Nous verrons en outre, en les appliquant aux exemples précédemment étudiés, qu'ils nous conduiront à des remarques importantes, relatives à la convergence de certaines intégrales dont l'élément devient infini (n° 13).

## Chapitre Premier.

### *Ensembles, lignes et surfaces ayant des nombres dimensionnels variés.*

3. — Pour donner accès aux considérations que nous allons exposer, il est opportun de présenter d'abord quelques exemples à la suite desquels apparaîtra mieux l'utilité des notions que nous aurons à introduire.

Nous avons déjà cité au n° 1 l'ensemble triadique de Cantor et avons montré comment une remarque de similitude permet immédiatement de prévoir son nombre dimensionnel.

C'est encore de remarques du même genre que prendront naissance les exemples qui vont suivre et où nous considérerons, au lieu d'ensembles partout discontinus, des lignes et des surfaces de Jordan. Toutefois, avant de passer à des continus, indiquons quelques suggestions émanant de l'exemple précédent.

Envisageons un parallélipipède rectangle construit sur trois vecteurs (deux à deux orthogonaux) OA, OB, OC. Sur OA comme base, avec $\lambda$ pour rapport d'ablation (= rapport du segment enlevé au segment initial), construisons un premier ensemble triadique $(\alpha)$; faisons de même sur OB et sur OC comme bases, avec des rapports d'ablation respectivement égaux à $\mu$ et $\nu$. Soient $(\beta)$ et $(\gamma)$ les ensembles ainsi obtenus; soit E l'ensemble des points projetés sur OA en quelque point de $(\alpha)$, sur OB en quelque point de $(\beta)$, sur OC en quelque point de $(\gamma)$. Lorsque $\lambda = \mu = \nu$, l'ensemble E appartient encore à la classe des ensembles partitifs admettant une infinité de sous-ensembles, de diamètre arbitrairement petit, semblables à l'ensemble total. On trouve ainsi son nombre dimensionnel

$$\delta = \frac{3 \log 2}{\log \frac{2}{1-\lambda}}$$

si $\lambda$, $\mu$, $\nu$ sont distincts, l'ensemble E n'appartient plus à la classe précédente, mais à une classe plus vaste obtenue en substituant à la similitude une transformation linéaire. Il serait cependant facile, après avoir imposé au nombre dimensionnel de E, que nous désirons définir, quelques postulats géométriques très simples, de trouver sa valeur qui est ici

$$\delta = \frac{\log 2}{\log \frac{2}{1-\lambda}} + \frac{\log 2}{\log \frac{2}{1-\mu}} + \frac{\log 2}{\log \frac{2}{1-\nu}} .$$

En utilisant un autre mode de définition, ce fait sera d'ailleurs justifié plus loin (n° 12).

4. — Occupons-nous maintenant des lignes de Jordan. Il va sans dire qu'une ligne rectifiable, dans la théorie qui nous occupe,

devra jouer le rôle d'un ensemble partitif et avoir pour nombre dimensionnel l'unité.

Nous allons montrer la possibilité de définir des lignes dont le nombre dimensionnel surpasse l'unité. Dans ce but, nous utiliserons justement les mêmes remarques de similitude que précédemment. Nous définirons les courbes en question au moyen d'une suite de lignes polygonales inscrites: soit $L_k$ la ligne polygonale inscrite d'ordre $k$; nous nous conformerons aux conditions suivantes:

1° Les sommets de $L_k$ sont aussi des sommets de $L_{k+1}$, quel que soit $k$.

2° La figure formée par un côté de $L_k$ et le tronçon de $L_{k+1}$ substitué à ce côté est définie à une similitude près.

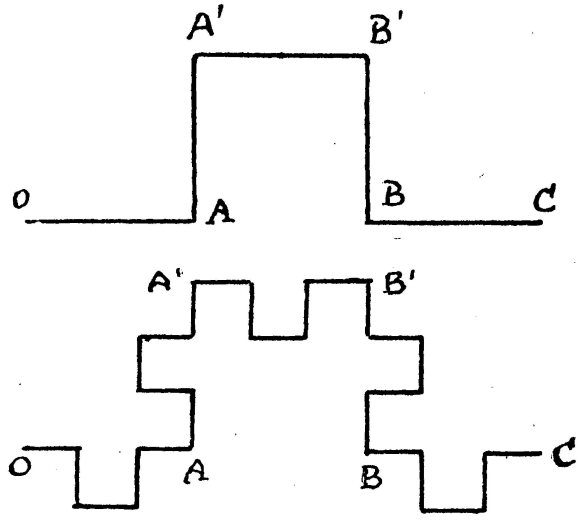


Fig. 1.

Par exemple, on divise l'unité de longueur OC (choisie pour $L_1$) en trois parties égales OA = AB = BC; sur AB on construit un carré; soit A′B′ le côté opposé à AB; d'un côté de $L_k$, on passe au tronçon associé de $L_{k+1}$ par une construction semblable à celle qui remplace OC par OA A′B′BC: ce contour polygonal sera justement notre ligne $L_2$; au-dessous de lui, sur le dessin ci-contre, nous avons représenté $L_3$. On imagine ainsi facilement une succession de lignes crénelées tendant vers la courbe, et d'après le processus qui permet leur obtention, on pourra définir sur cette courbe des arcs d'étendue égale. La définition sera immédiate pour les arcs dont les extrémités ont été obtenues

comme sommets de lignes inscrites; ces sommets formant un ensemble partout dense sur la courbe en question, on passera facilement de ce cas particulier au cas général.

