

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 26 (1927)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA THÉORIE DES GROUPES ET LA GÉOMÉTRIE
Autor: Cartan, E.
Kapitel: VII
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-21253>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 19.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

tielle du second ordre vis-à-vis du groupe des transformations ponctuelles les plus générales.

Dans l'exemple précédent l'espace était un lieu d'éléments de contact; le groupe fondamental était le groupe de transformations de contact résultant du prolongement, au sens de Lie, du groupe projectif ponctuel. Il n'y a naturellement aucune difficulté à partir d'un groupe de transformations de contact irréductible quelconque, par exemple le groupe des transformations de contact qui changent les sphères orientées en sphères orientées; on bâtitrait avec lui des espaces non holonomes, en prenant comme élément générateur l'élément de contact par exemple, ou encore la sphère orientée, etc.

VII

Les espaces non holonomes ont été envisagées jusqu'ici *in abstracto*; la connexion qui sert à les définir est une loi interne. C'est H. Weyl qui le premier a défini le transport par parallélisme par une propriété interne de l'espace. Levi-Civita se plaçait au contraire à un point de vue tout différent qui, bien qu'inférieur philosophiquement à celui de Weyl, a une très grande importance en Géométrie; il se rattache à la théorie générale des connexions induites dont je dirai seulement quelques mots.

Avant d'indiquer la manière de procéder de Levi-Civita, nous pouvons la faire pressentir sur un exemple extrêmement élémentaire. Considérons une courbe tracée dans un plan ordinaire (euclidien); la présence de la courbe dans le plan permet de définir sur cette courbe une abscisse curviligne. Oublions maintenant que la courbe est dans le plan et considérons-la en elle-même; rien ne la distingue d'une droite euclidienne; la formule de Chasles qui lie les abscisses de trois points d'une droite lie également les abscisses curvilignes de trois points de la courbe. La présence de la courbe dans le plan euclidien nous a donc donné le moyen de faire de cette courbe un espace euclidien à 1 dimension. Nous pouvons du reste nous représenter physiquement le mécanisme de l'opération en déroulant ou développant la courbe sur une de ses tangentes; nous pouvons aussi définir chaque stade

infinitésimal de ce développement en faisant correspondre à tout point M infiniment voisin d'un point A le point M' de la tangente en A qui est la projection orthogonale de M .

Si nous prenons maintenant une surface plongée dans l'espace ordinaire, nous pourrons de même essayer de développer la surface sur le plan tangent en un de ses points A . Si la surface est développable, le développement sera possible; sinon on pourra toujours l'effectuer le long d'un arc de courbe AB , ce qui revient à développer la surface développable circonscrite à la surface le long de AB , mais le développement le long d'un autre arc de courbe joignant A à B ne conduirait pas au même résultat final: le développement n'est pas holonome. Nous pouvons donc regarder la surface plongée dans l'espace euclidien comme un plan euclidien non holonome; l'intégration en un seul même plan euclidien des points infiniment voisins de A et des vecteurs issus de ces points peut s'obtenir très simplement par projection orthogonale de la surface sur le plan tangent en A . Là encore la présence de la surface dans l'espace euclidien permet de doter la surface d'une connexion euclidienne *induite*; si nous oublions ensuite l'espace ambiant pour ne considérer que la surface en elle-même avec la connexion euclidienne que nous lui avons attribuée, nous obtenons tout simplement un espace de Riemann à deux dimensions, dont le ds^2 est celui de la surface, avec le transport par parallélisme de Levi-Civita: deux vecteurs tangents issus de A et de M sont parallèles si la projection du second sur le plan tangent en A est parallèle au premier vecteur. Nous remarquerons que l'espace euclidien (ici plan euclidien) tangent en un point, a maintenant une signification *concrète*, tandis que du premier point de vue, il est purement fictif.

La notion de connexion induite peut être appliquée de beaucoup de manières différentes et elle semble devoir jouer un rôle très important dans les théories géométriques classiques. J'en citerai quelques exemples simples.

