Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 26 (1927)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA THÉORIE DES GROUPES ET LA GÉOMÉTRIE

Autor: Cartan, E.

Kapitel: XI

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21253

courbure riemannienne partout négative ou nulle; dans chaque classe on n'a du reste essentiellement qu'un seul espace, car on passe de l'un à l'autre en changeant simplement l'unité de longueur.

C'est surtout des espaces $\mathcal{E}$ à courbure négative que je vous parlerai. Tous ces espaces ont une métrique partout régulière; ils sont simplement connexes et jouissent de la propriété que par deux points quelconques il passe une géodésique et une seule. Chacun d'eux admet un groupe des déplacements qui est tout simplement le groupe complexe ou réel non unitaire auquel il correspond: dans le premier cas son groupe des déplacements est à $2r$ paramètres réels, dans le second cas il n'est qu'à r paramètres réels. Le groupe des déplacements des espaces $\mathcal{E}$ à courbure positive est au contraire toujours le groupe réel unitaire correspondant. Pour les uns et les autres le groupe des rotations isométriques autour d'un point (groupe d'isotropie) est simple unitaire ou se décompose en groupes simples unitaires.

XI

Je signalerai seulement deux problèmes de la théorie des groupes que la considération des espaces $\mathcal{E}$ permet d'aborder avec succès.

On sait que, pour S. Lie, tout groupe continu est engendré par des transformations infinitésimales; en fait toute transformation finie suffisamment voisine de la transformation identique peut être obtenue en répétant une infinité de fois une même transformation infiniment petite, de même qu'une rotation d'un angle fini α autour d'un axe peut être obtenu en répétant une infinité de fois une rotation d'un angle infiniment petit autour de cet axe. Mais il y a des cas où toute une partie des transformations finies du groupe échappe à cette génération. Par exemple la substitution unimodulaire réelle à trois variables

$$x' = ax, \quad y' = by, \quad z' = cz, \quad (abc = 1)$$

où a est positif, b et c sont négatifs, ne peut pas être engendrée par une substitution linéaire réelle infinitésimale.

Pour les structures simples en particulier, le groupe complexe et le groupe réel unitaire s'engendrent complètement au moyen de leurs transformations infinitésimales, tandis qu'il n'en est plus de même en général pour les groupes réels non unitaires. Il est vrai que toute transformation finie peut être regardée comme le produit d'un certain nombre de transformations admettant chacune une transformation infinitésimale génératrice, mais on ne sait pas *a priori* si ce nombre est borné. Or l'existence des espaces $\mathcal{E}$ à courbure négative nous donne à cet égard un renseignement précis et très simple.

Soit en effet G un groupe réel non unitaire et $\mathcal{E}$ l'espace à courbure négative dont G est le groupe des déplacements. Fixons un point O de l'espace. Parmi les déplacements de l'espace nous distinguerons les rotations autour de O et les *transvections :* je désigne sous ce nom un déplacement dans lequel une géodésique glisse sur elle-même, les vecteurs issus de ses points se transportant parallèlement à eux-mêmes au sens de Levi-Civita ; la géodésique considérée sera dite la *base* de la transvection. Cela posé tout déplacement peut être décomposé d'une manière et d'une seule en une rotation autour de O et une transvection ayant pour base une géodésique passant par O. Or chacun de ces déplacements composants admet un déplacement infinitésimal générateur (rotation ou transvection infinitésimale). Par suite toute transformation finie de G peut être décomposée d'une manière et d'une seule en deux transformations admettant chacune une transformation infinitésimale génératrice. Par exemple toute substitution linéaire unimodulaire réelle peut être décomposée d'une manière et d'une seule en une substitution orthogonale et une substitution symétrique positive (c'est-à-dire dont l'équation *séculaire* ait toutes ses racines réelles et positives).

XII

Le second problème que je voulais signaler est le suivant. J'ai dit qu'à une structure (infinitésimale) donnée correspondent une infinité de groupes G, mais qui sont tous isomorphes entre eux. Cela n'est pas absolument exact si l'on considère le domaine