Notre courbe possède donc une métrique propre et, par suite, on peut y définir une répartition uniforme de masses. On voit de plus que lorsqu'on partage en 3 parties égales l'étalon de longueur OC, l'étalon associé d'étendue sur notre courbe (c'est-à-dire la totalité de celle-ci) se subdivise en 5 parties égales. Nous en déduisons comme précédemment que cette étendue se rapporte au nombre dimensionnel

$$\delta = \frac{\log 5}{\log 3} .$$

5. — Le processus que nous venons d'indiquer peut être varié de différentes manières, en conservant les deux conditions de liaison de $L_{k+1}$ à $L_k$. Nous nous dispenserions d'insister s'il ne nous semblait intéressant d'attirer l'attention sur des cas particuliers qui se présentent dans cette théorie et qui en font mieux comprendre les aspects variés.

Prenons encore pour $L_1$ l'unité de longueur OC et partageons-la en 3 parties égales OA = AB = BC. Nous supposerons que $L_2$ est une ligne gauche, que nous avons représentée sur le dessin ci-contre en perspective: cette ligne a 9 côtés et la figure formée

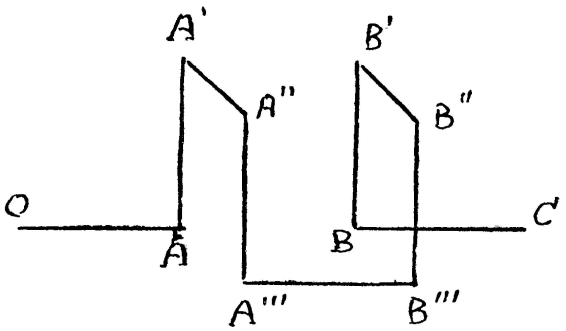


Fig. 2.

par A, B et les 6 sommets interpolés entre eux est un cube. Nous pouvons répéter sur cet exemple tout ce que nous avons dit à propos du précédent: le nombre dimensionnel aura ici pour valeur

$$\delta = \frac{\log 9}{\log 3} = 2 .$$

Cet exemple nous suggère l'existence de continus possédant un même nombre dimensionnel malgré leurs structures très différentes; tel est le cas du continu précédent d'une part, de l'ensemble des points d'un carré, d'autre part.

A cette occasion, remarquons que l'exemple indiqué au n° 3 permettrait d'obtenir des ensembles parfaits discontinus de nombre dimensionnel égal ou bien à 1, ou bien à 2: ces ensembles sont réalisés, dans un espace à 3 dimensions. Dans la théorie de la mesure de M. Lebesgue les ensembles parfaits discontinus mesurables en volume (auxquels on devra attribuer un nombre dimensionnel égal à 3) sont classiquement connus.

6. — Dans les exemples de courbes donnés au n$^{os}$ 4 et 5, on peut disposer des indéterminées (subsistant aux conditions qui lient $L_{k+1}$ à $L_k$) de manière à ce que les lignes obtenues soient sans point double.

D'ailleurs, la présence de points doubles serait ici sans importance. Il y a un exemple classique où de tels points existent et qu'on peut rattacher à nos considérations actuelles: c'est celui

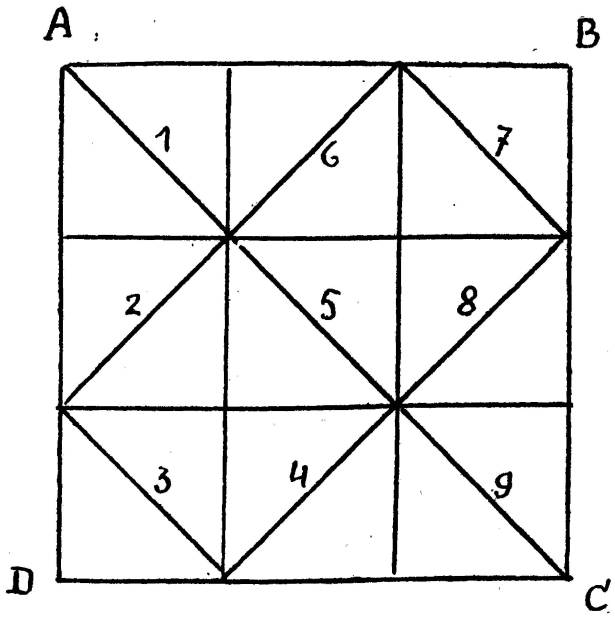


Fig. 3.

de la courbe de Peano. On obtient en effet une telle courbe par une construction respectant les deux conditions du n° 4. Soit ABCD un carré de côté égal à l'unité de longueur. On partage encore l'unité en trois parties égales, si nous prenons pour $L_1$ la

diagonale AC du carré, la seconde ligne polygonale inscrite $L_2$ sera formée avec des diagonales de nos carrés divisionnaires, prises dans l'ordre de succession indiqué par la figure. Pour passer d'une ligne inscrite à la suivante, on fera toujours sur chaque côté, à une similitude près, la même construction. Finalement, nous pourrons encore (quelque paradoxal que cela puisse sembler) définir sur la courbe de Peano ainsi construite des arcs de même étendue : on commencera par le cas, immédiatement résolu, d'arcs ayant leurs extrémités en des nœuds du réseau progressif, obtenu à partir du carré par subdivision ternaire indéfini, on passera encore de là au cas général en remarquant que l'ensemble des nœuds précédents est partout dense sur la courbe de Peano. Bien entendu, le nombre dimensionnel est ici égal à 2.