Prenons, en Géométrie conforme plane, une courbe quelconque (G); on peut développer cette courbe sur le cercle osculateur en un de ses points, autrement dit on peut regarder la courbe comme un espace conforme à une dimension (cercle). Le développement ne se fait naturellement pas au sens ordinaire, métrique du mot,

avec conservation des longueurs d'arcs, puisque la longueur d'un arc n'a pas de sens en Géométrie conforme. Les choses peuvent être présentées d'une manière peu rigoureuse, mais assez élémentaire. Prenons sur la courbe trois points très voisins A, A_1, A_2 ; ils peuvent être regardés comme appartenant au cercle osculateur à la courbe en A ; soit maintenant A_3 un quatrième point très voisin des trois premiers; la droite qui joint le centre du cercle osculateur au point A_3 coupe ce cercle en un point A'_3 qu'on fera correspondre à A_3 dans le développement de la courbe; on pourra, du reste, remplacer la droite par un cercle passant par deux points fixes donnés inverses l'un de l'autre par rapport au cercle osculateur. Amenons par une transformation conforme les trois points A_1, A_2, A_3 à coïncider avec A_1, A_2, A'_3 ; la courbe prendra une nouvelle position et on pourra recommencer pour un cinquième point de la courbe la construction de tout à l'heure qui le fera correspondre à un cinquième point A'_4 du cercle et ainsi de suite. Analytiquement, il existe sur un cercle un paramètre projectif défini à une transformation homographique près: c'est le paramètre en fonctions duquel les coordonnées d'un point de la courbe s'expriment rationnellement. On pourra donc définir sur une courbe plane quelconque un paramètre projectif, grâce auquel on connaîtra le rapport anharmonique de quatre points de la courbe. Analytiquement, ce paramètre s'obtient très simplement comme le quotient de deux solutions particulières de l'équation différentielle

$$\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{u}{4\rho^2} = 0 ,$$

où s désigne l'arc de la courbe et ρ le rayon de courbure.

En Géométrie projective plane, on peut de même développer projectivement une courbe quelconque sur la conique osculatrice et définir également ainsi le rapport anharmonique de quatre points de la courbe. Mais ici ce développement n'intéresse pas seulement la courbe donnée, mais tout le plan qui en est un certain sens solidaire et qui se trouve ainsi muni d'une métrique cayleyenne à courbure constante. En effet, par un point quelconque P du plan menons une tangente PA à la courbe et traçons la

conique osculatrice à la courbe en A; elle peut être regardée comme l'absolu d'une géométrie cayleyenne; la distance cayleyenne du point P à un point infiniment voisin P' sera le logarithme du rapport anharmonique des deux points P, P' et des deux points où la droite PP' coupe la conique. Naturellement le ds^2 du plan est indéfini et n'existe que dans les régions du plan d'où on peut mener une tangente à la courbe; la direction PA est isotrope, la seconde direction isotrope en P est celle de la seconde tangente menée de P à la conique osculatrice en A. Les géodésiques de la métrique ne sont plus en général des droites. L'adjonction d'une courbe quelconque nous a permis ici de faire du plan un espace cayleyen à deux dimensions; cet espace est holonome, parce que la connexion cayleyenne du plan est commandée par le développement de la courbe donnée sur sa conique osculatrice, et ce développement est nécessairement holonome, puisque la courbe n'a qu'une dimension.

On peut de même, dans l'espace projectif à trois dimensions, développer une surface sur la quadrique de Lie; le développement n'est plus holonome, à moins que la surface ne soit réglée: dans ce dernier cas, en effet, la quadrique de Lie est la même tout le long d'une même génératrice; on n'a en réalité à faire qu'à une variété (de droites) à une dimension, ce qui entraîne nécessairement l'holonomie.

VIII

Revenons maintenant aux espaces non holonomes à groupe fondamental G. Comme nous l'avons vu, à tout cycle partant d'un point A de l'espace et y revenant est associée une transformation du groupe G, transformation qui opère dans l'espace holonome tangent en A. A l'ensemble des cycles issus de A est donc associé un ensemble de transformation de G, qu'on démontre facilement former un groupe g : c'est le *groupe d'holonomie* de l'espace, qui est essentiellement le même en tous les points A. Le groupe g donne en quelque sorte une mesure de la non holonomie de l'espace; s'il se réduit à la transformation identique, c'est qu'on a un espace de Klein. On a donc là un principe de classification des espaces à groupe fondamental donné, de même