6 *bis*. — Partant de la courbe étudiée au n° 4 ou de la courbe de Peano étudiée au n° 6, on pourrait en déduire dans l'espace des lignes analogues aux hélices. Soit M un point d'une de nos courbes planes : menant en M la perpendiculaire au plan de la courbe, on porterait sur cette perpendiculaire une longueur proportionnelle au paramètre qui définit d'une manière intrinsèque la position du point M sur la courbe. Il est facile de voir que les lignes brisées inscrites dans cette hélice généralisée, projetées sur le plan de la courbe initiale suivant les lignes $L_k$ respectent les conditions auxquelles nous nous sommes conformés dans la construction de ces lignes. Il s'ensuit que l'on peut aussi définir sur ces hélices des répartitions uniformes de masses et que la projection d'une répartition uniforme sur l'hélice est encore une répartition uniforme sur la courbe initiale : l'hélice aura un nombre dimensionnel égal à celui de la courbe initiale [1].

7. — Les mêmes considérations permettent d'obtenir des surfaces de Jordan qui sont des ensembles partitifs dont les nombres

---

[1] Les résultats obtenus ici apportent, dans des cas particuliers, une contribution à ce problème :

Trouver une représentation paramétrique intrinsèque (c'est-à-dire invariante par le groupe des déplacements) d'une courbe de Jordan.

Ce problème a été résolu dans un tout autre sens, mais avec une entière et remarquable généralité par M. Maurice Fréchet (*Journ. de Math.*, t. 4, 1925, p. 281-297).

dimensionnels pourront prendre des valeurs variées. Nous définirons ces surfaces comme limites de suites de surfaces polyédrales, qui pour fixer les idées, respecteront les conditions suivantes:

1° Chaque surface polyédrale $\Sigma_k$ de notre suite a des facettes rectangulaires semblables, dont chaque arête est parallèle à l'un des trois axes de coordonnées (choisis orthogonaux);

2° Les sommets de $\Sigma_k$ sont encore sommets de $\Sigma_{k+1}$;

3° La figure formée par une facette de $\Sigma_k$ et la figure polyédrale qui lui est substituée dans $\Sigma_{k+1}$ est définie à une similitude près.

Par exemple, partant d'un carré (qui sera $\Sigma_1$) nous subdiviserons son arête en 3 parties égales, puis le carré se trouvant ainsi partagé en 9 autres, nous laisserons subsister ceux qui sont situés aux 4 coins et le carré central, les 4 autres se trouvant remplacés

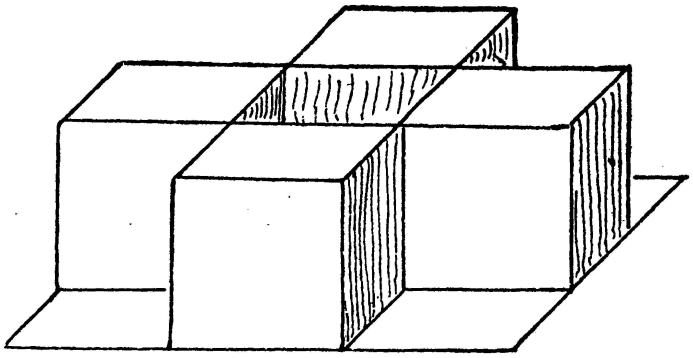

Fig. 4.

par des assemblages de facettes tels que chaque assemblage forme un cube avec la facette qu'il remplace: nous avons représenté ci-contre la forme de la surface $\Sigma_2$ ainsi obtenue. Cela posé, en itérant indéfiniment cette opération, nous pourrons obtenir une portion de surface, image topologique d'un carré: sur cette surface, on pourra définir des étendues égales, délimitées par des lignes fermées simples de Jordan: cela sera immédiat lorsque ces lignes seront des lignes brisées empruntant leurs arêtes aux facettes des surfaces polyédrales $\Sigma_k$. Comme toute ligne de notre surface finale est d'ailleurs la limite de telles lignes brisées, on généralise aisément la notion de l'étendue délimitée par une courbe simple de la surface, en spécifiant par exemple qu'il

s'agit soit du domaine ouvert, soit du domaine fermé qu'elle délimite. Cette étendue sera comparée à celle de la surface totale, prise pour unité (par exemple). Lorsqu'on subdivise l'unité de longueur en 3 parties égales, l'étalon de l'étendue actuellement considérée se subdivise en 25 parties égales. Le nombre dimensionnel est donc ici

$$\delta = \frac{\log 25}{\log 3} = 2\frac{\log 5}{\log 3} . \qquad \left(< \frac{\log 27}{\log 3}\right)$$

Indiquons sans insister qu'on pourrait beaucoup varier les considérations précédentes, et à l'exemple de ce que nous avons vu au n° 4, tirer parti de transformations linéaires qui supplanteraient les similitudes intervenues ici.

## Chapitre II.

### *L'allure d'un potentiel au voisinage de l'ensemble potentiant. Application au problème de Dirichlet.*

8. — Au cours des travaux récents sur le problème de Dirichlet, on a pris l'habitude de raisonner avec le maximum de généralité; on formule l'énoncé de la manière suivante:

Soit un domaine ouvert $\Omega$ (c'est-à-dire exclusivement composé de points intérieurs) tout entier à distance finie; soit $\Sigma$ la frontière de ce domaine, dont on sait seulement:

1° Qu'elle constitue un ensemble fermé;

2° Qu'elle comprend nécessairement un continu externe.

On donne une fonction continue $f(Q)$ sur l'ensemble fermé $\Sigma$. et on cherche à trouver une fonction F (P), harmonique dans $\Omega$, et possédant en général, en chaque point de $\Sigma$, une valeur limite unique égale à $f$ (Q), l'ensemble des points exceptionnels étant aussi raréfié que possible.

J'ai présenté une étude détaillée de ce problème, envisagé avec ce degré de généralité dans mon mémoire des Annales de la Société Polonaise de Mathématique (t. IV, année 1925, p. 59-112), qui est en même temps la rédaction des leçons que j'ai faites sur cette question, pendant le dernier trimestre de 1925, à l'Université de Cracovie.

Je ne rappellerai donc ici que quelques points, pour permettre une lecture autonome du présent travail. On peut, pour tout domaine ouvert $\Omega$, définir la fonction de Green $G(A, P)$: c'est la limite des fonctions de Green des domaines intérieurs à $\Omega$, pour lesquels le problème de Dirichlet est résoluble au sens classique (c'est-à-dire avec continuité de la solution dans $\Omega + \Sigma$). Cette limite existe et est harmonique, d'après le théorème de Harnack, et surpasse les fonctions de Green des domaines intérieurs, qui en sont des valeurs approchées. Cela posé, si $f(Q)$ est l'empreinte sur $\Sigma$ d'un polynome $\mathcal{F}(P)$, la solution du problème de Dirichlet est donnée, quel que soit le domaine $\Omega$, par la formule

$$F(P) = \mathcal{F}(P) + \frac{1}{(n-2)S_n} \int_\Omega \Delta\mathcal{F}(M)\, G(M, P)\, d\omega_M . \qquad (1)$$

De là, on passe aisément au cas général, grâce à ce théorème de M. H. Lebesgue d'après lequel toute fonction continue sur un ensemble fermé est l'empreinte d'une fonction continue dans tout l'espace et grâce au théorème de Weierstrass sur l'approximation des fonctions continues par polynômes.

9. — Cela posé, il y a lieu, étant donné un domaine quelconque $\Omega$ de considérer les points de la frontière $\Sigma$ où l'on a

$$\varliminf_{PQ \to 0} G(A, P) \neq 0 .$$

Ces points constituent la *partie impropre de la frontière* $\Sigma$: on peut les supprimer de manière à ce que la partie subsistante de la frontière soit encore la frontière d'un nouveau domaine et de manière à ce que la solution du problème de Dirichlet reste inchangée par cette ablation, les valeurs périphériques restant les mêmes.

Notre attention est donc attirée sur les ensembles impropres, c'est-à-dire ceux qui ne peuvent porter, d'une manière efficace, des données de Dirichlet bornées. C'est précisément pour discriminer ces ensembles que j'ai songé à introduire le nombre dimensionnel.

Nous établirons d'abord le théorème suivant:

*Pour qu'un ensemble fermé* E, *tout entier situé à distance finie, et dépourvu de points intérieurs*[1], *soit impropre, il suffit (cond. I) qu'en répartissant des masses positives sur* E, *de manière que chaque sphère centrée en un point de cet ensemble contienne à son intérieur une masse totale non nulle, la limite du potentiel en tout point de* E *soit* $+\infty$. *Il faut (cond. II) que sa limité supérieure soit* $+\infty$.

Montrons d'abord que la condition II est nécessaire. En effet, soit E un ensemble impropre. Répartissons sur cet ensemble des masses positives, de manière qu'une sphère, centrée en quelque point Q de E contienne à son intérieur une masse non nulle. Supposons un instant que la limite supérieure en Q du potentiel de cette répartition soit finie. Alors, nous pourrons trouver une sphère de centre Q telle que la même propriété soit satisfaite en tout point non extérieur à cette sphère: isolons cette partie $E_1$ de l'ensemble E, nous ne pouvons que diminuer le potentiel, qui restera donc borné; soit L la limite supérieure de ce nouveau potentiel. Considérons le problème de Dirichlet extérieur, pour le domaine qui s'étend à l'infini et dont la frontière est constituée par l'ensemble $E_1$; envisageons la solution attachée à la valeur L sur $E_1$ et évanescente à l'infini (solution qu'on peut encore définir au moyen du théorème de Harnack, en imitant ce que nous avons fait pour la fonction de Green). Cette solution devrait dépasser le potentiel précédent. Or puisque E est impropre, il en est de même *a fortiori* de $E_1$: elle est donc identiquement nulle. De cette contradiction, résulte bien que la condition

$$\overline{\lim_{PQ \to 0}} V(P) = +\infty .$$

est nécessaire.

La condition I est suffisante: en effet, si elle est remplie, les surfaces équipotentielles $V(P) = \lambda$ délimitent des domaines extérieurs s'étendant jusqu'à l'infini et définis par

$$V(P) < \lambda .$$

La fonction $\frac{V(P)}{\lambda}$ est la solution du problème de Dirichlet extérieur, relatif à l'un de ces domaines, solution attachée à la

[1] Si un ensemble E contenait des points intérieurs, l'ensemble (*i*) de ces points serait une somme de domaines ouverts. On raisonnerait sur E — *i* au lieu de raisonner directement sur E. Mon énoncé primitif du Mémoire cité des *Annales de la Soc. Pol.* était incorrect: je l'ai rectifié à la suite d'un échange de vues avec M. Vasilesco.

valeur 1 sur la frontière $V = \lambda$, et évanescente à l'infini. Lorsque les domaines vont en se dilatant de manière que leurs complémentaires tendent vers E, la suite des fonctions $\frac{V(P)}{\lambda}$ tend vers la solution du problème de Dirichlet pour la région extérieure à E, avec la valeur 1 sur E, et la valeur 0 à l'infini. Lorsque $\lambda$ croit indéfiniment, $\frac{V(P)}{\lambda}$ tend vers zéro: la solution en question est donc nulle et par suite, l'ensemble E est bien un ensemble impropre. (Le fait que les surfaces $V = \lambda$ n'ont pas de point commun avec E joue un rôle essentiel.)

10. — Il est maintenant facile de montrer comment l'idée du nombre dimensionnel, qui joue ici le rôle principal, va nous permettre d'énoncer une condition suffisante pour qu'un ensemble fermé soit impropre. D'ailleurs un ensemble fermé est la somme d'un ensemble dénombrable, lequel est impropre et d'un ensemble parfait: nous pourrons donc raisonner sur un ensemble parfait.

Nous énoncerons d'abord la condition en question (et cela intentionnellement) sans faire intervenir explicitement le nombre dimensionnel:

THÉORÈME A. — *Un ensemble parfait* E *est toujours impropre, quand on peut y répartir des masses, de manière que chaque sphère de rayon* $\rho$ *infiniment petit, ayant son centre en un point* Q *de* E, *contienne à son intérieur une masse* $\mu(\rho)$ *dont le quotient par* $\rho^{n-2}$ *ne tende pas vers zéro.*

S'il y avait des masses finies en certains points de E, il est facile de voir qu'on pourrait les supprimer, sans que la répartition subsistante cesse de satisfaire à la condition de l'énoncé. Nous pourrons donc supposer que $\mu(\rho)$ tende vers zéro avec $\rho$.

Cela posé, du point Q comme centre, traçons une suite de sphères de rayons

$$\rho_0 > \rho_1 > \cdots > \rho_k > \cdots$$

qui tendent vers zéro. Par hypothèse, nous pouvons choisir cette suite de manière que l'expression

$$\frac{\mu(\rho_k)}{\rho_k^{n-2}}$$

reste supérieure à un nombre fixe $a$. A une distance $\rho_k/2$ de Q, le potentiel surpassera la somme des $k$ premiers termes dans une série de terme général proportionnel à

$$\frac{\mu(\rho_{k-1}) - \mu(\rho_k)}{\rho_{k-1}^{n-2}}$$

dont le reste s'écrit

$$\frac{\mu(\rho_{k-1}) - \mu(\rho_k)}{\rho_{k-1}^{n-2}} + \frac{\mu(\rho_k) - \mu(\rho_{k+1})}{\rho_k^{n-2}} + \frac{\mu(\rho_{k+1}) - \mu(\rho_{k+2})}{\rho_{k+1}^{n-2}} + \dots$$

et surpasse la somme obtenue en remplaçant chaque dénominateur par $\rho_{k-1}^{n-2}$, c'est-à-dire dépasse

$$\frac{\mu(\rho_{k-1})}{\rho_{k-1}^{n-2}}.$$

Ainsi le reste de la série qui fournirait la limite en Q du potentiel ne tend pas vers zéro. Cette série est donc divergente. (C.Q.F.D.)

11. — Dans le même esprit, nous allons établir une proposition qui constitue une contre partie (mais non d'ailleurs une réciproque) de la précédente.

THÉORÈME B. — *Considérons une répartition de masses positives sur un ensemble parfait* E. *Supposons qu'une sphère, ayant pour centre un point* Q *de* E *et pour rayon une longueur* $\rho$ *infiniment petite, contienne à son intérieur une masse* $\mu(\rho)$ *telle que,* h *étant un exposant positif* (d'ailleurs arbitrairement petit) *le rapport*

$$\mu(\rho) : \rho^{n-2+h}$$

*tende vers zéro. Alors le potentiel est fini au point* Q[1].

En effet, soit R le maximum de distance d'un point de E au point Q précédent. Il faut montrer que l'intégrale

$$\int_0^R \frac{d\mu(\rho)}{\rho^{n-2}}$$

[1] Ceci entraîne qu'il est *partout borné,* car P étant pris hors de E, on peut toujours lui faire correspondre un point Q de E tel que $MQ < 2\,MP$, pour tout point M de E.

a un sens. Intégrons de $\varepsilon$ à R, en appelant $\varepsilon$ une longueur infiniment petite. Nous aurons

$$\int_{\varepsilon}^{R} \frac{d\mu(\rho)}{\rho^{n-2}} = \left.\frac{\mu(\rho)}{\rho^{n-2}}\right|_{\varepsilon}^{R} + (n-2)\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\mu(\rho)\,d\rho}{\rho^{n-1}}$$

$$= \left[\frac{\mu(R)}{R^{n-2}} - \frac{\mu(\varepsilon)}{\varepsilon^{n-2}}\right] + (n-2)\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\mu(\rho)}{\rho^{n-2+h}}\,\frac{d\rho}{\rho^{1-h}}$$

sous cette forme, en vertu de l'hypothèse, le résultat annoncé est immédiat. (C.Q.F.D.)

D'une manière plus générale, on démontre par le même raisonnement ce théorème:

THÉORÈME B′. — *Si le rapport $\mu(\rho):\rho^{n-2}$ reste borné et si l'intégrale*

$$\int_{0}^{R} \frac{\mu(\rho)}{\rho^{n-2}}\,\frac{d\rho}{\rho}$$

*a un sens, même conclusion.*

Il est clair que B n'est qu'un cas particulier de B′, adapté à la pratique. Si, en chaque point de E, les conditions de B′ sont vérifiées, on est assuré qu'aucune portion de E n'est impropre. Soit $\Omega$ le domaine des points intérieurs à une sphère qui contient E, on peut affirmer que l'on a, en appelant G (A, P) la fonction de Green de $\Omega$ — E

$$\varliminf_{PQ=0} G(A, P) = 0 .$$

Grâce à B ou à B′, on pourra formuler sur la frontière $\Sigma$ d'un domaine pour lequel on cherche à résoudre le problème de Dirichlet une légère restriction de généralité, telle qu'*a priori*, on soit assuré que cette frontière soit d'ores et déjà réduite, c'est-à-dire, débarrassé d'ensembles impropres.

12. — Avant de traduire au moyen du nombre dimensionnel les hypothèses des théorèmes précédents, nous allons voir ce qu'on peut tirer dans les cas particuliers signalés au chapitre I.

Supposons donc, simplement pour fixer les idées[1] que l'on

[1] Faisons remarquer à cette occasion que les théorèmes des Nos 9, 10, 11 ont été établis en supposant $n \geqq 3$, mais il serait facile de les étendre au cas de $n = 2$.

ait $n = 3$ et occupons-nous d'abord de l'exemple du n° 3. Sur cet ensemble on peut, ainsi que nous l'avons dit, répartir uniformément l'unité de masse. Pour cela, prenons sur chacune des arêtes OA, OB, OC un segment de même milieu et partageons le parallélipipède initial en 27 autres, en ne laissant subsister de ceux-ci que les 8 ayant un sommet commun avec le parallélipipède initial. Répétons sur chacun d'eux, à une transformation linéaire près (toujours la même, de directions principales OA, OB, OC) la même opération et ainsi de suite. A chaque opération, partageons la masse attribuée, lors d'un parallélipipède complet, en 8 parties égales que nous attribuerons respectivement aux 8 parallélipipèdes remplaçant le premier. Un point Q de l'ensemble peut toujours s'obtenir comme limite d'une suite de parallélipipèdes emboîtés: disons qu'un parallélipipède est de rang $k$ s'il est obtenu après la $k^e$ opération; il contient alors la masse $2^{\frac{1}{3k}}$ et a pour arêtes

$$a\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)^k \qquad b\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^k \qquad c\left(\frac{1-\nu}{2}\right)^k.$$

De Q comme centre décrivons une sphère de rayon $\rho$: la masse contenue dans cette sphère est comprise entre celles que contiendraient deux cubes de centre Q d'arêtes parallèles à OA, OB, OC et respectivement égales à $\rho$ et $2\rho$. Nous allons chercher l'ordre de grandeur de ces dernières masses. A cet effet, remarquons que, si l'on affecte chaque portion de l'ensemble $(\alpha)$ (projection de l'ensemble étudié sur OA) d'une masse égale à la somme des masses situées sur l'ensemble étudié et projetées sur cette portion de $(\alpha)$, on obtient une répartition uniforme sur $(\alpha)$. Donc, sur une portion de $(\alpha)$ de même ordre de grandeur que $\rho$ (par exemple, comprise entre $\rho$ et $2\rho$) se projette une masse qui est de l'ordre de [1]

$$\rho^{\frac{\log 2}{\log \frac{2}{1-\lambda}}} = \rho^{\alpha}$$

[1] En effet, le sous-ensemble maximum de $(\alpha)$ semblable à $(\alpha)$ qui soit situé tout entier dans le segment de milieu $q$ et de longueur $\rho$ (ou aussi bien $2\rho$) a un diamètre qui *est de l'ordre de* $\rho$, au sens précis donné à cette locution dans le texte. Alors, la masse portée par le segment en question est du même ordre que la masse portée par le sous-ensemble. Or un raisonnement de similitude montre immédiatement que cette dernière s'obtient en élevant la mesure du diamètre de ce sous-ensemble à la puissance $\alpha = \dfrac{\log 2}{\log \frac{2}{1-\lambda}}$.

ce qui signifie qu'elle est comprise entre deux limites de la forme

$$G\rho^{\alpha} \quad \text{et} \quad F\rho^{\alpha}$$

G et F désignant deux limites fixes. Par suite, dans cette acception, nous pouvons dire que la masse intérieure à la sphère en question est de l'ordre de

$$\rho^{\alpha+\beta+\gamma} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\log 2}{\log \frac{2}{1-\lambda}}$$

$$\beta = \frac{\log 2}{\log \frac{2}{1-\mu}}$$

$$\gamma = \frac{\log 2}{\log \frac{2}{1-\nu}}.$$

Supposons que l'on ait $\alpha + \beta + \gamma \leqq 1$. Le théorème A montre alors que l'ensemble construit sur OA, OB, OC à partir de $(\alpha)$, $(\beta)$, $(\gamma)$ est impropre.

Au contraire, si l'on a $\alpha + \beta + \gamma > 1$, le théorème B nous montre que cet ensemble a partout un potentiel newtonien borné: notamment, si l'on pose le problème de Dirichlet extérieur avec cet ensemble pris comme frontière, aucune partie de cette frontière ne sera impropre; autrement dit, *ipso facto*, cette frontière sera réduite.

13. — Prenons maintenant les exemples des n$^{os}$ 4, 5 et 6, qui sont des courbes de Jordan, douées d'une métrique, attachée à un nombre dimensionnel $\delta$ surpassant l'unité. Considérons les répartitions uniformes de masses qu'on peut définir sur ces courbes. Par des raisonnements du même genre que les précédents, on pourra voir que la somme de ces masses intérieures à une sphère ayant pour centre un point Q d'une de ces courbes et pour rayon $\rho$ sera de l'ordre de $\rho^{\delta}$ en appelant $\rho$ le nombre dimensionnel. Du théorème B, il résulte donc encore que le potentiel newtonien de l'une de ces courbes demeure borné. On pourra par conséquent poser pour ces courbes (dont l'une est d'ailleurs identique à l'aire d'un carré) le problème de l'équilibre électrique.

De ces résultats, découlent des conséquences sur lesquelles il importe d'attirer l'attention. Supposons que l'on ait exprimé les coordonnées d'un point d'une des courbes précédentes sous la forme

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t)$$

le paramètre $t$ étant choisi de manière qu'à des intervalles égaux de variation de $t$ sur la courbe, correspondent des étendues égales. Alors, d'après ce qui précède, chaque intégrale

$$\int_{t_0-h}^{t_0+h} \frac{dt}{\sqrt{[x(t)-x(t_0)]^2+[y(t)-y(t_0)]^2+[z(t)-z(t_0)]^2}}$$

sera convergente: voilà une circonstance à laquelle nous n'étions pas habitués dans le champ des fonctions possédant une dérivée.

Si nous prenons plus spécialement la courbe citée au n° 4, ou la courbe de Peano, étudiée au n° 6, nous obtiendrons pour valeur du potentiel newtonien en un point d'une de ces courbes, en supposant que l'intervalle total de variation de $t$ soit l'intervalle 0,1:

$$I_{x,y} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{[x(t)-x(t_0)]^2+[y(t)-y(t_0)]^2}} \qquad (0 \leqq t_0 \leqq 1)$$

L'intérêt de ce résultat s'accroît lorsqu'on le rapproche du suivant, essentiellement différent, obtenu par M. Paul Lévy[1]:

*L'intégrale au premier abord analogue:*

$$I_x = \int_0^1 \frac{dt}{|x(t)-x(t_0)|}$$

*est infinie pour toutes les valeurs de* $t_0$ *de l'intervalle* 0,1 *exception faite au plus sur un ensemble de mesure nulle.*

Il est d'ailleurs facile de comprendre les raisons de ce contraste. Ainsi que le remarque M. Paul Lévy, l'intégrale $I_x$ ne dépend que de la fonction sommatoire de $x(t)$; on peut de ce fait se ramener

[1] *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2me série, t. 48, 1924, p. 359.

toujours au cas où $x(t)$ est non décroissante. Dès lors, soit $p$ un entier quelconque; le rapport incrémental

$$\left|\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}\right|,$$

sera inférieur à $p$ sauf sur un ensemble formé d'intervalles et dont la mesure totale sera moindre que le quotient par $p$ de l'oscillation de $x(t)$. Le résultat annoncé en résulte.

Si nous passons maintenant à l'intégrale $I_{x,y}$, le même principe de raisonnement ne s'applique plus: il ne serait plus exact de dire que $I_{x,y}$ dépende seulement des fonctions sommatoires de $x(t)$, $y(t)$. On ne peut donc plus procéder dans la sommation à un groupement de termes analogue au précédent. Nos exemples nous ont bien montré d'ailleurs que les résultats alors obtenus sont essentiellement différents.

14. — Il est maintenant facile de systématiser ce qui précède. Considérons un ensemble parfait quelconque et supposons qu'on connaisse sur cet ensemble une répartition de masses conduisant à la propriété suivante: si d'un point Q de E comme centre, avec un rayon $\rho$ infiniment petit, nous décrivons une sphère, la masse totale $\mu(\rho)$ intérieure à cette sphère soit d'un ordre qui demeure, sur tout l'ensemble E, intermédiaire entre celui de $\rho^\alpha$ et celui de $\rho^{\alpha+\beta}$, en appelant $\alpha$ et $\beta$ des constantes positives. Nous dirons alors que l'ensemble a un nombre dimensionnel compris entre $\alpha$ et $\alpha + \beta$. Lorsque, d'une manière plus précise, la fonction $\mu(\rho)$ est de l'ordre de $\rho^\alpha$, nous dirons que l'ensemble a pour nombre dimensionnel $\alpha$.

En particulier si une ligne admet une tangente en chaque point, laquelle varie d'une manière continue, on peut montrer qu'en prenant une répartition uniforme de masses sur cette courbe, on obtient une fonction $\mu(\rho)$ du premier ordre. De même si une surface admet un champ continu de normales, on obtient une fonction $\mu(\rho)$ du second ordre, en prenant une répartition uniforme de masses sur la surface. Les variétés qui viennent d'être indiquées admettent donc bien les nombres dimensionnels 1 et 2. Toutefois, il importe de remarquer que si l'on prend une

ligne rectifiable (ou une surface quarrable) quelconque, il peut exister sur cette ligne (ou sur cette surface) des points exceptionnels pour lesquels la fonction $\mu(\rho)$ a un ordre infinitésimal inférieur à 1 (ou à 2), tout au moins lorsqu'on part de masses réparties avec une densité constante [1].

Il n'est nullement impossible que la valeur du nombre dimensionnel dépende du procédé de définition adopté.

Bornons-nous ici à noter la concordance dans un champ étendu et à faire remarquer que la définition précédente, basée sur l'ordre de la fonction $\mu(\rho)$, s'accorde avec les résultats concernant les exemples particuliers précédemment examinés et où des considérations de similitude permettent une autre définition du nombre dimensionnel.

A la faveur de cette concordance, au moins dans un champ étendu, les théorèmes A et B peuvent s'énoncer de la manière suivante:

1° Un ensemble parfait dont le nombre dimensionnel est partout $\leqq n - 2$ est impropre.

2° Un ensemble parfait dont le nombre dimensionnel surpasse partout $n - 2 + h$, où $h$ est un nombre positif fixe, d'ailleurs arbitrairement petit, engendre pour les *répartitions normales* de masses sur cet ensemble (c'est-à-dire celles pour lesquelles $\mu(\rho)$ est partout d'un ordre infinitésimal compris entre des limites aussi resserrées que possible) un potentiel borné. Un tel ensemble constitue, au point de vue de la résolution du problème de Dirichlet, une frontière réduite [2].

Donc, au point de vue pratique, et compte tenu des difficultés que nous avons signalées concernant le mode de définition du nombre dimensionnel, difficultés qu'on évitera en cherchant à se ramener explicitement aux théorèmes A et B, le problème de la discrimination des ensembles impropres peut être regardé comme résolu.

Rappelons pour terminer que les ensembles impropres, dont

---

[1] Il serait intéressant d'examiner alors si, par des répartitions appropriées (c'est-à-dire convenablement atténuées autour des points exceptionnels précédents) on ne pourrait ramener partout l'ordre infinitésimal de $\mu(\rho)$ à la valeur 1 (ou à la valeur 2).

[2] Dans un article à l'impression au *Bulletin des Sciences mathématiques*, j'ai pu préciser les modalités relatives aux répartitions de masses et justifier complètement les deux énoncés ci-dessus.

nous nous sommes occupés ici et qui sont aussi les ensembles de capacité électro-statique nulle sont également ceux qui ne sauraient être ensembles de singularités pour une fonction harmonique bornée, ensembles au sujet desquels M. H. Lebesgue avait fait connaître des résultats importants [1].

---

# FORMULES ELLIPTIQUES POUR LA RÉSOLUTION DE CERTAINES ÉQUATIONS DE FERMAT

PAR

Emile TURRIÈRE (Montpellier).

---

## OBSERVATIONS PRÉLIMINAIRES SUR LES ÉQUATIONS DE FERMAT DANS LE CAS OÙ LE POLYNOME DU QUATRIÈME DEGRÉ A AU MOINS UN ZÉRO RATIONNEL.

1. — L'étude d'une équation indéterminée du quatrième degré de FERMAT

$$\alpha_0 z^4 + 4\alpha_1 z^3 + 6\alpha_2 z^2 + 4\alpha_3 z + \alpha_4 = y^2 ,$$

dont une solution particulière est connue *a priori*, se ramène tout d'abord, par une transformation homographique sur la variable $z$, à celle d'une équation du même type, mais avec $\alpha_0 = 1$:

$$x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 = X = \square ;$$

la solution connue $z_0$ est devenue la valeur infinie de la nouvelle variable $x$.

---

[1] *C. R.* Ac. Sc., t. 176, p. 1097, avril 1923.